НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Ранговый анализ случайных полей

03, март 2013

DOI: 10.7463/0313.0541592

Горяинов В. Б.

УДК 519.12

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

vb_goryainov@mail.ru

Введение

Рассмотрим авторегрессионное поле X_{ij}, описываемое уравнением

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \qquad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $X_{ij} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$б $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — авторегрессионные коэффициенты, а ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием $\mathsf{E}\varepsilon_{ij} = 0$.

Ранговый подход в статистике состоит в замене наблюдений X_{ij} рангами их остатков

$$\varepsilon_{ij}(\vartheta) = X_{ij} - \vartheta_{10}X_{i-1,j} - \vartheta_{01}X_{i,j-1} - \vartheta_{11}X_{i-1,j-1}, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

и анализе этих рангов, а не самих исходных наблюдений.

В работе [1] были предложены устойчивые к «выбросам» локально наиболее мощные ранговые критерии и оценки параметра a.

В данной работе на основе этих критериев построены ранговые оценки коэффициентов a. Проведено сравнение эффективности полученных ранговых оценок с оценками наименьших квадратов.

Изложение в работе ведется по схеме, в которой ранговые оценки строятся на основе оптимальных критериев проверки гипотез о коэффициентах a. Впервые такой способ действий был предложен Дж. Ходжесом и Э. Леманом [2] при изучении ранговыми методами задачи о двух выборках, отличающихся неизвестным сдвигом.

Ранее для моделей типа авторегрессии — скользящего среднего ранговые оценки строились в [3, 4, 5].

1. Проверка гипотез о коэффициентах авторегрессионного поля

Рассмотрим поле (1), где $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров, а ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$.

Пусть $a^0 = (a^0_{10}, a^0_{01}, a^0_{11})$ и $b = (b_{10}, b_{01}, b_{11})$ — известные векторы. Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$H^0_{a^0}:\ a = a^0$$

против односторонних альтернатив вида

$$H^+_{a^0b}:\ a = a^0 + \Delta b, \quad \Delta > 0,$$

$$H^-_{a^0b}:\ a = a^0 + \Delta b, \quad \Delta < 0,$$

и двусторонней альтернативы

$$H_{a^0b}:\ a = a^0 + \Delta b, \quad \Delta \neq 0.$$

Пусть $X = \{X_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, — матрица наблюдений поля (1).

Обозначим через $R_{ij}(a)$ ранг (порядковый номер) остатка $\varepsilon_{ij}(a)$ в (2) в последовательности

$$\varepsilon_{11}(a),\ \ldots,\ \varepsilon_{m1}(a),\ \ldots,\ \varepsilon_{1n}(a),\ \ldots,\ \varepsilon_{mn}(a).$$

Отметим, что матрица $R(a) = \{R_{ij}(a)\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежит множеству $\mathcal{M}$ матриц размера $m \times n$, элементы которых являются перестановками множества $\{1, 2, \ldots, mn\}$. Ранговые оптимальные критерии проверки гипотез о параметре a строятся на основе информации только об $R(a^0)$. Оптимальность критериев понимается в следующем смысле [1].

Обозначим через Q критическую область рангового критерия, т. е. такое подмножество в $\mathcal{M}$, что если матрица $R(a^0)$ принадлежит Q, то гипотеза $H^0_{a^0}$ отклоняется. Через $P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)$ обозначим функцию мощности рангового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы $H^0_{a^0}$, когда $H^0_{a^0}$ неверна:

$$P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta) = \mathsf{P}\{R(a^0) \in Q|\ \text{верна альтернатива } a = a^0 + \Delta b\}.$$

Пусть $P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)$ дифференцируема в точке 0 по Δ. Локально наиболее мощный ранговый критерий для проверки гипотезы $H^0_{a^0}$ против односторонней альтернативы $H^+_{a^0b}$ определяется как критерий, имеющий функцию мощности $P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)$, наиболее круто возрастающую по переменной Δ в правосторонней окрестности точки $\Delta = 0$. Это означает, что критическая область Q локально наиболее мощного рангового критерия должна быть выбрана так, чтобы величина $\dfrac{dP_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)}{d\Delta}$ при $\Delta = 0$ была максимальна. Совершенно аналогично определим локально наиболее мощный ранговый критерий для проверки гипотезы $H^0_{a^0}$ против односторонней альтернативы $H^-_{a^0b}$ как критерий, имеющий минимальное значение $\dfrac{dP_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)}{d\Delta}$ при $\Delta = 0$.

2. Локально наиболее мощные ранговые критерии

Для произвольной функции распределения вероятности $G(x)$ и соответствующей ей плотности распределения вероятности $g(x)$ определим функцию меток

$$\varphi_g(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)} \tag{3}$$

и сами метки

$$a^g_{mn}(i,j) = \mathsf{E}\big[\varphi_g(G^{-1}(U^{(i)}))\,G^{-1}(U^{(j)})\big], \quad i,j = 1,\ldots,mn, \tag{4}$$

где $U^{(1)}, \ldots, U^{(mn)}$ — элементы вариационного ряда из равномерного распределения на отрезке $[0,\ 1]$;

$$G^{-1}(u) = \inf\{x : G(x) \geq u\}.$$

Определим множество $\{\delta_{ij}(a)\}$ рекуррентным соотношением

$$\delta_{ij}(a) = a_{10}\delta_{i-1,j}(a) + a_{01}\delta_{i,j-1}(a) + a_{11}\delta_{i-1,j-1}(a), \quad i,j = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{gathered} \delta_{00}(a) = 1, \quad \delta_{i0}(a) = \delta_{0j}(a) = 0 \quad \text{для } i,j \geq 1, \\ \delta_{ij}(a) = 0 \quad \text{для любых } i < 0 \text{ или } j < 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим

$$\mathcal{I} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Определим на множестве матриц $r \in \mathcal{M}$ статистики

$$Z^g_{ij}(r) = \sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} a^g_{mn}(r_{kl}, r_{k-i,l-j}), \quad i = p,\ldots,m-1, \quad j = q,\ldots,n-1; \tag{7}$$

$$W^g_{pq}(a,r) = \sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) Z^g_{i+p,j+q}(r), \quad (p,q) \in \mathcal{I}; \tag{8}$$

$$S^g(a,b,r) = b_{10}W^g_{10}(a,r) + b_{01}W^g_{01}(a,r) + b_{11}W^g_{11}(a,r). \tag{9}$$

В [1] доказаны следующие теоремы, определяющие вид локально наиболее мощных критериев.

Теорема 1. Пусть плотность $f(x)$ независимых одинаково распределенных случайных величин ε_{ij} в (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathsf{E}\varepsilon_{11} = 0; \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx < \infty; \tag{11}$$

$$|f(x) - f(y)| < C|x-y| \ \text{ для любых } x, y \text{ из } \mathbb{R}, \quad C > 0, \tag{12}$$

а $R(a)$ — матрица рангов наблюдений поля (1).

Тогда локально наиболее мощный ранговый критерий отклоняет $H^0_{a^0}$ в пользу $H^+_{a^0b}$, если

$$S^f(a^0, b, R(a^0)) > C^+, \tag{13}$$

и принимает в противном случае. Постоянная C^+ определяется уровнем значимости критерия.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 локально наиболее мощный ранговый критерий отклоняет $H^0_{a^0}$ в пользу $H^-_{a^0b}$, если

$$S^f(a^0, b, R(a^0)) < C^-, \tag{14}$$

и принимает в противном случае. Постоянная C^- определяется уровнем значимости критерия.

3. Асимптотическая нормальность статистик локально наиболее мощных ранговых критериев

Для практического применения критериев (13)–(14) нужно знать распределение статистик $S^g(a, b, R(a))$ при гипотезе $H^0_{a^0}$.

Для небольших m и n квантили статистики $S^g(a^0, b, R(a^0))$ можно оценить методом Монте-Карло. Если же m и n велики, то следующая теорема [1] позволяет для распределения $S^g(a^0, b, R(a^0))$ применить нормальную аппроксимацию.

Обозначим

$$W^g(a, r) = \big(W^g_{10}(a, r), W^g_{01}(a, r), W^g_{11}(a, r)\big).$$

Определим матрицу

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(1,0,1,0) & \mathcal{K}(1,0,0,1) & \mathcal{K}(1,0,1,1) \\ \mathcal{K}(1,0,0,1) & \mathcal{K}(0,1,0,1) & \mathcal{K}(0,1,1,1) \\ \mathcal{K}(1,0,1,1) & \mathcal{K}(0,1,1,1) & \mathcal{K}(1,1,1,1) \end{pmatrix} \tag{15}$$

с элементами

$$\mathcal{K}(p, q, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a^0)\delta_{i+|p-\alpha|, j+|q-\beta|}(a^0), \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{I}. \tag{16}$$

Теорема 3. Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} x g(x)\, dx = 0, \tag{17}$$

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\, dx < \infty, \tag{18}$$

g имеет конечное количество информации Фишера

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2 g(x)\, dx \tag{19}$$

и

$$1 - a^0_{10} z_1 - a^0_{01} z_2 - a^0_{11} z_1 z_2 \neq 0, \quad |z_1| \le 1, \ \ |z_2| \le 1. \tag{20}$$

Тогда при справедливости гипотезы H^0_a вектор $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} W^g(a^0, R(a^0))$ асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2_g I(g)\mathcal{K}$. В частности, статистика $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} S^g(a^0, b, R(a^0))$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$I(g)\sigma^2_g \sum_{(p,q)\in\mathcal{I}} b^2_{pq} \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} \delta^2_{ij}.$$

Отметим, что условия (18)–(20) являются достаточными для существования асимптотической дисперсии статистики $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} S^g(a^0, b, R)$, в частности, сходимость ряда

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} \delta^2_{ij}(a^0)$$

обеспечивается условием (20).

4. Приближенные ранговые метки

Для использования статистик (7)–(9) необходимо знать массив меток (4). Между тем зависимость $a^g_{mn}(i, j)$ от i и j бывает достаточно сложной и не всегда может быть получена в явном виде. Например, если $g(x)$ в формуле (3) — плотность стандартного нормального распределения, то зависимость $a^g_{mn}(i, j)$ от i и j выражается двойным интегралом, требующим численного вычисления.

Один из стандартных способов упрощения вычисления ранговых статистик (7)–(9) состоит в замене меток (4) их приближенными аналогами [6, п. II.4.3]. Идея основана на том, что

$$\mathsf{E}[U^{(i)}] = \frac{i}{mn+1}, \qquad \mathsf{D}[U^{(i)}] = \frac{i(mn - i + 1)}{(mn+1)^2(mn+2)}.$$

Так как с ростом m и n дисперсия $\mathsf{D}[U^{(i)}]$ порядковой статистики $U^{(i)}$ стремится к нулю, то $U^{(i)}$ с увеличением m и n становится «все менее и менее случайной», вырождаясь в постоянную $\dfrac{i}{mn+1}$. Отсюда следует, что для гладкой функции φ_g метка $a^g_{mn}(i, j)$ при больших m и n будет слабо отличаться от приближенной метки

$$\widetilde{a}^g_{mn}(i, j) = \varphi_g(G^{-1}(\mathsf{E}U^{(i)}))G^{-1}(\mathsf{E}U^{(j)}) = \varphi_g\left(G^{-1}\Big(\frac{i}{mn+1}\Big)\right) G^{-1}\Big(\frac{j}{mn+1}\Big), \tag{21}$$

одно из достоинств которой — в простоте зависимости от i и j. Другим достоинством является то, что (см. ниже теорему 4) статистики $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} W^g(a, R(a))$ и $S^g(a, b, R(a))$ не меняют асимптотического распределения при замене меток $a^g_{mn}(i, j)$ вида (4) на приближенные метки $\widetilde{a}^g_{mn}(i, j)$ вида (21).

Обозначим

$$w^g(a, R(a)) = \big(w^g_{10}(a, R(a)),\ w^g_{01}(a, R(a)),\ w^g_{11}(a, R(a))\big),$$

где

$$w^g_{pq}(a, r) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) z^g_{i+p,j+q}(r), \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \tag{22}$$

$$z^g_{ij}(r) = \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} J_1\left(\frac{r_{kl}}{mn+1}\right) J_2\left(\frac{r_{k-i,l-j}}{mn+1}\right), \quad i = p, \ldots, m-1,\ j = q, \ldots, n-1, \tag{23}$$

а функции $J_1(u)$ и $J_2(u)$ определяются по формулам

$$J_1(u) = \varphi_g(G^{-1}(u)), \quad J_2(v) = G^{-1}(v),$$

в которых функция меток $\varphi_g(x)$ есть

$$\varphi_g(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (17)–(20). Тогда при справедливости гипотезы H^0_a вектор

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))$$

асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2_g I(g)\mathcal{K}$.

Доказательство. Определим для $i = p, 1, \ldots, m-1$, $j = q, 1, \ldots, n-1$ статистики

$$Z^g_{ij} = \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \varphi_g(G^{-1}(U_{kl})) G^{-1}(U_{k-i,l-j}), \tag{24}$$

$$W^g_{pq} = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a^0) Z^g_{i+p,j+q}. \tag{25}$$

Доказано [1], что

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} W^g = \frac{1}{\sqrt{mn}} \Big(W^g_{10}, W^g_{01}, W^g_{11}\Big)$$

асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2_g I(g)\mathcal{K}$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4 из [1], получим, что

$$\mathsf{D}\left[\frac{w^g_{pq}(a^0, R(a^0)) - W^g_{pq}}{\sqrt{mn}}\right] \le$$
$$\le C \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^2_{ij}(a) \mathsf{E}\Big(\tilde{a}^g_{mn}(R_2(a^0), R_1(a^0)) - \varphi_g(G^{-1}(U_2)) G^{-1}(U_1)\Big)^2, \quad (p, q) \in \mathcal{I}. \tag{26}$$

Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}\Big(\tilde a^g_{mn}(R_2(a^0), R_1(a^0)) - \varphi_g(G^{-1}(U_2))G^{-1}(U_1)\Big)^2 = 0. \tag{27}$$

Обозначим для краткости

$$J(x,y) = \varphi_g(G^{-1}(x)G^{-1}(y)), \quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1],$$

так что

$$\tilde a^g_{mn}(i,j) = J\left(\frac{i}{mn+1}, \frac{j}{mn+1}\right).$$

Предположим сначала, что частные производные функции $J(x,y)$ ограничены, в частности существует постоянная $C>0$, такая, что

$$|J(x+\Delta x, y+\Delta y) - J(x,y)| \le C\big(|\Delta x| + |\Delta y|\big), \quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{28}$$

Для удобства изложения далее всюду для произвольной матрицы C порядка $m\times n$ тем же символом C будем обозначать вектор $C = (c_1,\ldots,c_N)^T$ размерности $N = mn$, элементы которого совпадают с элементами матрицы C, упорядоченными по столбцам

$$C = (c_{11},\ldots,c_{m1},\ldots,c_{1n},\ldots,c_{mn})^T,$$

так что равенство $c_{st} = c_k$ будет означать, что $k = m(t-1)+s$, т. е.

$$c_{st} = c_{m(t-1)+s}, \quad s = 1,\ldots,m, \ \ t = 1,\ldots,n,$$

в частности

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_{m(t-1)+s}, \quad R_{st}(a^0) = R_{m(t-1)+s}(a^0).$$

Из монотонности $F(x)$ следует, что $R_k(a^0)$, определяемый как ранг ε_k в последовательности $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N$, где $N = mn$, будет также и рангом $U_k = F(\varepsilon_k)$ в последовательности $U_1,\ldots,U_N$ равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин. Показано [6, п.V.1.4], что

$$\mathsf{E}\left(U_k - \frac{R_k(a^0)}{N+1}\right)^2 < \frac{1}{N}. \tag{29}$$

Так как случайные величины U_2 и U_1 при условии $R_2(a^0) = i, R_1(a^0) = j$ совпадают с порядковыми статистиками $U^{(i)}$ и $U^{(j)}$ соответственно, то с учетом (28) и (29) для некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$

$$\mathsf{E}\left[\Big(\tilde a^g_{mn}(R_2(a^0), R_1(a^0)) - \varphi_g(G^{-1}(U_2))G^{-1}(U_1)\Big)^2 \,\Big|\, R_2(a^0) = i, R_1(a^0) = j\right] =$$

$$= \mathsf{E}\Big(\tilde a^g_{mn}(i,j) - \varphi_g(G^{-1}(U^{(i)}))G^{-1}(U^{(j)})\Big)^2 \le$$

$$\le C_1\left(\mathsf{E}\left(U^{(i)} - \frac{i}{mn+1}\right)^2 + \mathsf{E}\left(U^{(j)} - \frac{j}{mn+1}\right)^2\right) \le \frac{C_2}{mn}.$$

Поэтому по формуле полного математического ожидания

$$\mathsf{E}\Big(\tilde{a}^g_{mn}(R_2(a^0),R_1(a^0))-\varphi_g(G^{-1}(U_2))G^{-1}(U_1)\Big)^2=$$
$$=\mathsf{E}\left[\mathsf{E}\Big(\tilde{a}^g_{mn}(R_2(a^0),R_1(a^0))-\varphi_g(G^{-1}(U_2))G^{-1}(U_1)\Big)^2\bigg|R_2(a^0)=i,R_1(a^0)=j\right]\le\frac{C_2}{mn}.$$

Отсюда и из (26) следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\mathsf{E}\left[\frac{w^g_{pq}(a^0,R(a^0))-W^g_{pq}}{\sqrt{mn}}\right]^2=0,\quad (p,q)\in\mathcal{I},$$

а вместе с ним и утверждение теоремы для $J(x,y)$ с ограниченными первыми производными.

В общем случае из (18) и (19) следует, что $J^2(x,y)$ интегрируема по Лебегу. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует функция $J_\varepsilon(x,y)$ с ограниченными первыми производными, такая, что

$$\int_0^1\int_0^1|J(x,y)-J_\varepsilon(x,y)|^2\,dx\,dy<\varepsilon$$

(например, в качестве $J_\varepsilon(x,y)$ можно взять частичную сумму ряда Фурье функции $J(x,y)$). Тогда (27) справедливо для меток

$$\tilde{a}^{(\varepsilon)}_{mn}(i,j)=J_\varepsilon\left(\frac{i}{mn+1},\frac{j}{mn+1}\right).$$

Заметим, что при гипотезе H^0_a для некоторой постоянной $C>0$

$$\mathsf{E}[(\tilde{a}^g_{mn}(R_2(a^0),R_1(a^0)))^2]=\frac{1}{mn(mn-1)}\sum_{i=1}^{mn}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{mn}(\tilde{a}^g_{mn}(i,j))^2=$$
$$=\frac{1}{mn(mn-1)}\sum_{i=1}^{mn}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{mn}J^2\left(\frac{i}{mn+1},\frac{j}{mn+1}\right)\le C\int_0^1\int_0^1 J(x,y)^2\,dx\,dy.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}[|\tilde{a}^g_{mn}(R_2(a^0),R_1(a^0))-\tilde{a}^{(\varepsilon)}_{mn}(R_2(a^0),R_1(a^0))|^2]\le C\int_0^1\int_0^1|J(x,y)-J_\varepsilon(x,y)|^2\,dx\,dy<\varepsilon.$$

Таким образом, (27) выполнено для произвольной $J(x,y)$, квадратично интегрируемой по Лебегу. Отсюда следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\mathsf{E}\left[\frac{w^g_{pq}(a^0,R(a^0))-W^g_{pq}}{\sqrt{mn}}\right]^2=0,\quad (p,q)\in\mathcal{I},\tag{30}$$

причем W^g асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2_g I(g)\mathcal{K}$. Теорема доказана.

5. Ранговые оценки

Из теорем 1–3 следует, что небольшие значения функции

$$W^g_{pq}(a, R(a)) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) \sum_{k=i+p+1}^{m} \sum_{l=j+q+1}^{n} a^g_{mn}(R_{kl}(a), R_{k-i-p,l-j-q}(a)), \quad (p, q) \in \mathcal{I},$$

как функции от a свидетельствуют в пользу H^0_a, а большие — в пользу альтернатив. Поэтому в качестве оценки параметра a, следуя идее Ходжеса и Лемана (см. [2]), выберем значение a, наилучшим образом согласованное с наблюденной матрицей рангов $R(a)$, то есть решение $\hat{a}$ системы уравнений

$$W^g_{pq}(a, R(a)) = 0, \quad (p, q) \in \mathcal{I}. \tag{31}$$

Матрица $R(a)$ как функция от a имеет разрывы в точках a, в которых выполняются равенства

$$\varepsilon_{ij}(a) = \varepsilon_{kl}(a), \quad i,\, k = 1,\, \ldots,\, m, \quad j,\, l = 1,\, \ldots,\, n. \tag{32}$$

Поэтому разрывными будут и функции $W^g_{pq}(a, R(a))$, а, значит, равенство (31) может выполняться, вообще говоря, лишь приближенно. В силу этого равенство (31) будем понимать следующим образом.

Будем говорить, что функция $h(x)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ переходит в точке y через ноль, если в точке y функция $h(x)$ меняет знак. Пусть теперь $h(x)$ — функция из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$. В этом случае будем говорить, что функция $h(x)$ переходит в точке $y = (y_1, \ldots, y_d)$ через ноль, если функция $h_j(t) = h(y_1, \ldots, y_{j-1}, t, y_{j+1}, \ldots, y_k)$ переходит в точке y_j через ноль для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$. В соответствии с этим определением будем говорить, что $\hat{a}$ — решение (31), если в точке $\hat{a}$ все функции $W^g_{pq}(a, R(a))$, $(p, q) \in \mathcal{I}$, переходят через ноль.

Отметим, что плотность распределения вероятности $f(x)$ случайных величин ε_{ij}, на практике, вообще говоря, неизвестна, и поэтому не совпадает с плотностью $g(x)$, по которой построена статистика $W^g_{pq}(a, R(a))$, определяющая ранговую оценку в (31). Изучим асимптотические свойства ранговой оценки, построенной в этом предположении.

Из теоремы 4 следует, что асимптотические свойства случайной функции $W^g_{pq}(a, R(a))$ при замене в ее определении точных ранговых меток (4) на приближенные метки (21), не меняются. В связи с этим будем предполагать, что функция $W^g_{pq}(a, r)$ в формуле (31) заменена на функцию (22).

Таким образом, оценкой $\hat{a}$ вектора авторегрессионных коэффициентов a назовем решение уравнения

$$w^g(a, R(a))) = 0, \tag{33}$$

или уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a, R(a))) = 0,$$

где $w^g_{pq}(a, r)$ и $z^g_{ij}(r)$ определяются по формулам (22)–(23).

Заметим, что в качестве оценки параметра a можно взять точку минимума функции

$$f_R(a) = \frac{1}{mn}\Big((w^g_{10}(a, R(a)))^2 + (w^g_{01}(a, R(a)))^2 + (w^g_{11}(a, R(a)))^2\Big). \qquad (34)$$

Функция $f_R(a)$ ограниченная и кусочно-гладкая. Она имеет разрывы в точках, удовлетворяющих (32). Поэтому минимум функции $f_R(a)$ можно найти любым методом, не требующим дифференцируемости целевой функции, например, методом покоординатного спуска.

6. Состоятельность ранговых оценок

Согласно определению состоятельности последовательность оценок $\hat{a}_{mn}$ называется состоятельной, если последовательность $\hat{a}_{mn}$ сходится по вероятности к a^0 при $m, n \to \infty$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существуют m_0 и n_0 (вообще говоря, зависящие от ε) такие, что

$$\mathsf{P}\{|\hat{a}_{mn} - a^0| > \varepsilon\} \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

Таким образом, состоятельность — естественное свойство оценок быть все ближе и ближе к оцениваемому параметру с ростом объема информации о поле X_{ij} и в пределе, когда число наблюдений становится неограниченным, полностью восстанавливать параметр a авторегрессионной модели.

В этом параграфе будет доказано более сильное утверждение, состоящее в том, что последовательность $\hat{a}_{mn}$ является $\sqrt{mn}$-состоятельной, то есть, что последовательность $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ равномерно ограничена по вероятности. Равномерная ограниченность по вероятности последовательности $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$, в свою очередь, по определению означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mathsf{P}\{\sqrt{mn}|\hat{a}_{mn} - a^0| > C\} < \varepsilon$$

для всех m, n. Таким образом, $\sqrt{mn}$-состоятельность последовательности $\hat{a}_{mn}$ означает, что скорость сходимости $\hat{a}_{mn}$ к a^0 обратно пропорциональна $\sqrt{mn}$.

Для доказательства $\sqrt{mn}$-состоятельности последовательности $\hat{a}_{mn}$ нам понадобится понятие контигуальности семейства вероятностных мер (см. [6, п. 6.1.1.].

Для произвольного $b = (b_{10}, b_{01}, b_{11}) \in \mathbb{R}^3$ рассмотрим последовательность альтернатив

$$H_{mn} : a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}.$$

Обозначим

$$\varepsilon(a) = (\varepsilon_{11}(a), \ldots, \varepsilon_{m1}(a), \ldots, \varepsilon_{12}(a), \ldots, \varepsilon_{m2}(a), \ldots, \varepsilon_{1n}(a), \ldots, \varepsilon_{mn}(a))^T;$$

$$\varepsilon = \varepsilon(a^0) = (\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{m1}, \ldots, \varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{m2}, \ldots, \varepsilon_{1n}, \ldots, \varepsilon_{mn})^T;$$

$$u = (u_{11}, \ldots, u_{m1}, \ldots, u_{12}, \ldots, u_{m2}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{mn})^T;$$

$f_0(u)$ и $f_b(u)$ — плотности вектора ε при гипотезах H^0 и H_{mn} соответственно.

Согласно определению контигуальности (см. [6, п. 6.1.1], семейство плотностей $f_b(u)$, зависящих от m, n, будет контигуальным по отношению к семейству плотностей $f_0(u)$, (также зависящих от m, n), если для любой последовательности множеств $B_{mn} \in \mathbb{R}_{mn}$ из борелевской σ-алгебры множеств в $\mathbb{R}_{mn}$, такой, что

$$\int_{B_{mn}} f_0(u)\,du \to 0 \text{ при } m, n \to \infty,$$

будет выполнено

$$\int_{B_{mn}} f_b(u)\,du \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия

$$\mathsf{E}\varepsilon_{11} = 0; \tag{35}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx < \infty; \tag{36}$$

$$\mathsf{E}\varepsilon_{ij}^3 < \infty; \tag{37}$$

функция меток $\varphi_f(x)$ вида (3) почти всюду удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует постоянная $C > 0$, такая, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_f(x+y) - \varphi_f(x)| \le C|y|, \quad y \in \mathbb{R}; \tag{38}$$

f имеет конечное количество информации Фишера

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 f(x)\,dx, \tag{39}$$

и

$$1 - a_{10}^0 z_1 - a_{01}^0 z_2 - a_{11}^0 z_1 z_2 \ne 0, \quad |z_1| \le 1, \ |z_2| \le 1.$$

Тогда плотности $f_b(u)$ и $f_0(u)$ контигуальны.

Доказательство. Так как $\varepsilon_{ij}(a^0) = \varepsilon_{ij}$, т.е $\varepsilon_{ij}(a^0)$ — независимые случайные величины, то

$$f_0(u) = \prod_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{n} f(u_{st}), \quad u = (u_{11}, \ldots, u_{m1}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{mn})^T = (u_1, \ldots, u_N)^T.$$

Выразим плотность $f_b(u)$ через $f_0(u)$.

Определим матрицы

$$A_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{10} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{10} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(a) = \begin{pmatrix} -a_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{01} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{11} & -a_{01} \end{pmatrix},$$

$$B_k(a) = \begin{pmatrix} \delta_{0k}(a) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{1k}(a) & \delta_{0k}(a) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m-1,k}(a) & \delta_{m-2,k}(a) & 0 & \dots & 0 & \delta_{1k}(a) & \delta_{0k}(a) \end{pmatrix}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

размера $m \times m$ и блочные матрицы

$$A(a) = \begin{pmatrix} A_1(a) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2(a) & A_1(a) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_2(a) & A_1(a) \end{pmatrix},$$

$$B(a) = \begin{pmatrix} B_0(a) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1(a) & B_0(a) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-1}(a) & B_{n-2} & B_{n-3} & \dots & B_1(a) & B_0(a) \end{pmatrix}$$

размера $mn \times mn$.

Предположим, что $X_{ij} = 0$ для любых $i < 0$ или $j < 0$. Известно [7, 8], что асимптотические результаты авторегрессионных моделей не зависят от начальных условий, в частности, поле X_{ij} будет асимптотически стационарным и с нулевыми начальными условиями. В этом случае из (1), (2) и определения матриц $A(a)$ и $B(a)$ следует, что

$$\varepsilon = A(a^0)X, \qquad \varepsilon(a) = A(a)X,$$

а из (5) и (6) следует, что

$$B(a) = A^{-1}(a),$$

и, поэтому,

$$\varepsilon = A(a^0)B(a)\varepsilon(a).$$

Учитывая, что $\delta_{ij}(a) = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$, полученное векторное равенство можно записать покоординатно для всех $k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$:

$$\varepsilon_{kl} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \Big(\delta_{k-i,l-j}(a) - a_{10}^0 \delta_{k-i-1,l-j}(a) - a_{01}^0 \delta_{k-i,l-j-1}(a) - a_{11}^0 \delta_{k-i-1,l-j-1}(a)\Big)\varepsilon_{ij}(a),$$

а с учетом (5), (6)

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(a) + \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \Big(b_{10}\delta_{k-i-1,l-j}(a) + b_{01}\delta_{k-i,l-j-1}(a) + b_{11}\delta_{k-i-1,l-j-1}(a)\Big)\varepsilon_{ij}(a). \quad (40)$$

Так как определитель отображения $u = A(a^0)B(a)v$ равен 1, то

$$f_b(v) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} f(u_{kl}(v)),$$

где для краткости для всех $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$

$$u_{kl}(v) = v_{kl} + \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \Big(b_{10}\delta_{k-i-1,l-j}(a) + b_{01}\delta_{k-i,l-j-1}(a) + b_{11}\delta_{k-i-1,l-j-1}(a)\Big) v_{ij}.$$

Запишем формулу (40) в виде

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(a) + \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij}(a),$$

где для $s = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, n$

$$d_{st}(b,a) = b_{10}\delta_{s-1,t}(a) + b_{01}\delta_{s,t-1}(a) + b_{11}\delta_{s-1,t-1}(a) \tag{41}$$

(напомним, что по определению $\delta_{ij}(a) = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$), причем определитель отображения $\{\varepsilon_{kl}(a)\} \to \{\varepsilon_{kl}\}$ равен 1. Поэтому

$$f_b(u) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} f\left(u_{kl} + \frac{v_{kl}(u)}{\sqrt{mn}}\right),$$

где для краткости для всех $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$

$$v_{kl}(u) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} d_{k-i,l-j}(b,a)u_{ij}.$$

Докажем, что для некоторого d случайная величина $\ln \dfrac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием $-\dfrac{d^2}{2}$ и дисперсией d^2, откуда согласно следствию из первой леммы Ле Кама [9, p. 253] будет следовать утверждение леммы.

По формуле Тейлора

$$\ln(f_b(\varepsilon)) = \ln(f_0(\varepsilon)) + L_1 + L_2,$$

где

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \varphi_f(\varepsilon_{kl}) v_{kl}(\varepsilon), \tag{42}$$

$$L_2 = -\frac{1}{2mn} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \varphi'_f\left(\varepsilon_{kl} + \frac{\tau v_{kl}(\varepsilon)}{\sqrt{mn}}\right)(v_{kl}(\varepsilon))^2, \quad 0 < \tau < 1,$$

а $\varphi_f(x)$ — функция меток (3), построенная по плотности $f(x)$.

Докажем асимптотическую нормальность L_1. Зафиксируем m_0 и n_0, $1 < m_0 < m$, $1 < n_0 < n$. Представим L_1 в виде суммы

$$L_1 = L_{11} + L_{12} + L_{13},$$

где

$$L_{11} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \varphi_f(\varepsilon_{kl}) \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{n_0} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij}, \tag{43}$$

$$L_{12} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \varphi_f(\varepsilon_{kl}) \sum_{i=m_0+1}^{k} \sum_{j=1}^{n} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij},$$

$$L_{13} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \varphi_f(\varepsilon_{kl}) \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=n_0+1}^{n} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij}.$$

Известно [10], что при выполнении (20) существуют постоянные $\alpha \in (0,1)$ и $C > 0$, что

$$|\delta_{kl}(a)| \leq C\alpha^{k+l}. \tag{44}$$

Из (41) и (44) следует, что существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|d_{st}(b,a)| \leq C\alpha^{s+t}.$$

Поэтому при $m_0, n_0 \to \infty$ по вероятности

$$L_{1i} \to 0, \quad i = 2, 3.$$

Величина L_{11} является асимптотически нормальной, так как в сумме (43) слагаемые

$$\varphi_f(\varepsilon_{kl}) \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{n_0} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij}$$

зависят только от конечного $m_0 n_0$ числа таких же слагаемых (см. [11, с. 468]).

Теперь найдем $\mathsf{E}[L_1]$ и $\mathsf{D}[L_1]$. Из (41) следует, что $d_{00} = 0$. Кроме того, $\varphi_f(\varepsilon_{kl})$ и $v_{kl}(\varepsilon)$ независимы, а в силу (35)

$$\mathsf{E}[v_{kl}(\varepsilon)] = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}L_1 = 0.$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая (36) и (39), получим

$$\mathsf{E}[\varphi_f'(\varepsilon_{kl})] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f'(x) f(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f(x) f'(x)\, dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} f'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 f(x)\, dx = I(f). \tag{45}$$

Из (39) следует, что

$$\mathsf{E}[\varphi_f^2(\varepsilon_{kl})] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 f(x)\, dx = I(f),$$

а из определения $v_{kl}(\varepsilon)$, независимости ε_{kl}, $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и обозначения $\mathsf{E}(\varepsilon_{kl}^2) = \sigma_f^2$ вытекает

$$\mathsf{E}[(v_{kl})^2] = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} d_{k-i,l-j}(b,a)\varepsilon_{ij}\right)^2 = \sigma_f^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} d_{k-i,l-j}^2(b,a).$$

Отсюда, из независимости $\varphi_f^2(\varepsilon_{kl})$ от $v_{kl}(\varepsilon)$, условия $\mathsf{E}[v_{kl}(\varepsilon)] = 0$ и (39) следует, что при $m, n \to \infty$

$$\mathsf{E}[L_1^2] = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \mathsf{E}[\varphi_f^2(\varepsilon_{kl})] \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} d_{k-i,l-j}^2(b,a)\sigma_f^2 \to d^2, \tag{46}$$

где

$$d^2 = \sigma_f^2 I(f) \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} d_{kl}^2(b,a).$$

Покажем, что

$$L_2 \to -\frac{d^2}{2}, \quad m, n \to \infty.$$

Представим L_2 в виде

$$L_2 = L_{21} + L_{22},$$

где

$$L_{21} = -\frac{1}{2mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \varphi'_f(\varepsilon_{kl})(v_{kl}(\varepsilon))^2, \tag{47}$$

$$L_{22} = -\frac{1}{2mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \left[\varphi'_f\left(\varepsilon_{kl} + \frac{\tau v_{kl}(\varepsilon)}{\sqrt{mn}}\right) - \varphi'_f(\varepsilon_{kl})\right](v_{kl}(\varepsilon))^2. \tag{48}$$

Согласно закону больших чисел для q-зависимых случайных величин (см. [11, теор. 19.2.2])

$$L_{21} - \mathsf{E}L_{21} \to 0, \quad m, n \to \infty \tag{49}$$

Из независимости $\varphi'_f(\varepsilon_{kl})$ от $v_{kl}(\varepsilon)$ и (45) следует, что

$$\mathsf{E}L_{21} = -\frac{1}{2mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \mathsf{E}[\varphi'_f(\varepsilon_{kl})]\mathsf{E}(v_{kl}(\varepsilon))^2 \to -\frac{d^2}{2}, \quad m, n \to \infty. \tag{50}$$

Из (37) и (38) следует, что при $m, n \to \infty$

$$\mathsf{E}|L_{22}| \le \frac{1}{2mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \left|\varphi'_f\left(\varepsilon_{kl} + \frac{\tau v_{kl}(\varepsilon)}{\sqrt{mn}}\right) - \varphi'_f(\varepsilon_{kl})\right|(v_{kl}(\varepsilon))^2 \le$$

$$\le \frac{C\tau}{(mn)^{3/2}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \mathsf{E}(v_{kl}(\varepsilon))^3 \to 0. \tag{51}$$

Лемма доказана.

Лемма 1 позволяет найти распределение $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a, R(a))$ при контигуальных альтернативах H_{mn}, откуда будет следовать $\sqrt{mn}$-состоятельность оценки $\hat{a}_{mn}$ вектора авторегрессионных коэффициентов a.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (17)–(20), (35)–(39).

Тогда существует решение $\hat{a}_{mn}$ системы (33), являющейся $\sqrt{mn}$-состоятельной оценкой параметра a^0, т.е. последовательность случайных величин $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ равномерно по m и n ограничена по вероятности, а именно для любого ε существует постоянная C такая, что

$$\mathsf{P}\{\sqrt{mn}|\hat{a}_{mn} - a^0| > C\} < \varepsilon$$

для всех m и n.

Доказательство. Из третьей леммы Ле Кама (см. [6, п.VI.1.4.]) следует, что если случайный вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)),\ \ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right)$ асимптотически нормален, причем

$$\mathsf{E}\left[\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right] = -\frac{1}{2}\mathsf{D}\left[\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right], \tag{52}$$

то при

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}$$

случайная величина $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a, R(a))$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))\right] + \mathsf{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)), \ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right)$$

и ковариационной матрицей

$$\mathsf{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))\right).$$

Из доказательства леммы 1 следует, что случайная величина $\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}$ асимптотически нормальна с дисперсией

$$d^2 = \sigma_f^2 I(f)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} d_{kl}^2(b, a)$$

и математическим ожиданием $-\frac{d^2}{2}$, в частности равенство (52) выполнено. Из теоремы 4 следует, что $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\frac{\sigma_g^2}{\sigma_f^2} I(g)K$, где K — ковариационная матрица вектора (X_{10}, X_{01}, X_{00}).

Найдем

$$\mathsf{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)), \ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right).$$

Так как

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))\right) = 0,$$

то

$$\mathsf{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0)),\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right)=\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right).$$

Используя обозначения леммы 1 (формулы (42), (47) (48) для L_1, L_{21} и L_{22} соответственно), получим

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))\ln\frac{f_b(\varepsilon)}{f_0(\varepsilon)}\right)=\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_1\right)+$$
$$+\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_{21}\right)+\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_{22}\right).$$

Из (49)–(50) следует, что $\mathsf{D}L_{21}\to 0$. Поэтому из существования $\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))\right)^2$ и неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_{21}\right)\to 0,\qquad m,n\to\infty.$$

Из существования $\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))\right)^2$ и (51) следует, что

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_{22}\right)\to 0,\qquad m,n\to\infty.$$

Вычислим

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0,R(a^0))L_1\right).$$

В силу (30) этот предел совпадает с пределом

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}W^gL_1\right).$$

Так случайные величины $F(\varepsilon_{kl})$ независимы и равномерно распределены на $[0,1]$, то Z^g_{ij} в (24) можно представить в виде

$$Z^g_{ij}=\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n}\varphi_g(G^{-1}(F(\varepsilon_{kl})))G^{-1}(F(\varepsilon_{k-i,l-j})).\tag{53}$$

Кроме того,

$$\mathsf{E}[\varphi_g(G^{-1}(F(\varepsilon_{11})))\varphi_f(\varepsilon_{11})]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_g(G^{-1}(F(x)))\varphi_f(x)f(x)\,dx=$$
$$=\int_0^1\varphi_g(G^{-1})(u)\varphi_f(F^{-1})(u)\,du,\tag{54}$$

$$\mathsf{E}[G^{-1}F(\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(G^{-1}(F(x))\right)xf(x)\,dx=\int_0^1G^{-1}(u)F^{-1}(u)\,du.\tag{55}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[Z_{ij}^g, L_1] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{l_1=1}^{n} \mathsf{E}[\varphi_g(G^{-1}(F(\varepsilon_{kl})))G^{-1}(F(\varepsilon_{k-i,l-j}))\varphi_f(\varepsilon_{k_1 l_1})v_{k_1 l_1}(\varepsilon)] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \mathsf{E}[\varphi_g(G^{-1}(F(\varepsilon_{kl})))G^{-1}(F(\varepsilon_{k-i,l-j}))\varphi_f(\varepsilon_{kl})v_{kl}(\varepsilon)] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \mathsf{E}[\varphi_g(G^{-1}(F(\varepsilon_{kl})))\varphi_f(\varepsilon_{kl})]\mathsf{E}[G^{-1}(F(\varepsilon_{k-i,l-j}))d_{ij}(b,a)\varepsilon_{k-i,l-j}] = \\
&= \frac{(m-i)(n-j)}{\sqrt{mn}} d_{ij}(b,a) I_1(F,G) I_2(F,G), \qquad (56)
\end{aligned}$$

где

$$I_1(F,G) = \int_0^1 \varphi_g(G^{-1}(u))\varphi_f(F^{-1}(u))\, du,$$

$$I_2(F,G) = \int_0^1 G^{-1}(u)F^{-1}(u)\, du,$$

а $d_{ij}(b,a)$ определены формулой (41). Конечность интегралов $I_1(F,G)$ и $I_2(F,G)$ вытекает из условий (19), (39) и неравенства Коши — Буняковского. Таким образом, при $m,n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}} W_{pq}^g L_1\right) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a^0) \mathsf{E}[Z_{i+p,j+q} R(a^0) L_1] = \\
&= I_1(F,G) I_2(F,G) \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a^0) \frac{(m-i)(n-j)}{mn} d_{i+p,j+q}(b,a) = \\
&= I_1(F,G) I_2(F,G) \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a^0) \frac{(m-i)(n-j)}{mn} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{I}} b_{\alpha\beta} \delta_{i+p-\alpha,j-q-\beta}(a) \to \\
&\to I_1(F,G) I_2(F,G) \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{I}} b_{\alpha\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a^0) \delta_{i+p-\alpha,j+q-\beta}(a^0) = I_1(F,G) I_2(F,G) \mathcal{K} b,
\end{aligned}$$

где матрица $\mathcal{K}$ определена формулами (15)–(16). Окончательно получаем, что при

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}$$

случайная величина $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a, R(a))$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием $I_1(F,G)I_2(F,G)\mathcal{K}b$ и ковариационной матрицей $\sigma_g^2 I(g)\mathcal{K}$.

Обозначим через a^M и a^m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $\frac{1}{\sqrt{mn}}|w^g(a,R(a))|$ в шаре $B_r(a^0)$ радиуса $\frac{r}{\sqrt{mn}}$ с центром в a^0. Из вышеизложенного следует, что для всех достаточно малых r и для достаточно больших m и n с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, будут выполнены неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{mn}}|w^g(a^M, R(a^M))| > 0 \text{ и } \frac{1}{\sqrt{mn}}|w^g(a^m, R(a^m))| < 0.$$

Отсюда следует, что в любом шаре $B_r(a^0)$ радиуса $\frac{r}{\sqrt{mn}}$ с центром в a^0 найдется такое $\hat{a}_{mn} \in B_r(a^0)$, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, $\hat{a}_{mn} \in B_r(a^0)$ будет точкой минимума функции $\frac{1}{\sqrt{mn}}|w^g(a, R(a))|$. В силу произвольности r при $m, n \to \infty$ последовательность $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ стремится к нулю по вероятности. Теорема доказана.

7. Асимптотическая нормальность ранговых оценок

Докажем асимптотическую нормальность оценки $\hat{a}_{mn}$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (17)–(20), (35)–(39). Пусть функции $J_1(x)$ и $J_2(x)$, $x \in [0, 1]$, ограничены и удовлетворяют условию Липшица

$$|J_i(x) - J_i(y)| \le C|x - y|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2. \tag{57}$$

Тогда существует решение $\hat{a}_{mn}$ системы (33), являющейся асимптотически нормальной оценкой параметра a^0, а именно, последовательность случайных величин $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ при m и n асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\frac{\sigma_g^2 I(g)}{I_1^2(F, G) I_2^2(F, G)} \mathcal{K}^{-1}.$$

Идея доказательства заключается в установлении линейного стохастического разложения процесса $\frac{1}{\sqrt{mn}} W(a, R(a))$ в окрестности точки a^0 равномерного по a в окрестности $[-\frac{C}{\sqrt{mn}}, \frac{C}{\sqrt{mn}}]$, где $C > 0$ — произвольная постоянная. Отсюда и из $\sqrt{mn}$-состоятельности оценки $\hat{a}_{mn}$ будет следовать ее асимптотическая нормальность.

Доказательство асимптотической нормальности оценки $\hat{a}_{mn}$ разобьем на ряд лемм, утверждения которых будут доказаны в предположениях теоремы 6.

Лемма 2. Для $a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}$

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g(a) - z_{ij}^g(a^0) \right) - I_1(F, G) I_2(F, G) d_{ij}(b, a) = o_p(1), \qquad m, n \to \infty.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g(a) - z_{ij}^g(a^0) \right) - I_1(F, G) I_2(F, G) d_{ij}(b, a) = S_1 + S_2 - \mathsf{E} S_2,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0))) \Big[J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a))) - J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0))) \Big],$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a))) \Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0))) \Big].$$

Здесь

$$I_1(F, G) I_2(F, G) d_{ij}(b, a) = \mathsf{E} S_2$$

в силу независимости $\varepsilon_{kl}(a^0)))$ от $\varepsilon_{k-i,l-j}(a)))$, равенства

$$\mathsf{E}J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0))) = \int_{-\infty}^{\infty} J_1(F(x))f(x)\,dx = \int_0^1 J_1(t)\,dt =$$
$$= -\int_0^1 \frac{g'(G^{-1}(t))}{g(G^{-1}(t))}\,dt = -\int_{\infty}^{\infty} \frac{g'(x)}{g(x)} g(x)\,dt = 0$$

и формулы (56).

Покажем, что по вероятности

$$S_1 \to 0, \quad S_2 - \mathsf{E}S_2 \to 0, \quad m,n \to \infty,$$

откуда будет следовать утверждение леммы.

Из независимости $\varepsilon_{kl}(a^0)$ между собой и от от $\varepsilon_{k-i,l-j}(a)$ и условия (57) следует, что

$$\mathsf{E}S_1 = 0,$$
$$\mathsf{D}S_1 = \mathsf{E}(S_1)^2 =$$
$$= \frac{1}{mn}\mathsf{E}[J_1^2(F(\varepsilon_{11}))] \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \mathsf{E}\Big[\big(J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a))) - J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\big)^2\Big] \le$$
$$\le \frac{C_1}{mn} I_1(F,G)I_2(F,G) \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \mathsf{E}|\varepsilon_{k-i,l-j}(a) - \varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)|^2 \le$$
$$\le C_2 \frac{b}{\sqrt{mn}} \mathsf{E}\big[|\tilde{X}_{11}|^2\big] \to 0, \quad m,n \to \infty.$$

Поэтому $S_1 = o_p(1)$ при $m,n \to \infty$.

Обозначим через E_a, D_a, cov_a и P_a — математическое ожидание, дисперсию и вероятность в предположении, что справедлива гипотеза

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}.$$

При этом

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_{a^0}, \quad \mathsf{D} = \mathsf{D}_{a^0} \quad \text{и} \quad \mathsf{P} = \mathsf{P}_{a^0}.$$

Заметим, что для произвольной измеримой функции h из $\mathbb{R}^{mn}$ в $\mathbb{R}$ выполнено

$$\mathsf{E}h(\varepsilon(a^0)) = \mathsf{E}_a h(\varepsilon(a)), \quad \mathsf{D}h(\varepsilon(a^0)) = \mathsf{D}_a h(\varepsilon(a))$$

и для произвольного борелевского множества B из $\mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\{h(\varepsilon(a^0)) \in B\} = \mathsf{P}_a\{h(\varepsilon(a)) \in B\}.$$

При этом в силу леммы 1 для любой последовательности событий A_{mn} сходимость $\mathsf{P}(A_{mn}) \to 0$ при $m,n \to \infty$ равносильна сходимости $\mathsf{P}_a(A_{mn}) \to 0$ при $m,n \to \infty$. Покажем, что при $m,n \to \infty$

$$S_2 - \mathsf{E}_a(S_2) \to 0 \quad \text{по мере} \quad \mathsf{P}_a.$$

Тогда в следствие контигуальности мер P и P_a при $m,n \to \infty$ будет выполнено

$$S_2 - \mathsf{E}_{a^0}(S_2) \to 0 \quad \text{по мере} \quad \mathsf{P}_{a^0}. \tag{58}$$

Так как

$$\mathsf{E}_a(S_2) = \mathsf{E}_a\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]\right) =$$

$$= \mathsf{E}_a\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[-J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]\right) =$$

$$= \mathsf{E}_{a^0}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a)))\Big[-J_1(F(\varepsilon_{kl}(a)))\Big]\right) =$$

$$= \mathsf{E}_{a^0}\left(\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]\right) = \mathsf{E}_{a^0}(S_2),$$

то из

$$\mathsf{D}_a(S_2) \to \infty, \quad m, n \to \infty,$$

будет следовать (58).

Обозначим

$$S_2^* = \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big].$$

Очевидно, что $\mathsf{D}_a(S_2) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{D}_{a^0}(S_2^*) \to 0$.

Ясно, что

$$\mathsf{D}_a(S_2^*) = \frac{m-i}{m}\frac{n-j}{n}\mathsf{D}_a\left(J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]\right) + \\ + 2\sum_{s=1}^{m-i-1}\sum_{t=1}^{n-j-1}\frac{m-i-s}{m}\frac{n-j-t}{n}\mathsf{cov}_a(s,t), \quad (59)$$

где

$$\mathsf{cov}_a(s,t) = \mathsf{cov}_a\left(J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big],\right. \\ \left. J_2(F(\varepsilon_{k-i-s,l-j-t}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{k-s,l-t}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{k-s,l-t}(a^0)))\Big]\right).$$

Дисперсия в (59), совпадающая с $\mathsf{cov}_a(0,0)$, стремится к нулю по вероятности, поскольку

$$\mathsf{D}_a\left(J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]\right) \le \\ \le \mathsf{E}_a\left(J_2^2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{k,l}(a^0)))\Big]^2\right) \le \\ \le C_1\mathsf{E}_a\Big[J_2^2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\big(\varepsilon_{kl}(a) - \varepsilon_{kl}(a^0)\big)^2\Big] \le \\ \le \frac{C_2}{mn}\mathsf{E}_a\Big[|b^T\tilde{X}_{kl}|^2 J_2^2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big] \to 0.$$

Поэтому по вероятности P_a

$$\mathsf{D}_a(S_2^*) \to 0, \quad \mathsf{cov}_a(0,0) \to 0, \quad m,n \to \infty.$$

Поскольку поле X_{ij} удовлетворяет условию сильного перемешивания с экспоненциально убывающим коэффициентом сильного перемешивания, то (см. [12, lemma 2.1]) поле

$$J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0)))\Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^0)))\Big]$$

также удовлетворяет условию сильного перемешивания с экспоненциально убывающим коэффициентом сильного перемешивания. Поэтому (см., например, [13, lemma 1]) для некоторого $\gamma \in (0,1)$

$$|\mathsf{cov}_a(s,t)| \le 4|\mathsf{cov}_a(0,0)\gamma^{s+t}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{s=1}^{m-i-1}\sum_{t=1}^{n-j-1}\frac{m-i-s}{m}\frac{n-j-t}{n}\mathsf{cov}_a(s,t)\right| \le \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}|\mathsf{cov}_a(s,t)| \le$$
$$\le 4\mathsf{cov}_a(0,0)\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^{s+t} \to 0, \quad m,n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого $b_0 > 0$ при $m,n \to \infty$

$$\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(z_{ij}^g(a) - z_{ij}^g(a^0)\right) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a)\right| = o_p(1),$$

где a и b связаны соотношением

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Разобьем куб

$$B = \{b \in \mathbb{R}^3 : |b| \le b_0\}$$

на равные кубики с ребром длины ε и сторонами, параллельными координатным осям. Для любого $b \in B$ обозначим через b^* ближайшую к началу координат вершину кубика (обозначим его через B^*), содержащего b.

Из леммы 2 следует, что для $a^* = a^0 + \dfrac{b^*}{\sqrt{mn}}$

$$\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(z_{ij}^g(a^*) - z_{ij}^g(a^0)\right) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b^*,a^*)\right| = o_p(1). \qquad (60)$$

Для произвольного кубика B^*

$$\sup_{b\in B^*}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(z_{ij}^g(a^*) - z_{ij}^g(a)\right) - \Big(I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b^*,a^*) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a)\Big)\right|, \qquad (61)$$

где

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}},$$

$$S_1 = \sup_{b \in B^*} |I_1(F,G) I_2(F,G) d_{ij}(b^*, a^*) - I_1(F,G) I_2(F,G) d_{ij}(b,a)| \le S_1 + S_2, \qquad (62)$$

$$S_2 = \sup_{b \in B^*} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z^g_{ij}(a^*) - z^g_{ij}(a) \right) \right| =$$

$$= \sup_{b \in B^*} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \Big(J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^*)))\, J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*))) - \right.$$

$$\left. - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a)))\, J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a))) \Big) \right|.$$

В свою очередь $S_2 \le S_{21} + S_{22}$, где

$$S_{21} = \sup_{b \in B^*} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \Big[J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^*))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) \Big] J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*))) \right|,$$

$$S_{22} = \sup_{b \in B^*} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \Big[J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*))) - J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a))) \Big] J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) \right|.$$

Из (57) следует, что для некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$

$$\Big| J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^*))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) \Big| \le C_1 |\varepsilon(a^*) - \varepsilon(a)| \le \frac{C_2}{\sqrt{mn}} |(b^* - b)^T \tilde{X}_{kl}|.$$

Заметим также, что

$$|J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*)))|^2 \le 2 \Big[J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*))) - J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0))) \Big]^2 + 2 J_2^2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^0))).$$

Поэтому, применяя неравенство Коши — Буняковского, получим, что для некоторых постоянных $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$

$$\mathsf{E}[\max_{B^*}(S_{21})] \le \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \mathsf{E}\Big[\Big| J_1(F(\varepsilon_{kl}(a^*))) - J_1(F(\varepsilon_{kl}(a))) \Big| \Big| J_2(F(\varepsilon_{k-i,l-j}(a^*))) \Big| \Big] \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{mn}} mn \frac{C_3}{\sqrt{mn}} |b^* - b| \le C_4 \varepsilon. \qquad (63)$$

Аналогично получаем, что для некоторой постоянной $C_5 > 0$

$$\mathsf{E}[\max_{B^*}(S_{22})] \le C_5 \varepsilon. \qquad (64)$$

Таким образом, из (61)–(64) вытекает, что при $m, n \to \infty$

$$\max_{B^*} \sup_{b \in B^*} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z^g_{ij}(a^*) - z^g_{ij}(a) \right) - \right.$$

$$\left. - \Big(I_1(F,G) I_2(F,G) d_{ij}(b^*, a^*) - I_1(F,G) I_2(F,G) d_{ij}(b,a) \Big) \right| = o_p(1).$$

Отсюда и из (60) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Для любого $b_0 > 0$ и $a = a^0 + \dfrac{b}{\sqrt{mn}}$ при $m, n \to \infty$

$$\sup_{|b|\le b_0} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g(R(a)) - z_{ij}^g(a) \right) \right| = o_p(1).$$

Доказательство. Так как для $a = a^0 + \dfrac{b}{\sqrt{mn}}$ в силу контигуальности

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g(R(a)) - z_{ij}^g(a) \right) = o_p(1),$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\sup_{\substack{|b|\le b_0 \\ |\varepsilon|\le\varepsilon_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g \left(R \left(a + \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}} \right) \right) - z_{ij}^g(R(a)) \right) \right| = o_p(1) \tag{65}$$

и

$$\sup_{\substack{|b|\le b_0 \\ |\varepsilon|\le\varepsilon_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g \left(a + \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}} \right) - z_{ij}^g(a) \right) \right| = o_p(1) \tag{66}$$

при $m, n \to \infty$ и $\varepsilon_0 \to 0$. Докажем сначала (65). Обозначим для краткости $a_1 = a + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(z_{ij}^g(R(a_1)) - z_{ij}^g(R(a)) \right) \right| = \\ &\qquad = \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \left[J_1 \left(\frac{R_{kl}(a_1)}{mn+1} \right) J_2 \left(\frac{R_{k-i,l-j}(a_1)}{mn+1} \right) - \right. \right. \\ &\qquad\qquad \left. \left. - J_1 \left(\frac{R_{kl}(a_1)}{mn+1} \right) J_2 \left(\frac{R_{k-i,l-j}(a_1)}{mn+1} \right) \right] \right| \le S_1 + S_2, \end{aligned}$$

где

$$S_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \left[J_1 \left(\frac{R_{kl}(a_1)}{mn+1} \right) - J_1 \left(\frac{R_{kl}(a)}{mn+1} \right) \right] J_2 \left(\frac{R_{k-i,l-j}(a_1)}{mn+1} \right) \right|,$$

$$S_2 = \left| \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \left[J_2 \left(\frac{R_{k-i,l-j}(a_1)}{mn+1} \right) - J_2 \left(\frac{R_{k-i,l-j}(a)}{mn+1} \right) \right] J_1 \left(\frac{R_{kl}(a_1)}{mn+1} \right) \right|.$$

Оценим S_1. Обозначим через $\hat{F}_{mn}(x, a)$ — эмпирическую функцию поля $\varepsilon_{st}(a)$.

$$\hat{F}_{mn}(x, a) = \frac{1}{mn} (\text{число } \varepsilon_{kl}(a), (k, l) \le (m, n), \text{меньших, либо равных } x).$$

Заметим, что

$$R_{ij}(a) = mn\hat{F}_{mn}(\varepsilon_{ij}(a), a).$$

Из ограниченности и липшициевости J_1 и J_2 следует, что для некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$S_1 \le \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} \left| \hat{F}_{mn}(\varepsilon_{kl}(a_1), a_1) - \hat{F}_{mn}(\varepsilon_{kl}(a), a) \right|.$$

Из [14, p. 215] следует, что для любого $b_0 > 0$ для $a = a^0 + \dfrac{b}{\sqrt{mn}}$

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\|b|\le b_0}} \sqrt{mn}\left|\hat F_{mn}(x,a) - \hat F_{mn}(x,a^0)\right| = o_p(1), \quad m,n\to\infty.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{|b|\le b_0\\|\varepsilon|\le\varepsilon_0}} (S_1) = o_p(1), \quad m,n\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sup_{\substack{|b|\le b_0\\|\varepsilon|\le\varepsilon_0}} (S_2) = o_p(1), \quad m,n\to\infty,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. Для любого $b_0 > 0$ при $m,n\to\infty$

$$\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(z^g_{ij}(R(a)) - z^g_{ij}(R(a^0))\right) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a)\right| = o_p(1),$$

где a и b связаны соотношением

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}.$$

Доказательство. Из лемм 3 и 4 вытекает, что

$$\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(z^g_{ij}(R(a)) - z^g_{ij}(R(a^0))\right) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a)\right| \le$$

$$\le \sup_{|b|\le b_0}\Bigg|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(a) - z^g_{ij}(a^0)\Big) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(R(a)) - z^g_{ij}(a)\Big) - \frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(R(a^0)) - z^g_{ij}(a^0)\Big)\Bigg| \le$$

$$\le \sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(a) - z^g_{ij}(a^0)\Big) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{ij}(b,a)\right| +$$

$$+\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(R(a)) - z^g_{ij}(a)\Big)\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(z^g_{ij}(R(a^0)) - z^g_{ij}(a^0)\Big)\right| = o_p(1).$$

Лемма 6. Для любого $b_0 > 0$ при $m,n\to\infty$

$$\sup_{|b|\le b_0}\left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(w^g(a,R(a)) - w^g(a^0,R(a^0))\Big) - I_1(F,G)I_2(F,G)\mathcal{K}b\right| = o_p(1),$$

где a и b связаны соотношением

$$a = a^0 + \frac{b}{\sqrt{mn}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(w^g(a,R(a)) - w^g(a^0,R(a^0))\Big) - I_1(F,G)I_2(F,G)\mathcal{K}b =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\Big(\delta_{ij}(a)z^g_{i+p,j+q}(R(a)) - \delta_{ij}(a^0)z^g_{i+p,j+q}(R(a^0))\Big) -$$
$$- I_1(F,G)I_2(F,G)\mathcal{K}b = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\delta_{ij}(a^0)\Big(z^g_{i+p,j+q}(R(a)) - z^g_{i+p,j+q}(R(a^0)) - I_1(F,G)I_2(F,G)d_{i+p,j+q}(b,a)\Big),$$
$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\Big(\delta_{ij}(a) - \delta_{ij}(a^0)\Big)I_1(F,G)I_2(F,G)d_{i+p,j+q}(b,a),$$
$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\Big(\delta_{ij}(a) - \delta_{ij}(a^0)\Big)z^g_{i+p,j+q}(R(a)).$$

По лемме 5 с учетом (44) $\sup\limits_{|b|\le b_0}|S_1| = o_p(1)$ при $m,n\to\infty$.

Известно [10], что при выполнении (20) коэффициенты $\delta_{ij}(a)$ дифференцируемы по a, причем существуют постоянные $\alpha\in(0,1)$ и $C>0$, что для всех $(i,j)\ge(0,0)$

$$\left|\frac{\partial\delta_{kl}(a)}{\partial a_{\alpha\beta}}\right| \le C\alpha^{k+l}.$$

Поэтому по теореме о среднем получим, что

$$\big|\delta_{ij}(a) - \delta_{ij}(a^0)\big| \le \frac{Cb_0\alpha^{i+j}}{\sqrt{mn}}. \tag{67}$$

Отсюда следует, что $\sup_{|b|\le b_0}|S_2| = o_p(1)$ при $m,n\to\infty$. Из [1, лемма 1] следует, что для некоторой постоянной $C>0$

$$\mathsf{E}\big|z^g_{ij}(R(a))\big|^2 \le Cmn.$$

Отсюда, из (67) и неравенство Коши — Буняковского вытекает, что

$$\mathsf{E}_a|S_3| \le \frac{C_2}{\sqrt{mn}}\frac{b_0}{\sqrt{mn}}\sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\alpha^{i+j}\mathsf{E}_a\Big|z^g_{i+p,j+q}(R(a))\Big| \le$$
$$\le \frac{C_3}{mn}\max_{ij}\sqrt{\mathsf{E}\Big|z^g_{ij}(R(a))\Big|^2} \le \frac{C_4}{\sqrt{mn}} \to 0 \quad \text{при} \quad m,n\to\infty$$

для некоторых постоянных $C_2>0$, $C_3>0$ и $C_4>0$. Следовательно, в силу неравенства Чебышева $\sup_{|b|\le b_0}|S_3| = o_p(1)$ при $m,n\to\infty$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 6. Покажем сначала, что

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(\hat{a}_{mn}, R(\hat{a}_{mn})) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)) + I_1(F,G) I_2(F,G) \mathcal{K} \sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0) + o_p(1). \quad (68)$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $b_0 > 0$ с учетом $\sqrt{mn}$-состоятельности $\hat{a}_{mn}$ из формулы полной вероятности следует, что

$$\mathsf{P}\Bigg\{\Bigg|\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(\hat{a}_{mn}, R(\hat{a}_{mn})) - \frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)) -$$
$$- I_1(F,G) I_2(F,G) \mathcal{K} \sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0) > \varepsilon\Bigg|\Bigg\} \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(\hat{a}_{mn}, R(\hat{a}_{mn})) - \frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - I_1(F,G) I_2(F,G) \mathcal{K} \sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0) > \varepsilon \Big| \sqrt{mn}|\hat{a}_{mn} - a^0| \leq b_0)\right|\right\} +$$
$$+ \mathsf{P}\Big\{\sqrt{mn}|\hat{a}_{mn} - a^0| > b_0\Big\} \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left\{\sup_{|b| \leq b_0} \left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(w^g(a, R(a)) - w^g(a^0, R(a^0))\Big) - I_1(F,G) I_2(F,G) \mathcal{K} b\right| > \varepsilon\right\} +$$
$$+ \mathsf{P}\Big\{\sqrt{mn}|\hat{a}_{mn} - a^0| > b_0\Big\} \to 0, \quad m, n \to \infty,$$

что доказывает (68).

Так как функции J_1 и J_2 ограничены, то ограничены и метки (21). Следовательно, скачки функции $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a, R(a))$ с вероятностью 1 не превышают $\frac{C}{\sqrt{mn}}$, где $C > 0$ — некоторая постоянная. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(\hat{a}_{mn}, R(\hat{a}_{mn})) \to 0, \qquad m, n \to \infty.$$

Отсюда и из (68) следует, что

$$\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0) = \mathcal{K}^{-1} \frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0)) \frac{1}{I_1(F,G) I_2(F,G)} + o_p(1).$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma_g^2 I(g) \mathcal{K}$, то

$$\frac{1}{I_1(F,G) I_2(F,G)} \mathcal{K}^{-1} \frac{1}{\sqrt{mn}} w^g(a^0, R(a^0))$$

а, стало быть, и $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\frac{\sigma_g^2 I(g)}{I_1^2(F,G) I_2^2(F,G)} \mathcal{K}^{-1}.$$

Теорема доказана.

8. Выводы

В работе найден вид асимптотически локально наиболее мощных ранговых критериев проверки гипотез о коэффициентах уравнения авторегрессионного поля, основанных на приближенных ранговых метках. Статистики критериев при нулевой гипотезе свободны от распределения обновляющего поля, доказана их асимптотическая нормальность. На основе полученных критериев определены ранговые оценки параметров авторегрессионного поля, доказана их состоятельность и асимптотическая нормальность.

Список литературы

1. Горяинов В.Б. Идентификация пространственной авторегрессии ранговыми методами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 82–95.
2. Hodges J.L.Jr., Lehmann E.L. Estimates of location based on rank tests // Ann. Math. Stat. 1963. Vol. 34, no. 2. P. 598–611.
3. Koul H.L., Saleh A.K.Md.E. R-estimation of the parameters of autoregressive AR(p) models // The Annals of Statistics. 1993. Vol. 21, no. 1. P. 534–551.
4. Allal J., Kaaouachi A., Paindaveine D. R-estimation for ARMA models // Journal of Nonparametric Statistics. 2001. Vol. 13. P. 815–831.
5. Andrews B. Rank-based estimation for autoregressive moving average time series models // J. Time Ser. Anal. 2008. Vol. 29, no. 1. P. 51–73.
6. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев: пер. с англ. М.: Наука, 1971. 376 с.
7. Hallin M., Werker B.J.M. Optimal testing for semi-parametric AR models: from Gaussian Lagrange multipliers to autoregression rank scores and adaptive tests // Asymptotic Nonparametrics and Time Series / S. Ghosh (ed.). New York: Marcel Dekker, 1999. P. 295–350.
8. Bantli F.E., Hallin M. Asymptotic Behaviour of M-Estimators in AR(p) Models under Nonstandard Conditions // The Canadian Journal of Statistics. 2001. Vol. 29, no. 1. P. 155–168.
9. Hajek J., Shidak Z., Sen P.K. Theory of rank tests. San Diego: Academic Press, 1999. 450 p.
10. Basu S., Reinsel G.C. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model // Advances in Applied Probability. 1993. Vol. 25, no. 3. P. 631–648.
11. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Физматлит, 1965. 525 с.
12. White H., Domowitz I. Nonlinear regression with dependent observations // Econometrica. 1984. Vol. 52. P. 143–162.
13. Yoshihara K.I. Limiting behavior of V-statistics for stationary, absolutely regular processes // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 1976. Vol. 35, no. 3. P. 237–252.
14. Koul H.L. Weighted empiricals and linear models. Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics, 1992. 264 p. (Lecture Notes-Monograph Series, vol. 21).

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Rank analysis of random fields

03, March 2013
DOI: 10.7463/0313.0541592

Goryainov V. B.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
vb_goryainov@mail.ru

In this article the process of two-dimensional autoregression of (1,1) order is considered. Distribution of the renovating field of the autoregressive model is assumed to be unknown. The author found the asymptotically locally most powerful tests for verifying the hypotheses about coefficients of the autoregressive field, based on the approximate rank index marks. Estimation of the autoregressive model parameters based on the ranks of observation residuals was build. Consistency and asymptotic normality of these estimations was proved. The conclusion was drawn on the advantage of the constructed estimation over the least squares estimation if the renovating field has normal logistic and double exponential distribution, while rank index marks correspond to Gaussian density.

References

1. Goriainov V.B. Identifikatsiia prostranstvennoi avtoregressii rangovymi metodami [Identification of a spatial autoregression by rank methods]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2011, no. 5, pp. 82–95. (Trans. version: *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 5, pp. 975–988. DOI: 10.1134/S0005117911050067)
2. Hodges J.L.Jr., Lehmann E.L. Estimates of location based on rank tests. *Ann. Math. Stat.*, 1963, vol. 34, no. 2, pp. 598–611.
3. Koul H.L., Saleh A.K.Md.E. R-estimation of the parameters of autoregressive AR(p) models. *The Annals of Statistics*, 1993, vol. 21, no. 1, pp. 534–551.
4. Allal J., Kaaouachi A., Paindaveine D. R-estimation for ARMA models. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2001, vol. 13, pp. 815–831.
5. Andrews B. Rank-based estimation for autoregressive moving average time series models. *J. Time Ser. Anal.*, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 51–73.
6. Hajek J., Sidak Z., Sen P.K. *Theory of Rank Tests*. New York, Academic Press, 1967. (Russ. ed.: Gaek Ia., Shidak Z. *Teoriia rangovykh kriteriev*. Moscow, Nauka, 1971. 376 p.).

7. Hallin M., Werker B.J.M. Optimal testing for semi-parametric AR models: from Gaussian Lagrange multipliers to autoregression rank scores and adaptive tests. In book: Ghosh S., ed. *Asymptotic Nonparametrics and Time Series*. New York, Marcel Dekker, 1999. P. 295–350.
8. Bantli F.E., Hallin M. Asymptotic Behaviour of M-Estimators in AR(p) Models under Non-standard Conditions. *The Canadian Journal of Statistics*, 2001, vol. 29, no. 1, pp. 155–168.
9. Hajek J., Shidak Z., Sen P.K. *Theory of rank tests*. San Diego, Academic Press, 1999. 450 p.
10. Basu S., Reinsel G.C. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model. *Advances in Applied Probability*, 1993, vol. 25, no. 3, pp. 631–648.
11. Ibragimov I.A., Linnik Iu.V. *Nezavisimye i statsionarno sviazannye velichiny* [Independent and stationary connected values]. Moscow, Fizmatlit, 1965. 525 p.
12. White H., Domowitz I. Nonlinear regression with dependent observations. *Econometrica*, 1984, vol. 52, pp. 143–162.
13. Yoshihara K.I. Limiting behavior of V-statistics for stationary, absolutely regular processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 1976, vol. 35, no. 3, pp. 237–252.
14. Koul H.L. *Weighted empiricals and linear models*. Hayward, CA, Institute of Mathematical Statistics, 1992. 264 p. (*Lecture Notes-Monograph Series*, vol. 21).