электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 531.01/534.112

Об устойчивости малых колебаний свободной поверхности жидкости

Э.Х. Шунгаров, Д.А. Гончаров

Студент,кафедра «Холодильная, криогенная техника, системы кондиционирования и жизнеобеспечения»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Пожалостин А.А., д.т.н., профессор кафедры «Теоретическая механика»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э.Баумана
schungarov.eduard@yandex.ru

В данной работе обсуждается вопрос об устойчивости осесимметричных колебаний свободной поверхности жидкости в жесткой цилиндрической оболочке (Рис. 1) .

Устойчивость колебаний жидкости нарушается из-за наступления эффекта невесомости, в состояние которого попадает бак с жидкостью.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а её движение малое, потенциальное, с постоянной скоростью ϕ.

Колебания жидкости по первому тону заменяются механическим аналогом, в виде линейного осциллятора. При этом постулируется равенство частот механического аналога и частоты колебаний свободной поверхности жидкости в баке (Рис. 2).

Предполагается, что на осциллятор действует сила тяготения по закону Ньютона $F_{тяг} = \frac{k}{r^2}$, где $k = mgR_З^2$ и переносная сила инерции от вращения Земли. Колебания осциллятора рассматриваются в системе отсчета, связанной с вращательным движением Земли. Сила инерции Кориолиса не влияет, поскольку её направление перпендикулярно оси колебаний осциллятора (считается, что он находится в гладком стакане), которая направлена по вертикали.

В результате решения задачи получено выражение для величины высоты подъема h осциллятора, при которой его частота колебаний становится равной нулю.

Это означает, что состояние свободной поверхности жидкости в баке становится неустойчивым. При этом жидкая масса взрывается, и объем жидкости отделяется от стенок бака и распадается частично на ряд жидких сферических объектов (Рис. 3).

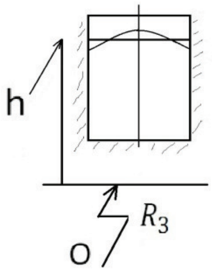

Рис. 1. Цилиндрический бак с жидкостью

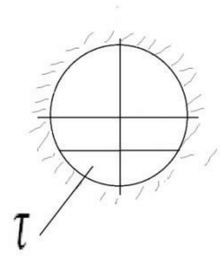

Рис. 2. Сферическая полость, частично заполненная жидкостью

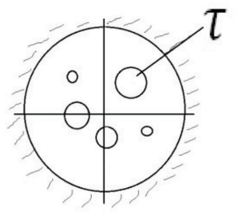

Рис. 3. Конфигурации жидкого объема в невесомости

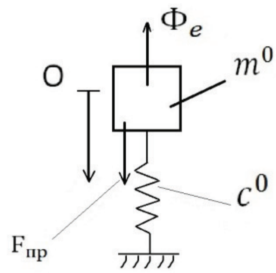

Рис. 4. Механический аналог цилиндрического бака с жидкостью

В случае решается задачи о колебаниях жидкости в баке с учетом поверхностного натяжения, но без учета переменной силы тяжести и переносной силы инерции, получить данный эффект можно, считая B_0 (число Бонда) отрицательным.

Для величины $h_{кр}$ (критическая высота бака надо поверхностью Земли) получено аналитическое решение в простейшем случае.

Рассмотрим малые колебания осциллятора массы m^0 и упругого элемента жесткости C^0 находящегося на высоте h над поверхностью Земли радиуса $R_З$ (Рис. 4). На массу действует сила притяжения $F_{пр}$по закону Ньютона.

$$F_{пр} = \frac{k}{r^2}, \text{ где } k = m^0 g R_З^2 \tag{1}$$

Кроме этого надо учесть переносную силу инерции от вращения Земли $\omega_з = \frac{2\pi}{24 часа}$. Пусть осциллятор находится на экваторе, тогда

$$\Phi_e = m^0(R_з + h)\omega_з^2. \tag{2}$$

С учетом сказанного уравнение колебаний массы m^0будет:

$$m^0\ddot{y} = \frac{m^0 R_з^2}{(R_з+h-y)^2} - k^0 y + (R_з + h - y)m^0\omega_з^2 \tag{3}$$

Здесь y относительная координата, отсчитывается от состояния равновесия. Сила инерции Кориолиса не даст проекции на ось y. Обозначим $R + h = R^*$, $m^0 g R_з^2 = \beta$ и разложим силу притяжения $F_{пр}$ параметра y.

$$F_{пр} = \frac{\beta}{(R^*-y)^2} = \frac{\beta}{R^*} + y\frac{2\beta}{{R^*}^3} + \cdots \tag{4}$$

С учетом (4) дифференциальное уравнение осциллятора будет:

$$m\ddot{y} = \frac{\beta}{R^*} + y\frac{2\beta}{{R^*}^3} - k^0 y + (R^* - y)m^0\omega_з^2 \tag{5}$$

Постоянные слагаемые в дальнейшем (использую замену переменных) не учитываем. Итак, имеем:

$$m^0\ddot{y} + \left(k^0 - \frac{2\beta}{{R^*}^3}\right)y + m^0\omega_з^2 y = 0 \tag{6}$$

Так как $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$,то $\omega = 0$ будет, если

$$k^0 + m^0\omega_з^2 - \frac{2\beta}{{R^*}^3} = 0$$

В качестве простейшего примера рассмотрим свободные колебания жидкости в жестком цилиндрическом баке и определим m^0 и k^0: $m^0 = m_1^0$, $k^0 = m_1^0\omega_1^2$.Здесь m_1^0 – приведенная масса первого тона колебаний жидкости в баке, ω_1 - частота свободных осесимметричных колебаний поверхности первого тона.

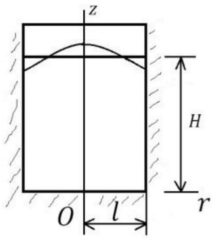

Рис. 5. Цилиндрический бак с жидкостью,
заполненный на высоту H

На рис. 5 представлен цилиндрический бак с жидкостью, заполненный на высоту H. Потенциал скорости частиц жидкости для случая осесимметрических колебаний примем в виде [ ]:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i \cosh\left(\mu_i \frac{z}{R}\right) + B_i \sinh\left(\mu_i \frac{z}{R}\right)\right] J_0\left(\mu_i \frac{z}{R}\right)\cos\omega t \tag{7}$$

В дальнейшем временной множитель не учитываем .

Выполняя условие не протекания - $\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{n}}|s = 0$ (8)

$\bar{n}$ − внешняя нормаль к поверхности бака, S – смоченная поверхность цилиндра, получим:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cosh\left(\mu_i \frac{z}{R}\right) J_0\left(\mu_i \frac{z}{R}\right)\cos\omega t \tag{9}$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости :

$$-\omega^2\Phi_{\mathrm{z=H}} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=H} = 0, \tag{10}$$

g − ускорение свободного падения, ω − частота свободных колебаний.

Учитывая в (1), только один член ряда, получим

$$\omega^2 = g\frac{\mu_1}{R}\tanh\left(\mu_1\frac{H}{R}\right) \tag{11}$$

Для простоты счета $\tanh\left(\mu_1\frac{H}{R}\right) \cong 1$, если $\frac{H}{R} \gg 1$.

μ_1 − определяется из решения трансцендентного уравнения.

$\frac{dJ_0(\mu_1)}{dz} = 0$ или $J_1(\mu_1) = 0$, величина μ_1 равна [ ]: $\mu_1 = 3{,}83$.

Обозначим $\overline{\omega}^2 = \omega^2 \frac{R}{g}$ и из (5) имеем: $\overline{\omega}_1 = 1{,}95 -$ безразмерная частота первого тона колебаний.

Кинетическая энергия бака [ ]:

$$T = \frac{\rho}{2} \oiint_S \Phi\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} dS \tag{12}$$

или

$$T = \frac{\rho}{2}\left[\int_0^R \mathrm{J}_0^2\left(\mu_1 \frac{z}{R}\right) z\, dz\right] 2\pi \cosh \beta_1 (\sinh \beta_1) \frac{\mu_1}{R}, \tag{13}$$

где $\beta_1 = \mu_1 \frac{H}{R}$.

Обозначим $I_1 = \int_0^R J_0^2\left(\mu_1 \frac{z}{R}\right) z\mathrm{dz} = \frac{R^2}{2} J_0^2(\mu_1)$. Тогда (7) будет [ ].

$T' = \frac{1}{2} m_1^0 \dot{s}^2$, $m_1^0 -$ приведенная масса осциллятора 1-го тона колебаний

$m_1^0 = 2\pi\rho I_1 \frac{\mu_1}{R} \cosh \beta_1 \sinh \beta_1$. $\omega_1^2 = 3{,}83 \frac{g}{R}$. Поэтому $K_1^0 -$ приведенная жесткость осциллятора. $K_1^0 = m_1^0 \omega_1^2$.

С учетом вышеизложенного условие устойчивости будет:

$$K_1^0 + m_1^0 \omega_3^2 - \frac{2\beta}{R^{*3}} = 0\,, \beta = mgR^2 \tag{14}$$

или

$$m_1^0\left(\omega_{1_{\text{ж}}}^2 + \omega_3^2\right) - \frac{2mgR^2}{(R+h)^3} = 0\,,$$

где $\omega_{1_{\text{ж}}}^2 = \mu_1 \frac{g}{R}$.

$$m_1^0 = 2\pi\rho I_2 \frac{\mu_1}{R} \cosh \lambda_1 \sinh \lambda_1$$

Пусть $(R+h)^3 = C_1$, где $C_1 = \frac{2mgR^2}{m_1^0\left(\omega_{1_{\text{ж}}}^2 + \omega_3^2\right)}$.

Тогда $(R+h)^3 = C_1$ и $h_{\text{кр}} = \frac{\sqrt[3]{C_1}}{R}$.

Список литературы

1. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидродинамика, ч. 1. ГФМЛ. М, 1963
2. В.В.Добронравов, Н.Н.Никитин, А.Л.Дворников. Курс теоретической механики
3. К.С.Колесников Динамика ракет. Машиностроение. М, 1980
4. Е.Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. Наука. М, 1964