

УДК 519.6

**Математическое моделирование упругопластического деформирования
толстостенной трубы**

Е.С. Дмитриева

*Студент, кафедра «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: Родин А.С., к. ф.-м. н., научный сотрудник
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия*

МГТУ им. Н.Э. Баумана

lossien@mail.com

Введение

Расчеты в области пластичности имеют большое значение в машиностроении. Например, при проектировании часто приходится рассматривать деформацию за пределами упругой области с целью выявить дополнительные прочностные ресурсы конструкции.

В теории пластичности ставится задача определения напряжений и перемещений в деформируемом теле за пределами упругости; предполагается, что при постоянных нагрузках деформации не зависят от времени.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31193).

Постановка задачи

Имеется цилиндрическая труба с внутренним радиусом a , внешним радиусом b и длиной L , изготовленная из идеального упругопластического материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона μ , пределом текучести σ_T (рис. 1).

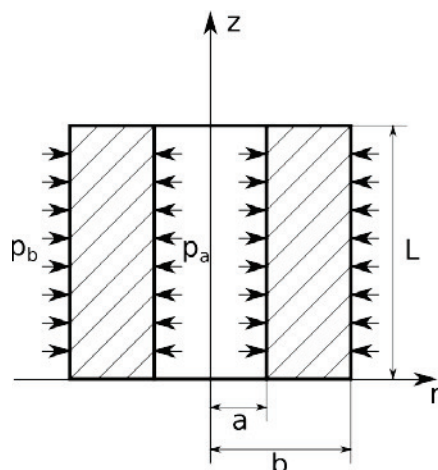


Рис. 1. Расчетная схема

На стенках и концах трубы может быть задано как давление p , так и перемещение $\vec{u}_0$.

Необходимо найти перемещения и напряжения в трубе.

Математическая модель деформирования твердого тела

Рассмотрим однородное тело вращения (осесимметричное тело), которое находится в условиях осесимметричного нагружения.

Если зафиксировать некоторую плоскость π , в которой лежит ось вращения l , то исследуемое тело геометрически можно охарактеризовать двумерной областью G , лежащей в плоскости π и ограниченной кусочно-гладкой границей δG .

Введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$, причем ось Oz совпадает с осью вращения l .

Геометрия тела и условия нагружения позволяют не учитывать при построении расчетных соотношений зависимость от окружной координаты φ , поэтому задача рассматривается в системе координат Orz . Отсюда любая точка $M \in G$ имеет координаты (r, z) .

Формулировка краевой квазистационарной задачи МДТТ в данном случае запишется так [1]:
уравнения равновесия

$$\nabla \vec{\sigma}(u, T) + \vec{Q}(M) = 0, \quad M \in G;$$

граничные условия (кинематические и силовые соответственно)

$$\vec{u}(M)|_{S_1} = \vec{u}_0(M), \quad M \in S_1 \subset \delta G;$$

$$\vec{\sigma}(M)\vec{n}|_{S_2} = \vec{p}(M), \quad M \in S_2 \subset \delta G;$$

соотношения Коши

$$\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{pmatrix}, \quad M \in G;$$

и определяющие уравнения – закон Гука в матричном виде:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = C^E \vec{\varepsilon} = C^E (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^0) = [C^E] \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_{rz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_z^0 \\ \varepsilon_\varphi^0 \\ \varepsilon_{rz}^0 \end{pmatrix} \right), \quad M \in G;$$

где $C^E = [C^E]$ – матрица упругих коэффициентов; $\vec{\sigma}$ – вектор напряжений, соответствующий тензору напряжений; $\vec{\varepsilon}$ – вектор полной деформаций, соответствующий тензору деформации; $\vec{\varepsilon}^0$ – вектор неупругих (в случае упругопластического тела – пластических) деформаций; $\vec{Q}$ – вектор массовой (объемной) силы; $\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} u(M) \\ v(M) \end{pmatrix}$ – вектор перемещений точек тела, $u(M)$ – перемещение в направлении оси Or , $v(M)$ – перемещение в направлении оси Oz ; $\vec{u}_0(M) = \begin{pmatrix} u_0(M) \\ v_0(M) \end{pmatrix}$ – вектор заданных перемещений точек поверхности S_1 ; $\vec{p}(M) = \begin{pmatrix} p_r(M) \\ p_z(M) \end{pmatrix}$ – вектор заданной распределенной нагрузки на поверхности S_2 .

Матрица Гука записывается в виде [3]

$$C^E = [C^E] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{1-\mu} \end{bmatrix},$$

где E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим далее две наиболее распространенные теории пластичности [1,2].

Теория пластического течения предполагает, что компоненты тензора приращений пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора тензора напряжений, причем верно соотношение

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} s_{ij},$$

где $\overline{d\varepsilon}_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij}^p de_{ij}^p}$ – интенсивность приращений пластических деформаций,

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений.

В деформационной теории пластичности подобное соотношение связывает компоненты тензора пластических деформаций с компонентам девиатора тензора напряжений:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} s_{ij},$$

где $\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}$ – интенсивность пластических деформаций.

Численные методы решения задач пластичности

Рассмотренная выше задача решается методом конечных элементов на прямоугольной сетке. Уравнение равновесия, записанное в слабой постановке, приводит к системе уравнений [4,5,6]

$$[K]\{U\} = \{R\}, \quad (1)$$

где $[K] = \int_V [B]^T [C^E] [B] dV$ – матрица жесткости, $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$; $\{U\}$ – вектор узловых значений перемещений; $\{R\}$ – вектор нагрузок, включающий в себя нагрузки, вызванные поверхностными и объемными силами, а также пластическими деформациями.

Метод переменных параметров упругости

При решении краевых квазистатических нелинейных задач МДТТ с использованием деформационной теории пластичности широкое применение нашёл метод переменных параметров упругости. Его идея заключается в том, что в уравнении (1) на каждой итерации формируется матрица $[K]$. В соответствии с этим методом в соотношениях деформационной теории вместо постоянных параметров материала используются переменные, вычисляемые по следующим формулам:

$$G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}, \quad E^* = \frac{3G^*}{1 + \frac{1-2\mu}{E} G^*}, \quad \mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{E} G^*}{1 + \frac{1-2\mu}{E} G^*} \quad (2)$$

Метод переменных параметров упругости реализуется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Принимается: $G^* = G$, $E^* = E$ и $\mu^* = \mu$.
2. Решается упругая задача.
3. По выбранному критерию проверяется сходимость решения; если требуемая точность достигнута, то решение завершается, в противном случае выполняется пункт 4.
4. Вычисляются σ_i^* и ε_i^* и проверяется условие возникновения пластических деформаций, например, $\sigma_i^* > \sigma_T$, где σ_T – предел текучести при растяжении. Если установлено возникновение пластических деформаций, то выполняется пункт 5, если пластических деформаций нет, решение завершается.
5. В точках тела, в которых установлено существование пластических деформаций, по диаграмме деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ определяется "теоретическое" значение σ_i , при этом принимается равенство $\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$.
6. По формулам (2) вычисляются новые значения переменных параметров упругости G^* , E^* и μ^* и выполняется переход к пункту 2.

Метод начальных деформаций

В методе начальных деформаций на каждой итерации происходит пересчет вектора правой части $\{R\}$ за счет возникающей пластической деформации.

$$\{U_{n+1}^{i+1}\} = \{U_n\} + [K]^{-1}(\{\Delta R\} + \{\Delta R_{\varepsilon^0}(\varepsilon^0)\}).$$

Здесь верхний индекс указывает номер итерации, а нижний – номер шага нагружения.

Алгоритм метода начальной деформации имеет следующий вид:

1. Задаётся приращение нагрузки $\{\Delta R\}$.
2. Формируется и решается уравнение

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta R\} + \beta\{\psi\}, \quad (3)$$

где $\{\psi\}$ – суммарный вектор невязки уравнений равновесия; β – весовой множитель ($\beta \geq 0$).

3. Вычисляются векторы приращений деформаций $\{\Delta \varepsilon\}$ и напряжений $\{\Delta \sigma\}$.
4. Анализируется напряжённо-деформированное состояние и делается переход к пункту 1, если выясняется, что все деформации являются упругими, или решение останавливается, если выполнены все шаги по нагрузке. В противном случае переход делается к пункту 5.
5. По выбранному критерию оценивается сходимость полученного упругопластического решения. Если решение сошлось, то либо выполняется переход к пункту 1, либо, при выполнении всех шагов по нагрузке, решение останавливается. Если решение не достигнуто, то на данном шаге по нагрузке корректируется вектор правой части $\{\Delta R\}$. Для этого в соответствии с выбранной теорией вычисляется приращение компонент пластической деформации:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_i^p}{\sigma_i},$$

где интенсивность пластической деформации ε_i^p определяется с помощью диаграммы деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i^p)$ по значению интенсивности напряжений σ_i , соответствующей вектору пробных напряжений $\{\sigma^*\} = \{\sigma\} + \{\Delta \sigma\}$.

6. Принимается, что приращение вектора фиктивной начальной деформации равно приращению вектора пластической деформации: $\{\Delta \varepsilon_H^e\} = \{\Delta \varepsilon^p\}$. Для каждого конечного элемента (e) вычисляется вектор накопленной начальной деформации

$$\{\varepsilon_H^e\} = \{\varepsilon_H^e\} + \{\Delta \varepsilon_H^e\}$$

и эквивалентный действию фиктивных начальных деформаций вектор узловых сил

$$\{R_\varepsilon^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [C^E] \{\varepsilon_H^{(e)}\} dV,$$

который затем соответствующим образом суммируется с исходным вектором приращения нагрузки $\{\Delta R\}$.

7. Решается уравнение (3) с новым вектором правой части и выполняется переход к пункту 5.

В качестве критерия сходимости можно принять условие $\{\Delta u_{k+1}\} \{\Delta u_k\} < \delta_u$, где k – номер итерации, δ_u – заданная точность.

Метод начальных напряжений

В отличие от метода начальных деформаций, корректировка правой части проводится исходя из полученного на предыдущей итерации значения напряжения.

$$\{U_{n+1}^{i+1}\} = \{U_{n+1}^i\} + [K]^{-1} (\{R\} - [K] \{U_{n+1}^i\}).$$

Алгоритм метода начальных напряжений имеет следующий вид:

1. Задаётся приращение нагрузки $\{\Delta R\}$. Задаётся $\{\psi\} = \{\Delta R\}$ и $\{\Delta U\} = \{0\}$, где $\{\psi\}$ – глобальный вектор невязки условия равновесия.

2. Формируется и решается уравнение

$$[K] \{\Delta V\} = \{\psi\},$$

где $\{\Delta V\}$ – приращение глобального вектора перемещений на итерациях внутри шага нагружения.]

3. Вычисляется глобальный вектор приращений перемещений на шаге нагружения $\{\Delta U\} = \{\Delta U\} + \{\Delta V\}$.

4. Для каждого конечного элемента (e) по вектору $\{\Delta U\}$ вычисляется вектор приращений напряжений $\{\Delta \sigma^{(e)}\}$, а затем определяется вектор "пробных" напряжений $\{\sigma^{*(e)}\} = \{\sigma^{(e)}\} + \{\Delta \sigma^{(e)}\}$, где $\{\sigma^{(e)}\}$ – достигнутый уровень напряжений.

5. Вычисляется глобальный вектор невязки условия равновесия

$$\{\psi\} = \{R\} - \sum_{e=1}^{K_e} [a^{(e)}] \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [C^{E(e)}] \{\varepsilon_H^{(e)}\} dV,$$

где $\{R\}$ – глобальный вектор достигнутой нагрузки.

6. По выбранному критерию оценивается сходимость решения. В качестве критерия сходимости может быть выбрано условие $\|\{\psi\}\| < \delta_\psi$, где δ_ψ – заданная точность.

7. Если решение на шаге нагружения получено, то выполняется очередной шаг по нагрузке, а если все шаги по нагрузке сделаны, решение всей задачи заканчивается. В том случае, если решение на шаге нагружения ещё не получено, делается переход к пункту (2), но при этом формирование уравнения не проводится, а выполняется только его решение.

Тестовая задача

В [1] рассмотрена толстостенная труба с заданными внутренним и внешним радиусами, нагруженная внутренним давлением p (см. Рис. 1).

Длину трубы предполагают достаточно большой для того, чтобы можно было считать, что осевое напряжение распределено по осевому сечению равномерно, а удерживающее влияние днищ на радиальные перемещения ничтожно мало.

Материал считается несжимаемым, то есть $\mu = \frac{1}{2}$.

Для данной постановки задачи упругопластичности получены аналитические формулы для распределения напряжений по толщине трубы:

в упругой области [1,5]

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_\varphi = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_z = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2; \end{cases}$$

в пластической области [1]

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 - 1 \right]; \\ \sigma_\varphi = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 + 1 \right]; \\ \sigma_z = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Здесь r_T – радиус зоны пластичности, определяемый из уравнения

$$\left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_T}{r_1} = 2 \ln \frac{r_2}{r_1} - \sqrt{3} \frac{p}{\sigma_T} + 1.$$

Для численных расчетов использованы следующие параметры задачи: внутренний радиус $a = 0.2$ м, внешний радиус $b = 0.3$ м, длина $L = 0.1$ м, начальное давление на внутреннем радиусе $p = 120$ МПа и изменяется с шагом $\Delta p = 30$ МПа, на внешнем – отсутствует. Характеристики материала: $E = 200$ ГПа, $\mu = 0.49$.

В таблицах 1 и 2 указаны следующие величины: h – шаг сетки, ε – относительная погрешность.

Далее приведены результаты вычислений при шаге сетки $h = 0.05$ м.

В таблице 1 указаны результаты для двух моментов времени: при $t = t_1$ $p = 150$ МПа и радиус пластичности $r_T \approx 0.219$ м; при $t = t_2$ $p = 180$ МПа и радиус пластичности $r_T \approx 0.263$ м.

Таблица 1

Сравнение методов

Метод	Кол-во	$\varepsilon(\sigma_r)$	$\varepsilon(\sigma_\varphi)$	Кол-во	$\varepsilon(\sigma_r)$	$\varepsilon(\sigma_\varphi)$
-------	--------	-------------------------	-------------------------------	--------	-------------------------	-------------------------------

	итераций			итераций		
	$t = t_1$			$t = t_2$		
Деформационная теория пластичности						
Переменных параметров упругости	4	5.794E-3	2.946E-3	12	6.758E-3	1.009E-2
Начальных деформаций	6	6.134E-3	2.764E-3	19	7.639E-3	9.127E-3
Начальных напряжений	6	6.824E-4	3.56E-4	19	9.222E-4	1.083E-3
Теория пластического течения						
Начальных деформаций	6	6.134E-3	2.495E-3	19	7.638E-3	9.128E-3
Начальных напряжений	6	6.824E-4	3.56E-4	19	9.221E-4	1.084E-3

Из таблицы 1 следует, что наименьшее количество итераций дает метод переменных параметров. Кроме того, в данной задаче теория пластического течения не дает существенных отличий от более простой деформационной теории пластичности.

На Рис. 2 и Рис. 3 представлены графики окружных и радиальных напряжений при давлении $p = 180 \text{ МПа}$. Названия графиков в легенде:

stress_rr_pars, stress_ff_pars – σ_r , σ_φ , радиальное и окружное напряжения, полученные методом переменных параметров,

stress_rr_defs, stress_ff_defs – σ_r , σ_φ , радиальное и окружное напряжения, полученные методом начальных деформаций,

stress_rr_strs, stress_ff_strs – σ_r , σ_φ , радиальное и окружное напряжения, полученные методом начальных напряжений,

stress_sol_r, stress_sol_f – σ_r , σ_φ , радиальное и окружное напряжения, аналитическое решение.

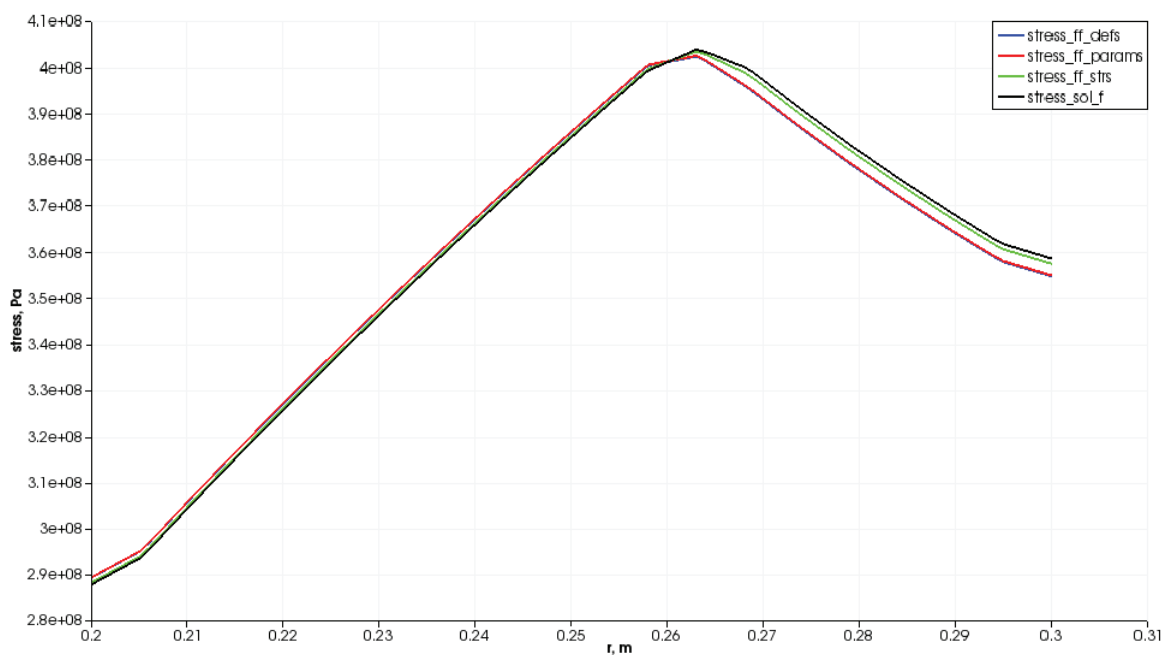


Рис. 2. Окружные напряжения

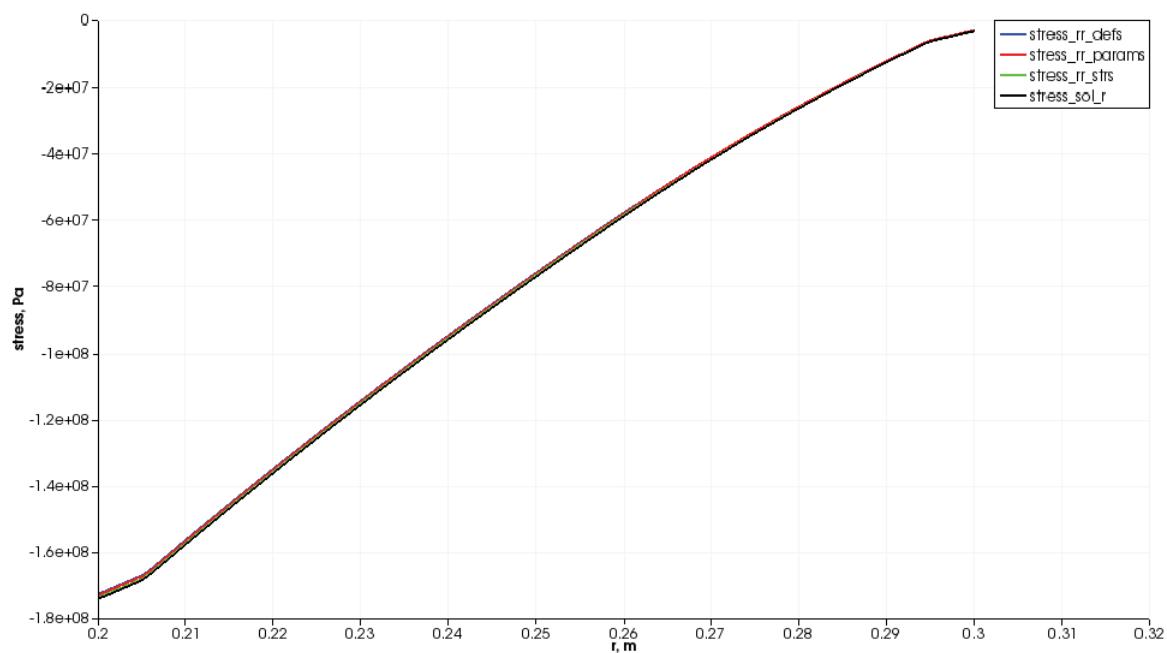


Рис. 3. Радиальные напряжения

На Рис. 2 можно отметить точку излома графика. Она соответствует границе пластических деформаций, область которых лежит слева от точки излома, в то время как область справа содержит только упругие деформации.

Метод начальных деформаций

Шаг	Кол-во итераций	$\varepsilon(\sigma_r)$	$\varepsilon(\sigma_\varphi)$
0.1	12	3.165E-2	3.434E-2
0.05	14	8.594E-3	1.067E-2
0.025	14	3.509E-3	4.586E-3

Для исследования характера сходимости численного решения проведены серии расчетов с использованием сгущающихся сеток. В таблице 2 показаны результаты для метода начальных деформаций. Видно, что имеет место сходимость: при уменьшении шага сетки погрешность уменьшается. Аналогичные результаты были получены для остальных рассмотренных методов.

Заключение

В данной работе рассмотрены математические модели теории пластичности. Приведены алгоритмы методов, позволяющих проводить расчёты в соответствии с рассмотренными теориями. Разработана программа на языке Fortran для решения осесимметричной задачи упругопластичности методом конечных элементов.

Для проверки программы просчитана тестовая задача с толстостенной трубой под действием внутреннего давления. Проведено сравнение результатов расчетов при использовании различных теорий и методов с аналитическим решением.

Список литературы

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
2. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твёрдых тел. – Новосибирск : Издательство СО РАН, 2000. – 262 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 591 с.
6. Семёнов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности: учеб.пособие. – СПб. : Издательство Политехнического университета, 2008. – 211 с.