НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Моделирование диэлектрических характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения

01, январь 2013
DOI: 10.7463/0113.0531682

Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Маркевич М. Н.

УДК 539.8

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
dimit@serv.bmstu.ru
alsokolo@bmstu.ru
mamarkevi@gmail.com

1. Введение

Проектирование композиционных материалов с заданными электромагнитными свойствами является важной технической проблемой. Данные материалы находят широкое применение в различных областях техники, в частности, используются в качестве современных пьезоэлементов, электроизоляционных конструкций [1, 2], радиопрозрачных и радиопоглощающих конструкций. Для математического моделирования характеристик композиционных материалов используюися различные приближенно-аналитические и численные методы. Наиболее перспективным является метод асимптотического осреднения (МАО) или «метод гомогенизации», основы которого разработаны в работах Э. Санчес-Паленсии [3], Бахвалова Н.С. [4], Победри Б.Е. [5] и других. Данный метод позволяет математически точно вычислять эффективные характеристики композитов с помощью решения специальных «локальных задач» на ячейках периодичности. Однако, аналитическое решение такого рода задач для композитов, обладающих сложной геометрической структурой, невозможно, а численное осложняется интегро-дифференциальной постановкой локальных задач с неклассическими краевыми условиями периодичности. Методика преобразования локальных задач к классическим краевым задачам с граничными условиями первого и второго рода предложена в работах [6-10]. В настоящей работе данная методика применяется для решения локальных задач электростатики, на основе которой расчитываются эффектиные тензоры диэлектической проницаемости композитов со сложными структурами армирования.

2. Метод асимптотического осреднения для задачи электростатики

Рассмотрим композиционный материал, занимающий в пространстве R^3 область V с поверхностью $\sum$. Рассматриваемая область V состоит из N фаз: $V_\alpha, \alpha = 1...N-1$ – наполнители (например, волокна), V_N – матрица. Введем обозначения: Σ_α - поверхности областей V_α, и $\Sigma_{\alpha N}$ - поверхности контакта матрицы и волокон, волокна полагаем не контактирующими между собой, $\Sigma_{\alpha e}$ - часть поверхности Σ композита, занятая α-ым компонентом (причем $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{\alpha e}$ - для волокон и $\Sigma_N = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{Ne}$ - для матрицы). Компоненты композита полагаем изотропными. В каждой области $V_\alpha, \alpha = 1...N$ рассмотрим следующую задачу электростатики, являющуюся следствием уравнений Максвелла [12] для установившихся электромагнитных колебаний:

$$\begin{cases} \partial_i D_i^{*\alpha} = 0, & x_i \in V_\alpha \\ D_i^{*\alpha} = \varepsilon^{*\alpha} E_i^{*\alpha}, & x_i \in V_\alpha \bigcup \sum_\alpha \\ E_i^{*\alpha} = \partial_i \varphi^{*\alpha}, & , x_i \in V_\alpha \\ \varphi^{*\alpha} = \varphi^{*N}, (D_i^{*\alpha} - D_i^{*N}) n_i = 0, x_i \in \sum_{\alpha N} \\ \varphi^{*\alpha} |_{\sum_{\alpha e}^{1}} = \varphi_e^*, D_i^{*\alpha} n_i |_{\sum_{\alpha e}^{2}} = D_e^{*\alpha}, x_i \in \sum_{\alpha N} \end{cases} \tag{1}$$

где $D_i^{*\alpha}$ – компоненты комплексной амплитуды вектора электрической индукции, $E_i^{*\alpha}$ – компоненты комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля, φ^* – комплексная амплитуда электрического потенциала, $\varepsilon^{*\alpha}$ – комплексная амплитуда диэлектрической проницаемости. Символ * обозначает, что рассматриваются амплитуды комплексных величин (например, комплексная амплитуда электрического потенциала $\varphi^{*\alpha} = \varphi'^{\alpha} + i\varphi''^{\alpha}$, где i – мнимая единица), соответствующие электромагнитным колебаниям с известной частотой ω. Все компоненты векторов отнесены к прямоугольной системе координат, ∂_i – дифференцирование по i-ой декартовой координате x_i.

Для применения МАО введем предположение о том, что композиционный материал обладает периодической структурой, область ячейки периодичности (ЯП) V_ξ которого состоит из фаз $V_{\xi\alpha}, \alpha = \overline{1, N}$, матрица является связанной областью. Поверхности раздела компонентов композита в ЯП обозначим через $\sum_{\xi\alpha\beta}$.Тогда можно ввести малый параметр $\kappa = \frac{l}{L} << 1$, и два типа безразмерных координат: $\bar{x}_i$ – глобальные и ξ_i –

локальные, которые определяются через декартовые координаты x_i следующими соотношениями

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L},\ \xi_i = \frac{\bar{x}_i}{\kappa} = \frac{x_i}{l},$$

где l - длина ребра ячейки периодичности, а L– характерный размер всего композита. Согласно общей концепции МАО функции $f = \{D_i^*, E_i^*, \varphi^*\}$ для композита рассматриваются как квазипериодические: $f(\bar{x}_i, \xi_j) = f(\bar{x}_i, \xi_j + a_j)$, $\bar{x}_i \in \bar{V}, \xi_j \in V_\xi$, где a_j- компонеты целочисленного вектора. Эти функции дифференцируются по правилу: $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} \to \varphi^*,_i + \frac{1}{\kappa}\varphi^*{}_{/i}$, где $\varphi,_i^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{x}_i}$, $\varphi_{/i}^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi_i}$. Тогда решение задачи (1) строится в виде асимптотического разложения:

$$\varphi^{*\alpha}(\bar{x}_i, \xi_j) = \varphi^{*\alpha(0)}(\bar{x}_i) + \kappa\varphi^{*\alpha(1)}(\bar{x}_i, \xi_j) + \kappa^2\varphi^{*\alpha(2)}(\bar{x}_i, \xi_j) + \ldots = \varphi^{*\alpha(0)}(\bar{x}_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\varphi^{*\alpha(n)}(\bar{x}_i, \xi_j)$$

$$E_i^{*\alpha} = \varphi^{*\alpha(0)},_i + \kappa\varphi,_i^{*\alpha(1)} + \kappa\frac{1}{\kappa}\varphi^{*\alpha(1)}{}_{/i} + \kappa^2\varphi,_i^{*\alpha(2)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n(\varphi^{*\alpha(n)},_i + \varphi^{*\alpha(n+1)}{}_{/i}) = \sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n E_i^{*\alpha(n)}, \quad (2)$$

$$D_i^{*\alpha} = \sum\kappa^n D_i^{*\alpha(n)},\ D_i^{*\alpha(n)} = \varepsilon^{*\alpha}E_i^{*\alpha(n)}, n \geq 0.$$

Векторы электической индукции и напряженности электрического поля «нулевого уровня» имеют вид

$$D_i^{*\alpha(0)} = \varepsilon^{*\alpha}E_i^{*\alpha(0)},$$
$$E_i^{*\alpha(0)} = \bar{E}_i^* + \varphi_{/i}^{*\alpha(1)}, \quad (3)$$
$$\bar{E}_i^* = \varphi_{,i}^{*\alpha(0)}.$$

Подставив (2) и (3) в задачу (1), получим следующую систему уравнений в нулевом приближении:

$$\begin{cases} D_{i/i}^{*\alpha(0)} = 0, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ D_i^{*\alpha(0)} = \varepsilon^{*\alpha}E_i^{*\alpha(0)}, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ E_i^{*\alpha(0)} = \bar{E}_i^* + \varphi_{/i}^{*\alpha(1)}, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ \varphi^{*\alpha(1)} = \varphi^{*N(1)}, (D_i^{*\alpha(0)} - D_i^{*N(0)})n_i = 0, & x_i \in \sum_{\xi\alpha N} \\ <\varphi^{*\alpha(1)}> = 0, [[D_i^{*(0)}]]n_i = 0, [[\varphi^{*\alpha(1)}]] = 0, & x_i \in \sum_{\xi\alpha N} \end{cases}, \quad (4)$$

здесь $D_i^{*\alpha(0)}, \varphi^{*\alpha(1)}$ – компоненты вектора электрической индукции и электрический потенциал фаз композита $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1,\ldots,N$ в рамках одной ЯП; $\bar{E}_i^* = \varphi_{,i}^{*\alpha(0)}$- компоненты эффективного вектора напряженности электрического поля; $<\varphi^{*(1)}>=0$ – условие нормировки, необходимое для единственности решения в классе периодических функций, где $<\varphi^{*\alpha(1)}>=\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{V_{\xi\alpha}}\varphi^{*\alpha(1)}dV_{\xi}$ – операция осреднения по «ячейке периодичности»; $[[\varphi^{*(1)}]]=0$, $[[D_i^{*(0)}]]n_i=0$ – условия периодичности для электрического потенциала $\varphi^{*(1)}$ и вектора электрической индукции $D_i^{*(0)}$. В силу периодичности функции $\varphi^{*(1)}$ имеет место соотношение: $\overline{E}_i^{*}=<E_i^{*\alpha(0)}>=\varphi_{,i}^{*\alpha(0)}$.

3. Преобразование локальной задачи к задачам «классического типа»

Решение задачи (4) будем искать в виде сумм

$$\varphi^{*\alpha(1)}=\sum_{p=1}^{3}\varphi_{(p)}^{*\alpha}\ , \qquad (5)$$

где $\varphi_{(p)}^{*\alpha}$ – функции следующего вида

$$\varphi_{(p)}^{*\alpha}=-\overline{E}_i^{*}\xi^{p}+\vartheta_{(p)}^{*\alpha}(\xi_k), \qquad (6)$$

здесь $\vartheta_{(p)}^{*\alpha}(\xi_k)$ – новые неизвестные функции от ξ_k, уже не являющиеся периодическими. Производные от функций (6) по локальным координатам имеют вид

$$\varphi^{*\alpha(1)}{}_{/i}=\sum_{p=1}^{3}\varphi_{(p)/i}^{*\alpha}=-\sum_{p=1}^{3}\overline{E}_i^{*}\delta_{ip}+\sum_{p=1}^{3}\vartheta_{(p)/i}^{*}=-\overline{E}_i^{*}+\sum_{p=1}^{3}\vartheta_{(p)/i}^{*}\ . \qquad (7)$$

Вычислим напряженность через потенциал, используя (7):

$$E_i^{*\alpha(0)}=\overline{E}_i^{*}+\varphi_{/i}^{*\alpha(1)}=\overline{E}_i^{*}-\overline{E}_i^{*}+\sum_{p=1}^{3}\vartheta_{(p)/i}^{*}=\sum_{p=1}^{3}\vartheta_{(p)/i}^{*}\ .$$

Отсюда получим, что напряженность $E_i^{*\alpha(0)}$, подобно потенциалу, представима в виде сумм

$$E_i^{*\alpha(0)}=\sum_{p=1}^{3}E_{i(p)}^{*\alpha}\ ,$$

где функции $E_{i(p)}^{*\alpha}$, называемые псевдонапряженностями, имеют вид

$$E_{i(p)}^{*\alpha}=\varphi_{(p)/i}^{*\alpha}\,. \qquad (8)$$

Электрическую индукцию $D_i^{*\alpha(0)}$ можно так же представить в виде сумм

$$D_i^{*\alpha(0)}=\sum_{p=1}^{3}D_{i(p)}^{*\alpha}\ ,$$

где псевдоиндукции связаны с псевдонапряженностями линейными соотношениями

$$D_{i(p)}^{*\alpha}=\varepsilon^{*\alpha}E_{i(p)}^{*\alpha}\,. \qquad (9)$$

В силу линейности задачи псевдоиндукция будет удовлетворять соотношениям:

$$D^{*\alpha}_{i(p)/j} = 0, x_i \in V_{\xi\alpha}. \tag{10}$$

Граничные условия для функций $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)$:

$$\vartheta^{*\alpha}_{(p)} = \vartheta^{*N}_{(p)}, \quad (D^{*\alpha}_{i(p)} - D^{*N}_{i(p)})n_i = 0, \;\; x_i \in \sum\nolimits_{\xi\alpha N} \quad . \tag{11}$$

Также должны выполняться условия нормировки:

$$<\varphi^{\alpha}_i> = \sum_{p=1}^{3} <\varphi^{*\alpha}_{(p)}> = -\sum_{p=1}^{3} \overline{E}^{*}_{(p)} <\xi_p> + \sum_{p=1}^{3} <\vartheta^{*\alpha}_{(p)}> = 0.$$

Так как $<\xi_p> = 0$, то функции $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)$ должны удовлетворять условиям нормировки:

$$<\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)>=0. \tag{12}$$

Из условия периодичности псевдопотенциала

$$[[\varphi^{*\alpha(1)}]] = \sum_{p=1}^{3} [[\varphi^{*\alpha}{}_{(p)}]] = -\sum_{p=1}^{3} \overline{E}^{*}_{(p)}[[\xi_p]] + \sum_{p=1}^{3} [[\vartheta^{*\alpha}_{(p)}]] = 0.$$

получаем условия для $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}$:

$$[[\vartheta^{*\alpha}_{(p)}]] = \overline{E}^{*}_{(p)}[[\xi_p]]. \tag{13}$$

Так как величина $[[\xi_p]]$ удовлетворяет следующему соотношению: $[[\xi_p]]_{\alpha} = a_p \delta_{p\alpha}$, то условия (13) для функций $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)$ примут вид

$$[[\vartheta^{*\alpha}_{(p)}]]_i = \overline{E}^{*}_{i(p)} a_p \delta_{ip} \;, \tag{14}$$

т.е функции $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)$ уже не являются периодическими.

Из уравнений (8)-(12), (14) следует, что функции $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}(\xi_k)$ являются решением следующих задач на «ячейке периодичности»

$$\begin{cases} D^{*\alpha}_{i(p)/i} = 0 \\ D^{*\alpha}_{i(p)} = \varepsilon^{*\alpha} E^{*\alpha}_{i(p)} \\ E^{*\alpha}_{i(p)} = \vartheta^{*\alpha}_{(p)/i} \\ \vartheta^{*\alpha}_{(p)} = \vartheta^{*N}_{(p)}, (D^{*\alpha}_{i(p)} - D^{*N}_{i(p)})n_i = 0 \\ <\vartheta^{*\alpha}_{(p)}> = 0 \\ [[\vartheta^{*\alpha}_{(p)}]]_i = \overline{E}^{*}_{(p)} a_p \delta_{ip} \\ [[D^{*\alpha}_{i(p)}]]n_i = 0 \end{cases} . \tag{15}$$

Задача (15) в отличие от задачи (4) не содержат входных данных в соотношения Гаусса, а имеют входные данные – функции $\overline{E}^{*}_i$, заданные на поверхности «ячейки периодичности», но они по-прежнему содержат интегральное условие нормировки и граничные условия периодического типа. Подобные задачи по расчету электрических полей внутри композита разрешимы на ЯП с достаточно простой геометрической структурой [8]. Для более сложных структур, обладающих свойством симметрии, введем модификацию МАО.

Далее предположим, что в ЯП V_ξ является симметричной относительно координатных плоскостей ($\xi_i = 0$) ,относительно поворота на угол π вокруг каждой оси координат $O\xi_i$ и при преобразовании центральной симметрии с центром в точке *O*. Тогда задаче (15) можно в соответствие поставить задачу 1/8 ЯП (в первом координатном октанте, составляющем подобласть $\tilde{V}_\xi : \tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$.

$$\begin{cases} D^{*\alpha}_{i(p)/i} = 0 \\ D^{*\alpha}_{i(p)} = \varepsilon^{*\alpha} E^{*\alpha}_{i(p)}, x_i \in (\tilde{V}_\xi \cup \sum\nolimits_s^/ \cup \sum\nolimits_s\ ) \\ E^{*\alpha}_{i(p)} = \vartheta^{*\alpha}_{(p)/i}, x_i \in \tilde{V}_\xi \\ \vartheta^{*\alpha}_{(p)} = \vartheta^{*N}_{(p)}, (D^{*\alpha}_{i(p)} - D^{*N}_{i(p)}) n_i = 0, x_i \in \overline{\sum}_{\xi\alpha N} \end{cases} . \quad (16)$$

Поверхности контакта компонентов $\overline{\sum}_{\xi\alpha N} = \sum_{\xi\alpha N} \cap \tilde{V}_\xi$, координатные плоскости – $\sum_s = \{\xi_s = 0\}$, а торцевые поверхности ЯП – $\sum_s^/ = \{\xi_s = a_s / 2\}, s = 1,2,3.$ Граничные условия на торцевых и координатных плоскостях различны для всех *p*:

$$\begin{cases} \vartheta^{*\alpha}_{(p)} |_{\sum_p^/} = \dfrac{a_p}{2} \overline{E}^*_p, \vartheta^{*\alpha}_{(p)} |_{\sum_p} = 0, \\ \vartheta^{*\alpha}_{(p)/i} |_{\sum_i} = 0, \vartheta^{*\alpha}_{(p)/i} |_{\sum_i^/} = 0, p \neq i \end{cases} . \quad (17)$$

Задачи (16) на 1/8 «ячейке периодичности» $\tilde{V}_\xi = \bigcup\limits_{\alpha=1} \tilde{V}_{\alpha\xi}$ с граничными условиями (17) будем называть задачам $L_p, p = 1,2,3.$

4. Расчет эффективного тензора диэлектрической проницаемости композита

После решения серии задач L_p для p=1, 2, 3 и нахождения псевдопотенциалов $\vartheta^{*\alpha}_{(p)}$ и псевдоиндукции $D^{*\alpha}_{i(p)}$ во всех компонентах композита, вычислим среднюю электрическую индукцию, используя интегрирование по областям, занятым компонентами композиционного материала:

$$< D_i^{*(0)} >= \sum_{p=1}^{3} \overline{D}^*_{i(p)},$$

где

$$\overline{D}^*_{i(p)} = < D^{*\alpha}_{i(p)} > = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{V(\alpha)} D^{*\alpha}_{i(p)} dV \quad . \tag{19}$$

В силу линейности задач L_p их решения $D^{*\alpha}_{i(p)}$ линейно зависят от входных данных $\overline{E}^*_p$. Следовательно, существуют тензоры $\varepsilon^{*(0)}_{ip}$, связывающие комплексные амплитуды вектора напряженности $\overline{E}^*_p$ и вектора индукции электрического поля $D^{*\alpha}_{i(p)}$:

$$D^{*\alpha}_{i(p)} = \varepsilon^{*(0)}_{ip} \overline{E}^*_p \quad . \tag{20}$$

Следовательно, зная псевдоиндукции $D^{*\alpha}_{i(p)}$, можем вычислить компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{*(0)}_{ip}$ нулевого приближения:

$$\varepsilon^{*(0)}_{ip} = \frac{D^{*\alpha}_{i(p)}(\xi_l)}{\overline{E}^*_p} \quad .$$

Тогда, подставив (20) в (19), получаем осредненную задачу с эффективным тензором диэлектрической проницаемости ε^*_{ip}, связывающим среднюю индукцию $< D^{*(0)}_i >$ и среднюю напряженность $\overline{E}^*_p$ электрического поля внутри композиционного материала:

$$< D^{*(0)}_i > = \overline{\varepsilon}^*_{ip} \overline{E}^*_p \ ,$$

где эффективный тензор комплексных амплитуд диэлектрической проницаемости $\overline{\varepsilon}^*_{ip}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\varepsilon}^*_{ip} = \frac{\overline{D}^*_{i(p)}}{\overline{E}^*_p} \ .$$

5. Вариационная формулировка задач электростатики L_p

Для произвольного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ дадим вариационную формулировку задач L_p (16) и (17). Для этого рассмотрим класс комплекснозначных функций $\varphi^*_{(p)}$ (возможные значения электрического потенциала), которые определены во всей области $\tilde{V}_\xi$ и являются гладкими в подобластях $\tilde{V}_{\alpha\xi}$, удовлетворяют условиям непрерывности на границе раздела фаз и граничным условиям первого рода на торцевых поверхностях $\sum_p$ и $\sum^{/}_p$:

$$[\varphi^*_{(p)}] = 0, \quad \varphi^*_{(p)} |_{\sum_p} = 0, \quad \varphi^*_{(p)} |_{\sum^{/}_p} = \frac{a_p}{2} \overline{E}^*_{(p)} . \tag{21}$$

Поверхность $\sum_\xi$ области подобласти $\tilde{V}_\xi$ представляем как совокупность поверхностей: $\sum_\xi = \sum_1 \cup \sum_2$. На поверхности $\sum_1$ задано внешнее поле $\vec{D}^*_{e(p)}$:

$\vec{D}^*_{e(p)}|_{\sum_1} = \vec{D}^*_{(p)}\vec{n}$, а на поверхности $\sum_2$ – нулевые граничные условия. Обозначим также $\delta\varphi^*_{(p)}$ – вариации возможных значений электрического потенциала, удовлетворяющие тем же условиям (21), но с нулевыми граничными условиями на торцевых поверхностях Σ'_p. Истинный электрический потенциал $\vartheta^*_{(p)}$, удовлетворяющий всем уравнениям задачи (16)-(17), отличается от всех возможных значений потенциала $\varphi^*_{(p)}$ тем, что для него и только для него лагранжиан L имеет минимальное значение:

$$\delta L = 0, \qquad L = \int_{\sum_1} \varphi^*_{(p)} D^{*e}_{i(p)} d\Sigma - \frac{1}{2}\int_{\tilde{V}_\xi} (\varphi^*_{(p)/i})\varepsilon^* \nabla \varphi^*_{(p)/i} dV . \tag{22}$$

6. Метод конечных элементов для задач L_p

Для решения вариационного уравнения (22) применим метод конечных элементов (МКЭ), согласно которому всю область $\tilde{V}_\xi$ разбиваем на конечное, достаточно большое количество подобластей стандартного типа V_e в форме тетраэдров: $\tilde{V}_\xi = \bigcup_e V_e$. Для каждого элемента V_e записываем уравнение (22), при этом правая часть вариационного уравнения аппроксимирует поток электрической индукции $D^*_{(p)} = \varepsilon^* \vartheta^*_{(p)/i} n_i$ через поверхность отдельно взятого конечного элемента:

$$\int_{V_e} \delta(\vartheta^*_{(p)/i})^{\mathrm{T}} \varepsilon^* \vartheta^*_{(p)/i} dV = \int_{\sum_e} \delta(\vartheta^*_{(p)})^{\mathrm{T}} D^*_{(p)} d\Sigma \tag{23}$$

В каждом конечном элементе аппроксимируем псевдопотенциал $\vartheta^*_{(p)}(\xi_{i(j)}) = \{\vartheta'_{(p)}(\xi_{i(j)}), \vartheta''_{(p)}(\xi_{i(j)})\}$ и его вариацию $\delta\vartheta^*_{(p)}$ как

$$\vartheta^*_{(p)} = [\Phi]\{\phi^*_{(p)}\}, \; \delta\vartheta^*_{(p)} = [\Phi]\delta\{\phi^*_{(p)}\},$$

где $\{\phi^*_{(p)}\}^{\mathrm{T}} = \{\phi'_{(p)}(\xi_{i(1)}), \phi''_{(p)}(\xi_{i(1)}), ..., \phi'_{(p)}(\xi_{i(m)}), \phi''_{(p)}(\xi_{i(m)})\}^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец, составленный из значений электрического потенциала в узлах конечного элемента, $\xi_{i(j)}$ – координата j-го узла конечного элемента, j=1…m, m– число узлов, $[\Phi]_{2\times 8}$ – матрица функций формы, имеющая вид

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 \end{array}\right].$$

Производные от псевдопотенциала представим в виде координатного столбца $\{\vartheta^*_{(p)/1}, \vartheta^*_{(p)/2}, \vartheta^*_{(p)/3}\} = [B]\phi^*_{(p)}$, где $[B] = [L][\Phi]$– матрица градиентов потенциала,

$$[L]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\xi_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi_3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

– матрица операторов дифференцирования. С учетом введенных операторов, перепишем уравнение (23):

$$\int_{V_e}\delta\{\phi^*_{(p)}\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}\varepsilon^*[B]\{\phi^*_{(p)}\}dV=\int_{\Sigma_e^{/}}\delta\{\phi^*_{(p)}\}^{\mathrm{T}}[\Phi]^{\mathrm{T}}D^*_{(p)}d\Sigma. \tag{24}$$

Выноса вариацию $\delta\{\phi^*_{(p)}\}^{\mathrm{T}}$ за знак интегралов, из (24) получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$[K^*_e]\{\phi^*_{(p)}\}=\{f^*_e\}, \tag{25}$$

где $[K^*_e]_{8\times8}=\int[B]^T\varepsilon^*[B]dV$ – матрица жесткости, $\{f^*_e\}=\int_{\Sigma_e}[\Phi]^{\mathrm{T}}D^*_p d\Sigma$ – локальный вектор правой части. Если просуммировать СЛАУ (25) для всех конечных элементов, то получим глобальную СЛАУ для всей рассматриваемой области $\tilde{V}_\xi$

$$[K^*]\{\phi^*_{(p)}\}=\{f^*\}, \tag{26}$$

где $[K^*]$ – глобальная матрица жесткости, $\{f^*\}$ – глобальный столбец правой части.

7. Расчет для 3D ортогонально-армированного композиционного материала

Решение глобальной СЛАУ (26) осуществлялось путем разделения комплексных переменных на действительную и мнимую части с последующим привлечением QMR методов. С помощью такого подхода были решены L_p задачи для 3D ортогонально-армированного композита [6,10], число составляющих элементов которого N=4, где α = 1,2,3–волокна, α = 4 – матрица. Все волокна полагались одинаковыми и концентрация волкон по 3-м координатным направляниям также была одинакова. Такой композит вцелом является материалом с кубическим типом симметрии [13], и тензор эффективной диэлектической проницаемости $\bar{\varepsilon}^*_{ip}$ имеет одну независимую компоненту $\bar{\varepsilon}^*=\bar{\varepsilon}^*_{ii}$ (суммирования здесь нет).

В численных расчетах число конечных элементов при решении L_p задач составляло 6343, а число степеней свободы – 1502. При численной реализации учитывалось, что армирующие композита могут состоять из различных материалов и иметь различные радиусы.

Расчет действительной и мнимой частей электрического псевдопотенциала ϑ^* для задачи L_3 (рис.1 и 2) производился в композите с коэффициентом армирования $\varphi_f = V_f / V_m$=0.18, где V_f, V_m – содержание волокон и матрицы соответственно.

Модельные значения коэффициентов диэлектрической проницаемости удовлетворяют соотношениям: $\dfrac{\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_m}{\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_f} = 0.1, \dfrac{\operatorname{Im}\varepsilon^*{}_m}{\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_m} = 0.1, \dfrac{\operatorname{Im}\varepsilon^*{}_f}{\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_f} = 0.1$.

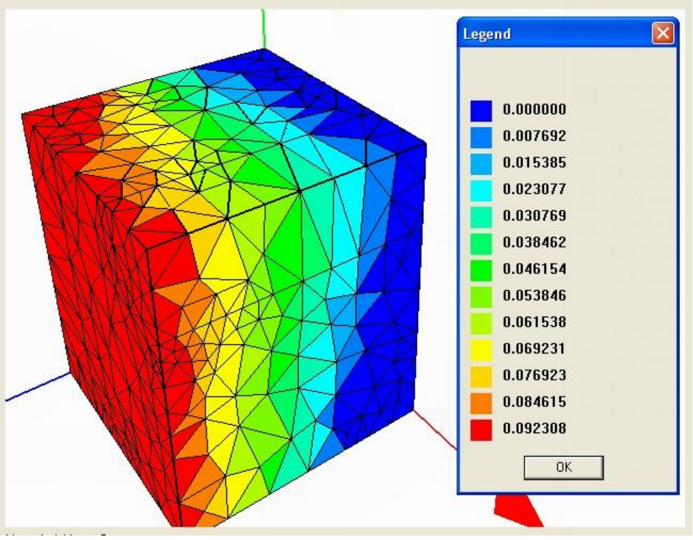

Рис.1. Распределение действительной части псевдопотенциала $\operatorname{Re}\vartheta^*$ (безразмерное значение) в ЯП.

Приближенно-аналитическое значение эффективного коэффициента диэлектрической проницаемости по методу Фойгта (линейная зависимость) с помощью следующих соотношений

$$\overline{\varepsilon}^* = \varepsilon^*_f \varphi_f + \varepsilon^*_m (1 - \varphi_f). \tag{27}$$

По методу Рейса (обратно-линейная зависимость) данное значение ивычисляется следующим образом:

$$\frac{1}{\overline{\varepsilon}^*} = \frac{\varphi_f}{\varepsilon^*_f} + \frac{(1-\varphi_f)}{\varepsilon^*_m}. \tag{28}$$

На рис. 3 изображена зависимость действительной части коэффициента диэлектрической проницаемости композита $\operatorname{Re}\varepsilon^*$, отнесенной к действительной части коэффициента проницаемости матрицы $\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_m$, от коэффициента армирования φ_f, на рис. 4 – мнимой части $\operatorname{Im}\varepsilon^*$, отнесенной к $\operatorname{Re}\varepsilon^*{}_m$, а на рис. 5 – абсолютной величины компоненты модуля $|\varepsilon^*|$ диэлектрической проницаемости композита.

10.7463/0113.0531682

Результаты численных расчетов показывают, что значения $\mathrm{Re}\,\bar{\varepsilon}^*, \mathrm{Im}\,\bar{\varepsilon}^*, \left|\bar{\varepsilon}^*\right|$ для 3D ортогонально-армированного композиционного материала укладываются в вилку Фойгта-Рейсса, что свидетельствует о хорошей точности предложенного метода расчета эффективных характеристик.

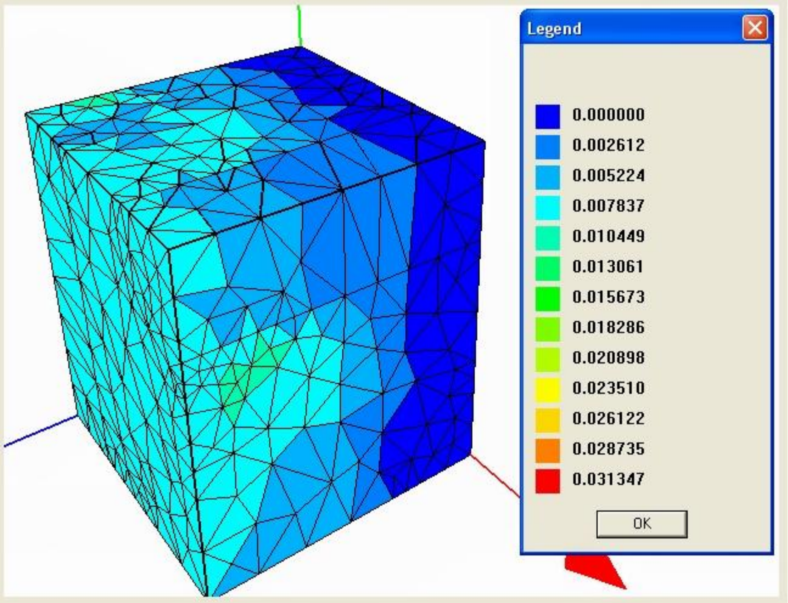

Рис. 2. Распределение мнимой части псевдопотенциала $\mathrm{Im}\,\vartheta^*$ (безразмерное значение) в ЯП.

В то же время сами соотношения (27)-(28) нельзя выбрать в качестве даже приближенных выражений для эффективного коэффициента диэлектрической проницаемости в виду того, что вилка Фойгта-Рейсса слишком широка. Различия между значениями $\left|\bar{\varepsilon}^*\right|$, вычисленными по предложенному методу и по методу Фойгта-Рейсса составляло примерно 60% для коэффициента армирования $\varphi_f = 0.55$, что является весьма плохим результатом.

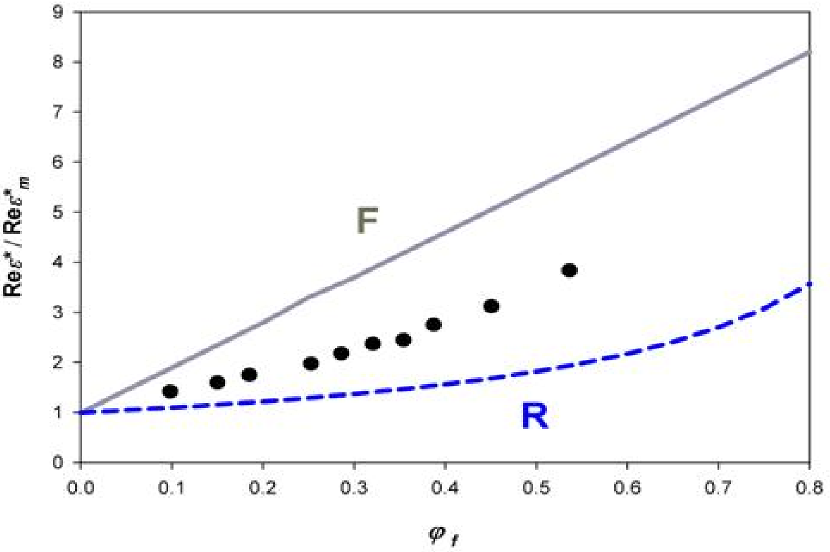

Рис. 3. Зависимость $\mathrm{Re}\,\overline{\varepsilon}^*$ от коэффициента для 3D композита, рассчитанная по методу Фойгта(F)-Рейсса(R) и МАО (точки).

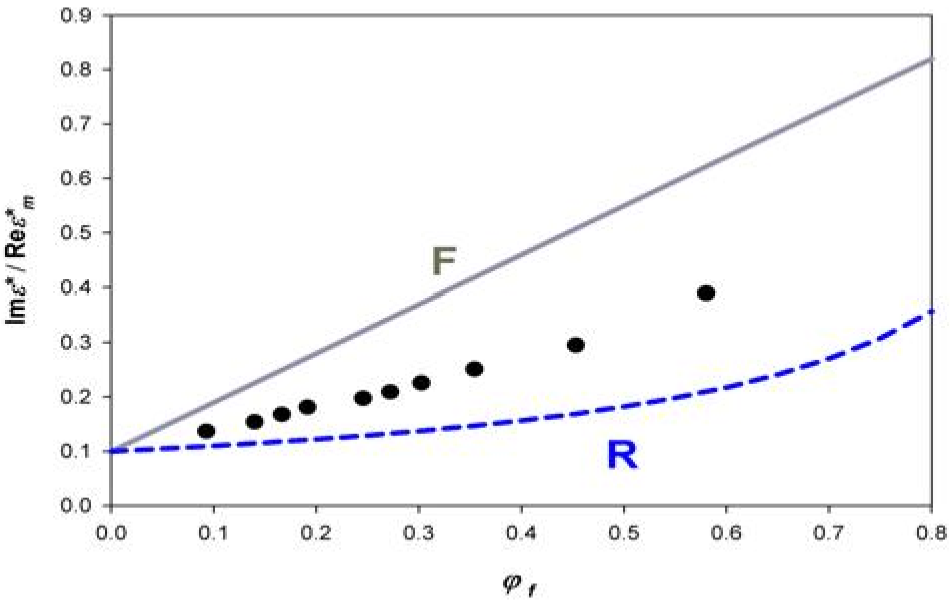

Рис. 4. Зависимость $\mathrm{Im}\,\overline{\varepsilon}^*$ от коэффициента для 3D композита, рассчитанная по методу Фойгта(F)-Рейсса(R) и МАО (точки)

Таким образом, для расчета эффективных электрических характеристик композитов со сложными структурами армирования целесообразно приемнять метод асимптотического осреднения, рассмотренный в данной работе. Этот метод позволяется вычислять математически точные значения эффективных диэлектричских характеристик композиционных материалов. Возможные погрешности метода могут быть связаны только с погрешностями численного метогда расчета, которые достаточно малы (не более 1%) и могут быть еще уменьшены за счет выбора более мелких конечно-элементных сеток, а также с погрешностями реальной геометрической структуры волокон, которая может отличаться от идеальной формы, использованной в расчетах. Однако и эти погрешности могут быть снижены, за счет более точного учета геометрической формы волокон в численном расчете.

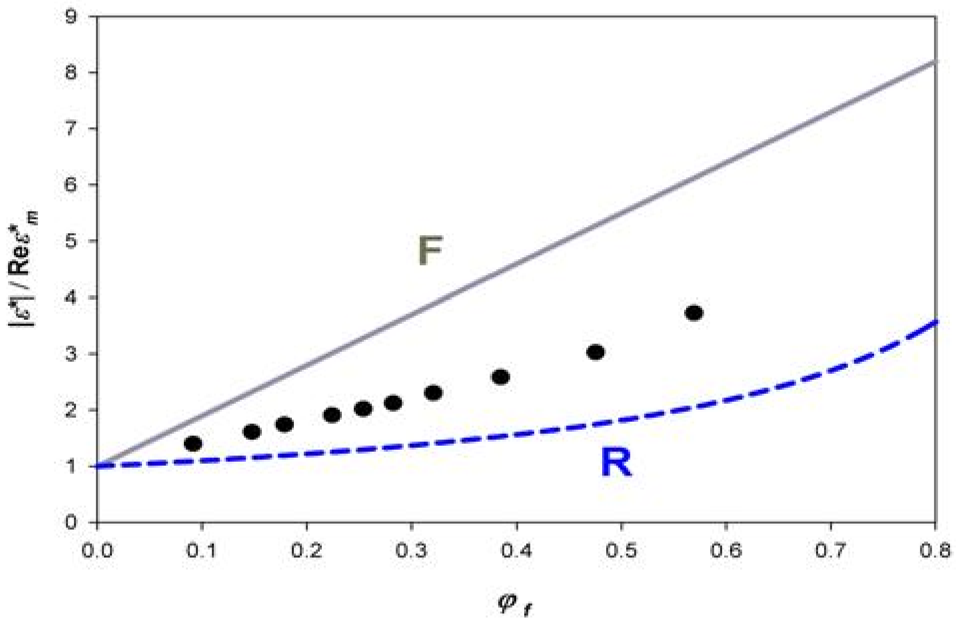

Рис. 5. Зависимость $|\varepsilon^*|$ от коэффициента для 3D композита, рассчитанная по методу Фойгта(F)-Рейсса(R) и МАО (точки)

Заключение

Предложена математическая модель для расчета эффективного тензора диэлектрической проницаемости композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения периодических структур. Для численного решения локальной задачи электростатики использован метод конечных элементов. Проведены тестовые расчеты эффективных диэлектрических характеристик 3D ортогонально-армированного композита. Сравнение результатов, полученных при численной реализации метода асимптотического осреднения и метода Фойгта-Рейсса, показало, что предложенная модель расчета обеспечивает высокую точность вычислений эффективных диэлектрических характеристик композиционных материалов со сложными структурами армирования. Данная математическая модель может быть применена для прогнозирования диэлектрических характеристик новых синтезируемых материалов.

Поддержка

Работа проведена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по Соглашениям о предоставлении гранта в форме субсидий №14.B37.21.0448 и №14.132.21.1699 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Список литературы

1. Бычков И.В., Дубровских Д.В., Зотов И.С., Федий А.А. Исследование эффективной диэлектрической проницаемости композитного материала $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ - графит // Вестник Челябинского государственного университета. 2011. № 7 (222). Физика. Вып. 9. С. 7-15.

2. Най Дж. Физические свойства кристаллов : пер. с англ. М.: Мир, 1967. 385 с.

3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.

4. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука,1984. 352 с.

5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

6. Димитриенко Ю.И. Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95-108.

7. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 57-67.

Димитриенко Ю.И., Морозов А.Н., Соколов А.П., Ничеговский Е.С. Моделирование эффективных пьезоэлектроупругих свойств композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. № 3. С. 86-97.

9. Димитриенко Ю.И., Ничеговский Е.С. Численное моделирование магнитных свойств композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. № 1. С. 3-11.

10. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2010. 67 с.

11. Шелухин В.В., Терентьев С.А. Гомогенизация уравнений Максвелла и дисперсия Максвелла-Вагнера // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 424, № 3. С. 402-406.

12. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : учеб. пособие. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. 560 с.

13. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001. 576 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Modeling of dielectric properties of composite materials on the basis of asymptotic averaging

01, January 2013
DOI: 10.7463/0113.0531682
Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevich M.N.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
dimit@serv.bmstu.ru
alsokolo@bmstu.ru
mamarkevi@gmail.com

In this paper, the authors consider calculation of effective dielectric parameters of composite materials with complex three-dimensional armoring. The method of asymptotic averaging of periodic structures is used for averaging of long-term quasi-static electric fields in composites with dielectric components. Series of local electrostatic tasks were formulated with the use of periodicity cells; electrostatic variational problems were also formulated. To solve spatial local problems for composite materials with three-dimensional complex armoring, the finite element numerical method was used. In this article, the authors proposed an algorithm for computation of effective tensor of dielectric permeability of three-dimensional armored composite materials. Test computations were carried out in order to obtain distribution of the local electric field, effective dielectric characteristics of three-dimensional orthogonal armored composite materials with different inclusion volume fractions.

Publications with keywords: composites, multiscale homogenization method, dielectric properties
Publications with words: composites, multiscale homogenization method, dielectric properties

References

1. Bychkov I.V., Dubrovskikh D.V., Zotov I.S., Fedii A.A. Issledovanie effektivnoi dielektricheskoi pronitsaemosti kompozitnogo materiala CaSO4·2H2O - grafit [Study of the effective permittivity of a composite material CaSO4·2H2O - graphite]. *Vestnik Cheliabinskogo gosudarstvennogo universitet* [Bulletin of the Chelyabinsk state University], 2011, no. 7 (222), *Fizika* [Physics], iss. 9, pp. 7-15.

2. Nye. J.F. *Physical Properties of Crystals*. London, Oxford University Press, 1957. (Russ. ed.: Nai Dzh. *Fizicheskie svoistva kristallov*. Moscow, Mir, 1967. 385 p.).

3. Sanches-Palencia E. *Non-Homogeneous media and Vibration Theory*. Berlin, Springer, 1980. (*Lectures Notes in Physics*, vol. 127). (Russ. ed.: Sanches-Palensiia E. *Neodnorodnye sredy i teoriia kolebanii*. Moscow, Mir, 1984. 472 p.).

4. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka, 1984. 352 p.

5. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MSU Publ., 1984. 336 p.

6. Dimitrienko Iu.I. Kashkarov A.I. Raschet effektivnykh kharakteristik kompozitov s periodicheskoi strukturoi metodom konechnykh elementov [The calculation of the effective characteristics of composite materials with periodic structure by finite element method]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2002, no. 2, pp. 95-108.

7. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Razrabotka sistemy avtomatizirovannogo vychisleniia effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov [Development of automated technology of calculation of effective elastic characteristics of composites by method of asymptotic averaging]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2008, no. 2, pp. 56-67.

Dimitrienko Iu.I., Morozov A.N., Sokolov A.P., Nichegovskii E.S. Modelirovanie effektivnykh p'ezoelektrouprugikh svoistv kompozitsionnykh materialov [Simulation of efficient piezoelectric-elastic composite materials]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2010, no. 3, pp. 86-97.

9. Dimitrienko Iu.I., Nichegovskii E.S. Chislennoe modelirovanie magnitnykh svoistv kompozitsionnykh materialov [Numerical simulation of magnetic properties of composites]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2010, no. 1, pp. 3-11.

10. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. *Metod konechnykh elementov dlia resheniia lokal'nykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [The method of finite elements for the solution of local problems in the mechanics of composite materials]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2010. 67 p.

11. Shelukhin V.V., Terent'ev S.A. Gomogenizatsiia uravnenii Maksvella i dispersiia Maksvella-Vagnera [Homogenization of the equations of Maxwell and dispersion of the Maxwell-Wagner]. *Doklady Akademii Nauk*, 2009, vol. 424, no. 3, pp. 402-406.

12. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy : ucheb. posobie. V 4 t. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [The mechanics of a continuous medium. In 4 vols. Vol. 2. The universal laws of mechanics and electrodynamics of continua]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 560 p.

13. Dimitrienko Iu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaia shkola, 2001. 576 p.