НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Мультиграфовое представление автоматов с магазинной памятью

09, сентябрь 2012
DOI: 10.7463/0912.0460973

Белоусов А. И., Ткачев С. Б.

УДК 519.76

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

Введение

В теории формальных языков важное место занимают контекстно-свободные грамматики (КС-грамматики) и контекстно-свободные языки (КС-языки). Проблема распознавания для КС-языков решается с помощью автоматов с магазинной памятью (МП-автоматов). Для задания МП-автоматов используется их формальное представление, которое в общем случае является достаточно громоздким.

Известно, что для регулярных грамматик и регулярных языков распознающими моделями являются конечные автоматы, которые допускают наглядное представление в виде взвешенных ориентированных графов [1]. Такое представление позволяет анализировать свойства конечного автомата и в аналитическом виде находить регулярное выражение, описывающее язык, допускаемый конечным автоматом.

В статье рассматривается представление МП-автомата в виде ориентированного мультиграфа, впервые введенное авторами в [1]. Это представление МП-автомата, помимо своей наглядности, позволяет легко доказывать некоторые полезные свойства МП-автоматов.

Отметим, что мультиграфы МП-автоматов рассматриваются также в [3, 4], где они называются диаграммами, но используются исключительно как иллюстрации.

Можно ожидать, что на основе графового подхода удастся оптимизировать построение КС-грамматики по МП-автомату. Алгоритм построения КС-грамматики по МП-автомату хорошо известен [1, 2, 3], но получаемая КС-грамматика получается очень громоздкой. Вопросу оптимизации КС-грамматики, которая строится по МП-автомату, будет посвящена отдельное исследование.

В этой статье определяется мультиграф МП-автомата, дается определение языка МП-автомата в графовых терминах и доказывается его равносильность с известным определением $[1, 2, 3]$. В качестве иллюстрации использования введенного представления доказывается полезное свойство МП-автомата, состоящее в том, что множество всех магазинных цепочек является регулярным.

1. Мультиграф МП-автомата

Следуя [1], рассмотрим МП-автомат

$$M = (Q,\ V,\ \Gamma,\ q_0,\ F,\ \delta,\ Z_0), \tag{1}$$

где Q — множество состояний МП-автомата, V — множество терминальных символов (терминальный алфавит), Γ — множество магазинных символов (магазинный алфавит), q_0 — начальное состояние, $q_0 \in Q$, F — множество заключительных состояний, $F \subseteq Q$, δ — множество команд, Z_0 — начальный символ магазина, $Z_0 \in \Gamma$.

Сопоставим МП-автомату (1) *ориентированный мультиграф*. Напомним, что в отличие от обычного ориентированного графа в мультиграфе допускается несколько дуг для одной и той же упорядоченной пары вершин.

Каждому состоянию автомата поставим во взаимно однозначное соответствие вершину мультиграфа. Для удобства отождествим вершины с соответствующими им состояниям МП-автомата и будем говорить, что Q — множество вершин (состояний) мультиграфа.

Две вершины q и r мультиграфа будут соединены дугой $(q,\ r)$ тогда и только тогда, когда в множестве команд МП-автомата имеется команда

$$qaZ \to r\gamma,$$

где a — терминальный символ или пустая цепочка (λ), Z — верхний символ магазина, γ — цепочка символов в магазинном алфавите (магазинная цепочка), помещаемая в магазин вместо символа Z.

Определение 1. *Меткой дуги* $(q,\ r)$ называется упорядоченная тройка $(Z,\ a,\ \gamma)$.

Заметим, что в мультиграфе количество дуг, исходящих из вершины q и заходящих в вершину r, равно количеству таких команд МП-автомата (1), в левой части которых присутствует состояние q, а в правой — состояние r. При этом каждая такая дуга будет иметь свою метку указанного выше вида.

Введем понятие *магазинной метки пути* в мультиграфе МП-автомата.

Под путем (конечным или бесконечным) в мультиграфе понимают произвольную (может быть, пустую) последовательность дуг e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$, такую, что любая пара соседних дуг e_i, e_{i+1} этой последовательности смежна, то есть существует вершина q_{i+1}, в которую дуга e_i заходит и из которой дуга e_{i+1} выходит. Для конечного пути число дуг в пути называют его длиной.

Заметим, что понятие пути в мультиграфе отличается от аналогичного понятия в ориентированном графе (см. [1]).

Для произвольного алфавита W вводят операцию левого деления слова на заданную букву. Для произвольных $a \in W$ и $x = x(1)x(2)...x(k) \in W^*$, где $W^* = \cup_{i=0}^{\infty} W^i$ — множество всех слов в алфавите W [1, 3], полагают

$$a^{-1}x = \begin{cases} x(2)...x(k), & \text{если } x(1) = a, \\ \text{не определено}, & \text{если } x(1) \neq a. \end{cases}$$

В частности, выражение $a^{-1}\lambda$ всегда не определено.

С использованием операции левого деления для магазинных меток двух смежных дуг e_1 и e_2 с метками $(Z,\ a,\ \gamma)$ и $(Y,\ b,\ \alpha)$ вводят операцию Y-сцепления:

$$\gamma \otimes_Y \alpha = \alpha(Y^{-1}\gamma).$$

Опираясь на приведенные определения и результаты, зададим магазинную метку пути следующим образом.

Определение 2.

1) Магазинная метка пути нулевой длины есть пустая цепочка.

2) Магазинная метка пути длины 1, то есть дуги с меткой $(Z,\ a,\ \gamma)$, есть цепочка γ.

3) Пусть магазинная метка пути $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{n-1}$, служащего началом пути $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{n-1},\ e_n$, определена и равна γ, а дуга e_n имеет метку $(Y,\ b,\ \alpha)$. Тогда магазинная метка пути $e_1, e_2, \ldots, e_n$ длины n равна $\gamma \otimes_Y \alpha = \alpha(Y^{-1}\gamma)$, если это выражение определено, и не определена в противном случае.

Определение 3. *Входной меткой дуги* мультиграфа МП-автомата называется средняя компонента a метки $(Z_0,\ a,\ \gamma)$ этой дуги.

Определение 4. *Входная метка пути* ненулевой длины в мультиграфе МП-автомата есть результат соединения входных меток дуг в порядке их следования, и есть λ для пути нулевой длины.

Именно так определяется метка пути в конечном автомате, представленном взвешенным ориентированным графом [1].

Определение 5. *Стартовой дугой* называется любая дуга, исходящая из начальной вершины q_0 и имеющая метку $(Z_0,\ a,\ \gamma)$ для произвольных $a \in V \cup \lambda$ и $\gamma \in \Gamma^*$.

Обратим внимание, что первой компонентой метки стартовой дуги в обязательном порядке является Z_0 — начальный символ магазина, то есть этой дуге соответствует одна из команд МП-автомата, с которой автомат может начать работу по распознаванию принадлежности входной цепочки соответствующему КС-языку.

2. Графовая интерпретация языка, допускаемого МП-автоматом

Напомним, что язык, допускаемый МП-автоматом (1), по определению [1] есть множество всех входных цепочек в терминальном алфавите V, которые являются допустимыми. Цепочку называют допустимой, если МП-автомат, выполнив некоторую последовательность команд, переходит из начального состояния в одно из заключительных состояний $q_f \in F$, опустошив на последнем такте работы магазин. При этом в начале работы МП-автомата верхним символом магазина является начальный символ Z_0, а с пустым магазином МП-автомат не может выполнять какие-либо команды.

Опираясь на введенные выше понятия, можно дать альтернативную графовую интерпретацию языка МП-автомата, эквивалентную приведенной выше.

Теорема 1. Язык МП-автомата есть множество всех таких цепочек x во входном алфавите, что x есть входная метка пути, начинающегося со стартовой дуги и заканчивающегося дугой, заходящей в заключительное состояние, магазинная метка которого определена.

◄ Докажем прежде всего, что магазинная метка пути (если, разумеется, она определена), первая дуга которого является стартовой, есть цепочка магазинных символов, содержащихся в магазине МП-автомата после того, как МП-автомат придет в состояние, соответствующее вершине, в которую заходит последняя дуга этого пути, исполнив команды, соответствующие меткам дуг указанного пути, в порядке их следования.

Проведем индукцию по n — длине пути.

Заметим, что рассматривать пути нулевой длины не имеет смысла, поскольку для них магазинная метка не определена. Если язык, допускаемый МП-автоматом, содержит пустое слово, то в множестве команд δ должна быть команда вида $q_0\lambda Z_0 \to q_f\lambda$, $q_f \in F$, которой в мультиграфе соотвествует дуга $(q_0,\ q_f)$. Поэтому $n \geq 1$.

При $n = 1$ имеем путь, содержащий некоторую стартовую дугу $(q_0,\ r)$ с меткой $(q_0,\ a,\ \gamma)$. Магазинной меткой данного пути будет цепочка γ. Переход по этой дуге соответствует выполнению МП-автоматом команды $q_0aZ_0 \to r\gamma$, после чего МП-автомат перейдет в состояние r, а содержимым магазина станет цепочка γ. Таким образом, при $n = 1$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение справедливо для всех путей длины $n - 1$, магазинная метка которых определена, а первая дуга является стартовой.

Рассмотрим некоторый путь длины n, магазинная метка которого определена, ведущий из стартовой вершины q_0 в некоторую вершину p, последняя дуга которого, ведущая из некоторой вершины r_{n-1}, имеет метку $(Y,\ b,\ \alpha)$. Так как магазинная метка всего пути считается определенной, то определена и магазинная метка пути из q_0 в r_{n-1}. Пусть она равна β и, согласно индуктивному предположению, есть содержимое магазина в состоянии r_{n-1}.

Тогда метка всего рассматриваемого пути длины n из q_0 в p равна

$$\beta \otimes_Y \alpha = \alpha Y^{-1}\beta = \alpha\beta',$$

где $\beta' = Y^{-1}\beta$. Покажем, что цепочка $\alpha\beta'$ и есть содержимое магазина в состоянии p.

Действительно, если цепочка β содержалась в магазине, когда МП-автомат находился в состоянии r_{n-1}, следующей командой, переводящей МП-автомат из состояния r_{n-1} в состояние p, будет команда $r_{n-1}bY \to p\alpha$.

Справедливость предположения о том, что магазиная метка всего пути длины n определена, говорит о применимости этой команды в текущем состоянии МП-автомата. Следовательно, верхним символом магазина в состоянии r_{n-1} является магазинный символ Y и $\beta = Y\beta'$. Выполнение указанной команды приводит к удалению из магазина символа Y и замене его цепочкой α. В итоге содержимым магазина в состоянии p будет цепочка $\alpha\beta'$ — магазинная метка пути, что и требовалось доказать.

Поскольку равенство магазинной метки пути мультиграфа МП-автомата и содержимого магазина МП-автомата доказано для произвольного пути ненулевой длины, оно будет верным и для путей, заканчивающихся в вершинах, соответствующих заключительными состояниям.

Покажем, что входные метки всех путей в мультиграфе МП-автомата, начинающихся со стартовой дуги и заканчивающихся дугой, заходящей в заключительное состояние, магазинная метка которых определена, принадлежат языку, допускаемому МП-автоматом.

Прежде всего докажем, что входная метка любого пути, магазинная метка которого определена, а первая дуга является стартовой, есть цепочка символов входного алфавита, прочитанная МП-автоматом со входной ленты к тому моменту, когда МП-автомат придет в состояние, соответствующее вершине, в которую заходит последняя дуга этого пути, исполнив команды, соответствующие меткам дуг указанного пути в порядке их следования.

Проведем доказательство индукцией по длине пути.

При $n = 1$ имеем путь, содержащий некоторую стартовую дугу $(q_0,\ r)$, метка которой есть $(q_0,\ a,\ \gamma)$ или $(q_0,\ \lambda,\ \gamma)$. В первом случае входной меткой данного пути будет символ a. Переход по этой дуге соответствует выполнению МП-автоматом команды $q_0 a Z_0 \to r\gamma$, выполнение которой означает, что МП-автомат прочитал со входной ленты символ a и перешел в состояние r. Во втором случае меткой пути будет пустая цепочка, а переход по этой дуге соответствует выполнению каманды $q_0 \lambda Z_0 \to r\gamma$, при выполнении которой с формальной точки зрения со входной ленты также считывается пустая цепочка. Таким образом, при $n = 1$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение справедливо для всех путей длины $n - 1$, магазинная метка которых определена, а первая дуга является стартовой.

Рассмотрим некоторый путь длины n, магазинная метка которого определена, ведущий из стартовой вершины q_0 в некоторую вершину p, последняя дуга которого, ведущая из некоторой вершины r_{n-1}, имеет метку $(Y,\ b,\ \alpha)$, где b — символ входного алфавита или пустая цепочка.

Так как магазинная метка всего пути считается определенной, то определена и магазинная метка пути из q_0 в r_{n-1}. Пусть входная метка этого пути равна x и, согласно индуктивному предположению, есть цепочка символов, прочитанная МП-автоматом со входной ленты к моменту, когда МП-автомат пришел в состоянии r_{n-1}. Тогда метка всего рассматриваемого пути длины n из q_0 в p равна xb.

Покажем, эта метка и есть цепочка символов, прочитанная МП-автоматом со входной ленты к моменту, когда МП-автомат пришел в состоянии p.

Действительно, если цепочка x была прочитана со входной ленты к моменту, когда МП-автомат пришел в состояние r_{n-1}, а следующей командой, переводящей МП-автомат из состояния r_{n-1} в состояние p, будет команда $r_{n-1}bY \to p\alpha$, то при ее выполнении со входной ленты будет прочитан b — символ входного алфавита или пустая цепочка. Следовательно, МП-автомат, придя в состояние p, прочитает со входной ленты цепочку xb, совпадающую с входной меткой рассматриваемого пути, что и требовалось доказать.

Таким образом, в мультиграфе МП-автомата любая входная метка x пути с указанными выше свойствами, заканчивающегося в одном из заключительных состояний, есть слово, принадлежащее языку, допускаемому МП-автоматом.

С другой стороны, пусть входная цепочка x принадлежит языку, допускаемому МП-автоматом. Это означает, что существует конечная последовательность команд МП-автомата, выполнение которой переводит МП-автомат, на входной ленте которого записана цепочка x, из стартового состояния в одно из заключительных состояний, причем в заключительном состоянии магазин МП-автомат становится пустым, а цепочка x полностью считывается со входной ленты.

Покажем, что этой последовательности команд соответствует путь в мультиграфе МП-автомата, магазинная метка которого определена и равна λ, а входная метка есть в точности цепочка x.

Если $x = \lambda$, то в множестве команд δ должна быть команда $q_0\lambda Z_0 \to q_f\lambda$, $q_f \in F$.

Тогда в мультиграфе МП-автомата имеется дуга $(q_0,\ q_f)$ с меткой $(Z_0,\ \lambda,\ \lambda)$. Путь, состоящий из этой дуги, заканчивается в одном из заключительных состояний, его входная метка равна λ, и магазинная метка равна λ. Следовательно, пустое слово, если оно принадлежит языку, допускаемому МП-автоматом, также будет принадлежать языку, получаемому по мультиграфу МП-автомата.

Если $x = x(1)$ — непустое слово языка МП-автомата, состоящее из одной буквы, то множестве команд δ должна быть команда $q_0x(1)Z_0 \to q_f\lambda$, $q_f \in F$.

Тогда в мультиграфе МП-автомата имеется дуга $(q_0,\ q_f)$ с меткой $(Z_0,\ x(1),\ \lambda)$. Путь, состоящий из этой дуги, заканчивается в одном из заключительных состояний, его входная метка равна $x(1)$, а магазинная метка равна λ. Следовательно, однобуквенное слово, если оно принадлежит языку, допускаемому МП-автоматом, также будет принадлежать языку, получаемому по мультиграфу МП-автомата.

Предположим, слово $x = x(1)\ldots x(n)$, $n \geq 2$, принадлежит языку, допускаемому МП-автоматом. Тогда имеется последовательность команд МП-автомата $\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m$, $m \geq n$, выполняемая при распознавании этого слова. Каждой команде из этой последовательности соответствует дуга в мультиграфе МП-автомата с соответствующей меткой, причем любым двум последовательно выполняемым командам δ_i и δ_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, соответствуют смежные дуги. Таким образом, рассматриваемой последовательности команд соответствует путь длины m в мультиграфе МП-автомата.

Пусть команды имеют вид $q\,a\,Z \to p\gamma$ и $p\,b\,Y \to r\beta$, где a, b — символы входного алфавита или пустые цепочки. Соответствующие им дуги имеют метки $(Z,\ a,\ \gamma)$ $(Y,\ b,\ \beta)$ соответственно. Поскольку эти команды выполняются последовательно, то $\gamma = Y\gamma^{'}$. Следовательно, определен результат Y-сцепления магазинных меток дуг:

$$\gamma \otimes_Y \beta = \beta(Y^{-1}\gamma) = \beta\gamma^{'}.$$

Индукцией по длине пути можно показать, что определена магазинная метка всего пути. Согласно установленному выше свойству магазинных меток, она будет равна λ.

Входная метка пути будет состоять из символов, записанных на входной ленте, в порядке их следования, перемежающихся, возможно, пустыми цепочками. После удаления пустых цепочек получим входную метку в виде $x = x(1)\ldots x(n)$.

Таким образом, любое слово языка, допускаемого МП-автоматом, может быть получено как входная метка пути с указанными выше свойствами в мультиграфе МП-автомата. ▶

Таким образом, установлена эквивалентность МП-автоматов и представляющих их мультиграфов.

3. Пример представления МП-автомата мультиграфом

Рассмотрим МП-автомат

$$M_1 = (\{q_0,\ q_1,\ q_2\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ Z\},\ q_0,\ \delta,\ Z), \tag{2}$$

где система команд δ имеет вид

$$\begin{aligned} &q_0\,a\,Z \to q_0\,aZ,\\ &q_0\,a\,a \to q_0\,aa,\\ &q_0\,b\,a \to q_1\,\lambda,\\ &q_1\,b\,a \to q_1\,\lambda,\\ &q_1\lambda Z \to q_2\,\lambda. \end{aligned}$$

Этот МП-автомат является распознавателем для КС-языка для $L_1 = \{a^n b^n\colon\ n \geq 0\}$. Мультиграф МП-автомата (2) представлен на рис. 1.

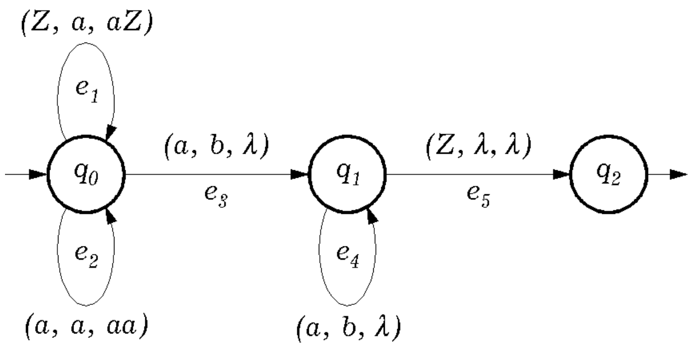

Рис. 1. Мультиграф МП-автомата (2)

Анализ мультиграфа показывает, что дуга e_1 с меткой $(Z,\ a,\ aZ)$ не может быть сцеплена сама с собой, так как выражение $aZ \otimes_Z aZ = aZ(Z^{-1}aZ)$ не определено. Но верхняя петля e_1 в начальной вершине q_0 может «сцепиться» с нижней петлей e_2, а последняя сцепляется сама с собой. Например,

$$aZ \otimes_a aa = aa(a^{-1}aZ) = aaZ;\ aaZ \otimes_a aa = aa(a^{-1}aaZ) = aaaZ.$$

С содержательной точки зрения любой путь $e_1(e_2)^{n-1}$ соответствует переписыванию с ленты МП-автомата в магазин n символов a. Тогда путь $e_1(e_2)^{n-1}e_3(e_4)^{n-1}e_5$ имеет входную метку $a^n b^n$ и магазинную метку λ.

Получить магазинную метку, соответствующую, например, входной метке $aaabbb$, можно следующим образом:

$$\begin{aligned}&((((((aZ \otimes_a aa) \otimes_a aa) \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_Z \lambda) = \\ &\quad = (((((aaZ \otimes_a aa) \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_Z \lambda) = ((((aaaZ \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_Z \lambda) = \\ &\qquad = (((aaZ \otimes_a \lambda) \otimes_a \lambda) \otimes_Z \lambda) = ((aZ \otimes_a \lambda) \otimes_Z \lambda) = Z \otimes_Z \lambda = \lambda.\end{aligned}$$

Если анализируемая цепочка символов не является допустимой и в ней, например, символов a на k больше, чем символов b, то, вычисляя магазинную метку соответствующего пути, придем к выражению $a^k \otimes_Z \lambda$, которое не определено.

Если же в цепочке больше символов b, чем a, то соответствующий путь не приведет в заключительную вершину, так как в рассматриваемом мультиграфе нет дуги с меткой, первая компонента которой равна Z, а вторая — b.

Обратим внимание, что если забыть о магазинных метках и рассматривать мультиграф, представленный на рис. 1, как ориентированный взвешенный граф обычного конечного автомата (см. [1]), метками дуг которого являются средние компоненты меток мультиграфа, то язык такого конечного автомата будет описываться регулярным выражением a^*b^+.

Таким образом, вычисление магазинных меток вдоль путей мультиграфа и выбор только тех путей, магазинная метка которых определена, позволяют «отфильтровать»множество входных цепочек, допускаемых автоматом. При этом в указанном регулярном языке выделяется подмножество более сложной структуры, то есть формируется КС-язык.

4. Регулярность магазинных цепочек

Конфиграцией МП-автомата называют упорядоченную тройку вида $(q,\ x,\ \beta)$, где q — текущее состояние, x — непрочитанная к текущему такту работы часть входной цепочки, β — текущее содержимое магазина.

Говорят, что из конфигурации $(q,\ x,\ \beta)$ выводима конфигурация $(r,\ y,\ \gamma)$, где $x = wy$, если существует последовательность команд МП-автомата, при выполнении которой МП-автомат переходит из состояния q в состояние r, считывая со входной ленты подцепочку w и заменяя содержимое магазина с цепочки β на цепочку γ. Пишут

$$(q,\ x,\ \beta) \vdash^* (r,\ y,\ \gamma).$$

Докажем, используя построенное мультиграфовое представление МП-автомата, следующий интересный факт.

Теорема 2. Множество всех цепочек, которые могут появляться в магазине МП-автомата, регулярно.

◄ Множество, о котором идет речь, можно задать в виде

$$STACK(M) = \{\alpha\colon (\exists x \in V^*)(\exists r \in Q)((q_0,\ x,\ Z_0) \vdash^* (r,\ \lambda,\ \alpha))\}$$

Это множество магазинных меток всех путей, начинающихся со стартовой дуги.

Рассмотрим в мультиграфе МП-автомата некоторый путь w, магазинная метка которого $STACK(w)$ определена. Пусть w есть последовательность дуг $e_1, \ldots, e_n$, которой соответствует последовательность меток

$$(Z_1,\ a_1,\ \gamma_1)\ldots(Z_{k-1},\ a_{k-1},\ \gamma_{k-1})(Z_k,\ a_k,\ \gamma_k)\ \ldots\ (Z_n,\ a_n,\ \gamma_n).$$

Тогда

$$STACK(w) = ((\ldots((\ldots(\gamma_1 \otimes_{Z_1} \gamma_2) \otimes_{Z_2} \ldots)\gamma_{k-1} \otimes_{Z_{k-1}} \gamma_k)\ldots) \otimes_{Z_n} \gamma_n) = \\ = \gamma_n(Z_{n-1}^{-1}\gamma^{n-1})\ldots(Z_k^{-1}\gamma_k)(Z_{k-1}^{-1}\gamma_{k-1})\ldots(Z_1^{-1}\gamma_1). \quad (3)$$

Заметим, что для любого конечного пути w, магазинная метка которого определена, результатом вычисления по формуле (3) будет некоторая конечная последовательность символов.

Если мультиграф не содержит контуров, то в нем имеется конечное число различных путей, начинающихся со стартовых дуг, и соответственно, конечным будет множество магазинных меток. Следовательно, в этом случае множество магазинных цепочек регулярно.

Если же мультиграф содержит хотя бы один контур, требуется дополнительное исследование. Назовем контур $e_1, \ldots, e_m$, магазинная метка которого определена, и определен результат $\otimes_Z$-сцепления магазинной метки дуги e_m с магазинной меткой дуги e_1, *самосцепляющимся*.

Рассмотрим самосцепляющейся контур $e_1, \ldots, e_m$, в котором дуга e_1 исходит из вершины q, а дуга e_m заходит в эту вершину. Пусть магазинная метка этого контура равна γ. Тогда из условия самосцепления следует, что магазинная метка дуги e_1 контура, исходящей из вершины q, равна $Z = \gamma(1)$. Тогда магазинная метка пути, состоящего из n-кратного повторения контура ($n > 0$), равна $\gamma(Z^{-1}\gamma)^{n-1}$.

Следовательно, множество магазинных меток всех путей, состоящих из повторений данного контура, число которых не меньше 1, есть регулярное множество $\gamma(Z^{-1}\gamma)^*$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что регулярным будет множество магазинных меток всех путей, полученных повторениями некоторого самосцепляющегося пути.

Рассмотрим более общий случай. Пусть некоторый конечный путь w содержит самосцепляющийся контур, а магазинная метка этого пути (при проходе без повторений) определена.

Разобъем путь w на путь w_1, состоящий из дуг $e_1, \ldots, e_{k-1}$, на самосцепляющийся контур w_2, включающий дуги $e_k, \ldots, e_n$, и путь w_3, включающий остальные дуги $e_{n+1}, \ldots, e_m$.

Обозначим через $\gamma_{1,k-1}$ и $\gamma_{k,n}$ магазинные метки путей w_1, w_2 соответственно, где

$$\gamma_{1,k-1} = \gamma_{k-1}(Z_{k-2}^{-1}\gamma_{k-2}) \ldots (Z_1^{-1}\gamma_1), \quad \gamma_{k,n} = \gamma_n(Z_{n-1}^{-1}\gamma_{n-1}) \ldots (Z_k^{-1}\gamma_k).$$

Поскольку путь w есть соединение путей w_1 и w_2, то

$$STACK(w_1w_2) = STACK(w_1) \otimes_{Z_k} STACK(w_2),$$

где Z_k — первая компонента метки первой дуги пути w_2.

Обозначим через $STACK(w_2^*)$ множество магазинных цепочек, получаемых при повторении контура w_2 любое число раз. Тогда

$$STACK(w_1w_2^*) = STACK(w_1) \otimes_{Z_k} STACK(w_2^*).$$

Заметим, что $STACK(w_1)$ есть конечная последовательность символов, поскольку это магазинная метка конечного пути. Как было доказано выше, множество $STACK(w_2^*)$ регулярно, то есть задает некоторый регулярный язык.

Известно (см. $[1,3]$), что для любого регулярного языка L в произвольном алфавите V и любого $a \in V$ язык

$$a^{-1}L = \{a^{-1}x\colon x \in L\}$$

является регулярным.

Следовательно, множество $STACK(w_1w_2^*)$ является регулярным, а значит, и множество $STACK(w_1w_2^*w_3)$ будет регулярным.

Отметим, что число прохождений самосцепляющихся контуров (если они входят в данный путь), может быть произвольным (в зависимости от входной цепочки). Поскольку для описания множества магазинных меток таких путей, возникающих при прохождении по контурам, может быть использована итерация, это множество будет регулярным.

Из полученных результатов вытекает регулярность множества $STACK(M)$ всех магазинных цепочек. ►

Если ограничиться рассмотрением путей, оканчивающихся в заключительных вершинах (или путей с пустой магазинной меткой), то, как было показано выше, число прохождений контуров, входящих в путь, оказывается определенным образом ограниченным. Следовательно, и множество входных цепочек, читаемых на таких путях, не будет, вообще говоря, регулярным.

Заметим также, что множество всех входных цепочек x, фигурирующих в определении множества $STACK(M)$, то есть множество всех входных цепочек, читаемых на каком-то пути, начинающемся со стартовой дуги, для которого определена магазинная метка, также регулярно.

Заключение

Предложенное представление МП-автомата мультиграфом оказалось достаточно удобным инструментом теоретического анализа, позволяющим исследовать свойства МП-автомата, опираясь на известные результаты теории взвешенных графов.

Установленная эквивалентность МП-автоматов и их мультиграфов открывает возможности использования алгоритмов на графах для решения задач анализа и синтеза МП-автоматов.

Список литературы

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 744 с.
2. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции: Пер. с англ: В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1978. – 612 с.
3. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 528 с.
4. Пентус А.Е., Пентус М.Р. Математическая теория формальных языков. – М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. - 247 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Presentation of push-down automation as oriented multigraphs

09, September 2012

DOI: 10.7463/0912.0460973

Belousov A. I., Tkachev S. B.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

In the paper the presentation of push-down automation as oriented multigraphs is described. The language of push-down automata, which is represented by its multigraph, is defined and equivalence of this definition with standard one is proved. In terms of this representation some properties of push-down automata (such as regularity of push-down stack strings set) are considered.

References

1. Belousov A.I., Tkachev S.B. *Diskretnaia matematika* [Discrete mathematics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 744 p.
2. Aho A.V., Ullman J.D. *The Theory of Parsing, Translation, and Compilin. Vol. 1. Parsing.* Prentice Hall, 1972. (Russ. ed.: Akho A., Ul'man Dzh. *Teoriia sintaksicheskogo analiza, perevoda i kompiliatsii. V 2 t. T. 1. Sintaksicheskii analiz.* Moscow, Mir, 1978. 612 p.).
3. Hopcroft John E., Motwani R., Ullman J.D. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. (Russ. ed.: Khopkroft Dzh., Motvani R., Ul'man Dzh. *Vvedenie v teoriiu avtomatov, iazykov i vychislenii*. Moscow, Izdatel'skii dom "Vil'iams", 2002. 528 p.).
4. Pentus A.E., Pentus M.R. *Matematicheskaia teoriia formal'nykh iazykov* [The mathematical theory of formal languages]. Moscow, Internet-universitet informatsionnykh tekhnologii Publ.; BINOM. Laboratoriia znanii, 2006. 247 p.