НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Стабилизация однозвенного манипулятора при неполном измерении состояния: обратная связь по угловой координате вала двигателя

 # 12, декабрь 2012

DOI: 10.7463/1212.0500563

Голубев А. Е.

УДК 519.71

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

1. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора, уравнения движения которого имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -b_1 x_4 + k_2(x_1 - x_3) + u/J, \end{aligned} \tag{1}$$

где x_1, x_2 — угловая координата и угловая скорость звена манипулятора соответственно; x_3, x_4 — угловая координата и угловая скорость вала двигателя; u — управляющий момент, создаваемый двигателем; $Mgl \sin x_1$ — момент силы тяжести, действующий на звено манипулятора. Константы M_1, b_1, k_1, k_2, J положительны, притом $M_1 = Mgl/I$, $k_1 = k/I$, $k_2 = k/J$, $b_1 = d/J$, где I, J — моменты инерции звена манипулятора и ротора двигателя соответственно; k — жесткость передаточного механизма; d — коэффициент демпфирования; M — масса звена манипулятора.

В работе [1] задача стабилизации заданного углового положения манипулятора решена при условии, что измерениям доступна только угловая координата x_1 звена манипулятора. В настоящей работе рассматривается случай, когда измерениям доступна только угловая координата x_3 вала двигателя, т.е. измеряемый выход системы (1) имеет вид $y = x_3$.

В качестве стабилизируемого углового положения манипулятора без ограничения общности рассматривается положение, в котором $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Для решения задачи управления требуется построить закон управления в виде обратной связи, использующей значения только измеряемого выхода системы, глобально стабилизирующий положение равновесия $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = 0$, $u = 0$ системы (1).

В настоящей работе показано, что, также как и в случае доступности измерениям только угловой координаты звена манипулятора, рассматриваемая задача стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора может быть решена с помощью использования нелинейного принципа разделения [2] и метода обхода интегратора в наблюдателе [2, 3].

2. Синтез наблюдателя и обратной связи по состоянию

Построим для системы (1) с рассматриваемым выходом $y = x_3$ асимптотический наблюдатель. Используем для удобства новые переменные

$$\begin{aligned} &\eta_1 = x_3, \quad \eta_2 = x_4, \quad \eta_3 = k_2 x_1 - k_2 x_3 - b_1 x_4, \\ &\eta_4 = -k_2 b_1 x_1 + k_2 x_2 + k_2 b_1 x_3 + (b_1^2 - k_2) x_4. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что замена переменных $x = \Xi(\eta)$, $\Xi(0) = 0$, определяемая соотношениями (2), является линейной и задает диффеоморфизм пространств $\mathbb{R}^4 = \{\eta\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{x\}$.

В новых переменных η система (1) с рассматриваемым выходом имеет вид

$$\begin{aligned} \dot\eta_1 &= \eta_2, \\ \dot\eta_2 &= \eta_3 + u/J, \\ \dot\eta_3 &= \eta_4 - b_1 u/J, \\ \dot\eta_4 &= a_4(\eta) + (b_1^2 - k_2) u/J, \\ y &= \eta_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния системы; $a_4(\eta) = -b_1 k_1 \eta_2 - (k_1 + k_2)\eta_3 - b_1 \eta_4 + k_2 M_1 \sin\left((k_2\eta_1 + b_1\eta_2 + \eta_3)/k_2\right)$.

Согласно работам [2, 4, 5] асимптотический наблюдатель для системы (3) имеет вид

$$\dot{\hat{\eta}} = A\hat{\eta} + LC(\hat{\eta} - \eta) + a(\hat{\eta}) + Bu, \tag{4}$$

где $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4)^{\mathrm{т}}$; $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, — квадратная матрица порядка 4 с элементами $a_{ij} = 1$, если $j - i = 1$, и $a_{ij} = 0$, если $j - i \neq 1$; $a(\hat{\eta}) = (0, 0, 0, a_4(\hat{\eta}))^{\mathrm{т}}$; $B = (0, 1/J, -b_1/J, (b_1^2 - k_2)/J)^{\mathrm{т}}$; $C = (1, 0, 0, 0)$. В наблюдателе (4) вектор $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)^{\mathrm{т}}$ коэффициентов усиления имеет вид $L = (\theta g_1, \theta^2 g_2, \theta^3 g_3, \theta^4 g_4)^{\mathrm{т}}$, где $\theta > 1$ — произвольный достаточно большой положительный параметр, а вектор $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)^{\mathrm{т}}$ выбирается таким образом, что матрица $A + GC$ имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями. Указанный выбор вектора G возможен, так как пара (A, C) наблюдаема [6].

В переменных $\hat{x} = \Xi(\hat{\eta})$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)^{\mathrm{т}}$, система (4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + (\theta^3 g_3/k_2 + \theta g_1 + b_1\theta^2 g_2/k_2)(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_2 = M_1 \sin \hat{x}_1 - k_1(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) + \\
&\qquad\qquad\qquad + (\theta^4 g_4/k_2 + \theta^2 g_2 + b_1\theta^3 g_3/k_2)(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_4 = -b_1\hat{x}_4 + k_2(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) + \theta^2 g_2(\hat{x}_3 - x_3) + u/J.
\end{aligned} \tag{5}$$

Так как отображение Ξ, определяемое соотношениями (2), является диффеоморфизмом пространств $\mathbb{R}^4 = \{\eta\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{x\}$, система (5) представляет собой асимптотический наблюдатель для системы (1) с рассматриваемым выходом $y = x_3$.

Система, описывающая динамику ошибки $e = \hat{x} - x$, с которой наблюдатель (5) оценивает состояние системы (1) с рассматриваемым выходом, имеет следующий вид:

$$\dot{e} = \tilde{A}e + \varphi(x + e) - \varphi(x), \tag{6}$$

где $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, — квадратная матрица порядка 4, притом $\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{34} = 1$, $\tilde{a}_{13} = \theta^3 g_3/k_2 + \theta g_1 + b_1\theta^2 g_2/k_2$, $\tilde{a}_{21} = -k_1$, $\tilde{a}_{23} = \theta^4 g_4/k_2 + \theta^2 g_2 + b_1\theta^3 g_3/k_2 + k_1$, $\tilde{a}_{33} = \theta g_1$, $\tilde{a}_{14} = k_2$, $\tilde{a}_{43} = \theta^2 g_2 - k_2$, $\tilde{a}_{44} = -b_1$, а остальные элементы нулевые; $\varphi(x) = (0, M_1 \sin x_1, 0, 0)^{\mathrm{т}}$.

Согласно работам [2, 4, 5] в силу линейности замены переменных (2) при произвольном достаточно большом параметре $\theta > 1$ и произвольном решении $x = x(t)$ системы (1), определенном при всех $t \geq 0$, положение равновесия $e = 0$ системы (6) экспоненциально устойчиво в целом. Функцией Ляпунова для системы (6) является квадратичная функция $W(e) = e^{\mathrm{т}}\tilde{P}e$, производная по времени которой в силу системы (6) удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}(e) \leq -\lambda\|e\|^2.$$

Здесь $\tilde{P} = \tilde{P}^{\mathrm{т}} > 0$ — соответствующая симметрическая положительно определенная матрица; $\lambda > 0$ — некоторая положительная постоянная; $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^4$.

Далее найдем закон управления в виде непрерывно дифференцируемой обратной связи по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующий положение равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (1) (без выхода), с помощью метода нелинейной стабилизации, рассмотренного в работе [7]. Преобразование системы (1) к каноническому виду определяется функцией $\phi(x) = x_1$. Дифференцируя эту функцию в силу системы (1), находим новые переменные для записи системы канонического вида

$$\begin{aligned} &\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = \dot{\xi}_1 = x_2, \quad \xi_3 = \dot{\xi}_2 = M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3), \\ &\xi_4 = \dot{\xi}_3 = M_1 x_2 \cos x_1 - k_1 x_2 + k_1 x_4. \end{aligned} \tag{7}$$

В переменных ξ система (1) без выхода имеет канонический вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \tilde{f}(\xi) + k_1 u/J, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^{\mathrm{т}}$ — вектор состояния системы; $\tilde{f}(\xi) = k_2 M_1 \sin\xi_1 + M_1 \cos\xi_1(\xi_3 + b_1\xi_2) - M_1\xi_2^2 \sin\xi_1 - (k_1 + k_2)\xi_3 - b_1 k_1 \xi_2 - b_1\xi_4$.

Соотношение $\xi = \tilde{\Psi}^{-1}(x)$, $\tilde{\Psi}^{-1}(0) = 0$, имеющее вид (7), разрешимо относительно x, $x = \tilde{\Psi}(\xi)$, и задает отображение, являющееся диффеоморфизмом пространств $\mathbb{R}^4 = \{x\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{\xi\}$, притом функции $\xi = \tilde{\Psi}^{-1}(x)$ и $x = \tilde{\Psi}(\xi)$

таковы, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\|\xi\| = \|\tilde{\Psi}^{-1}(x)\| \leq \gamma_{\tilde{\Psi}^{-1}}\|x\|, \quad \|x\| = \|\tilde{\Psi}(\xi)\| \leq \gamma_{\tilde{\Psi}}\|\xi\|, \tag{9}$$

где $\gamma_{\tilde{\Psi}}$, $\gamma_{\tilde{\Psi}^{-1}}$ — некоторые положительные константы.

Следовательно, задача глобальной экспоненциальной стабилизации положения равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (1) без выхода эквивалентна аналогичной задаче для положения равновесия $\xi = 0$, $u = 0$ системы (8). Непрерывно дифференцируемая обратная связь по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия $\xi = 0$, $u = 0$ системы (8), имеет вид

$$u = k(\xi) = \frac{J}{k_1}\Big(-\tilde{f}(\xi) - \sum_{i=0}^{3} \kappa_i \xi_{i+1}\Big), \quad k(0) = 0, \tag{10}$$

где постоянные $\kappa_i > 0$, $i = \overline{0,3}$, выбираются таким образом, что матрица $A_4 = (a_{ij}^4)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, с элементами $a_{ij}^4 = 1$, если $j - i = 1$, $a_{ij}^4 = -\kappa_{j-1}$, если $i = 4$, и $a_{ij}^4 = 0$, если $j - i \neq 1$ и $i \neq 4$, имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями.

Таким образом, положение равновесия $x = 0$ системы (1) без выхода, замкнутой управлением $u = k(\tilde{\Psi}^{-1}(x))$, экспоненциально устойчиво в целом.

3. Применение нелинейного принципа разделения

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, имеющую общий вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u \in \mathbb{R}^m$ — вход (управление); $y \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход системы; $f(\cdot,\cdot)$ и $h(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов; $f(0,0) = 0$, $h(0) = 0$.

Обозначим через $x_u(t, x_0)$ решение $x = x(t)$ системы (11) с произвольной непрерывной и ограниченной на интервале $[0, +\infty)$ функцией $u = u(t)$ на входе, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Здесь $x_u(0, x_0) = x_0$.

Предположение 1. 1. Система (11) допускает построение наблюдателя

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, h(x), u),\ \ g(0,0,0) = 0, \tag{12}$$

для которого уравнение ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{e} = F(x_u(t, x_0), e, u(t)), \\ &F(x_u(t, x_0), 0, u(t)) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $F(x_u(t, x_0), e, u(t)) = g(x_u(t, x_0) + e, h(x_u(t, x_0)), u(t)) - f(x_u(t, x_0), u(t))$.

2. Положение равновесия $e = 0$ системы (13) с произвольной непрерывной и ограниченной на интервале $[0, +\infty)$ функцией $u(t)$ при произвольном решении $x_u(t, x_0)$ системы (11) с $u = u(t)$ асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 1 ([2]). Пусть: 1) функция $f(x, u)$ в правой части системы (11) глобально липшицева по x равномерно по u; 2) выполняется предположение 1, причем функция $F(x, e, u)$ глобально липшицева по e равномерно по u и x; 3) существует непрерывно дифференцируемая обратная связь $u = k(x)$, $k(0) = 0$ по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия $x = 0, u = 0$ системы (11). Тогда система

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u), \\ &\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, h(x), u), \end{aligned}$$

составленная из уравнений системы (11) и уравнений наблюдателя (12), при управлении $u = k(\hat{x})$ асимптотически устойчива в целом в точке $x = 0$, $\hat{x} = 0$.

Заметим, что для системы (1) с рассматриваемым выходом и наблюдателя (5) выполнены условия теоремы 1. Следовательно, система, составленная из уравнений системы (1) с рассматриваемым выходом и уравнений наблюдателя (5) при управлении $u = k(\tilde{\Psi}^{-1}(\hat{x}))$, где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния системы (5), асимптотически устойчива в целом в точке $x = 0$, $\hat{x} = 0$.

Результаты численного моделирования системы (1) и наблюдателя (5) при управлении $u = k(\tilde{\Psi}^{-1}(\hat{x}))$ представлены на рис. 1 при следующих значениях параметров и начальных данных рассматриваемой системы и наблюдателя: $M = 0.21$ кг, $I = 0.0093$ кг $\cdot$ м^2, $J = 0.0037$ кг $\cdot$ м^2, $k = 0.18$ Н $\cdot$ м $\cdot$ рад$^{-1}$, $d = 0.046$ кг $\cdot$ м$^2 \cdot$ с$^{-1}$, $l = 0.15$ м, $g = 10$ м $\cdot$ с$^{-2}$, $\kappa_0 = 363.4$, $\kappa_1 = 333.6$, $\kappa_2 = 114.7$, $\kappa_3 = 17.5$, $\theta = 2$, $g_1 = -9.5$, $g_2 = -33.7$, $g_3 = -52.8$, $g_4 = -30.9$, $x_1(0) = x_3(0) = 3.14$, $x_2(0) = x_4(0) = 0$, $\hat{x}_1(0) = 2$, $\hat{x}_2(0) = 1.2$, $\hat{x}_3(0) = 3$, $\hat{x}_4(0) = 1.4$.

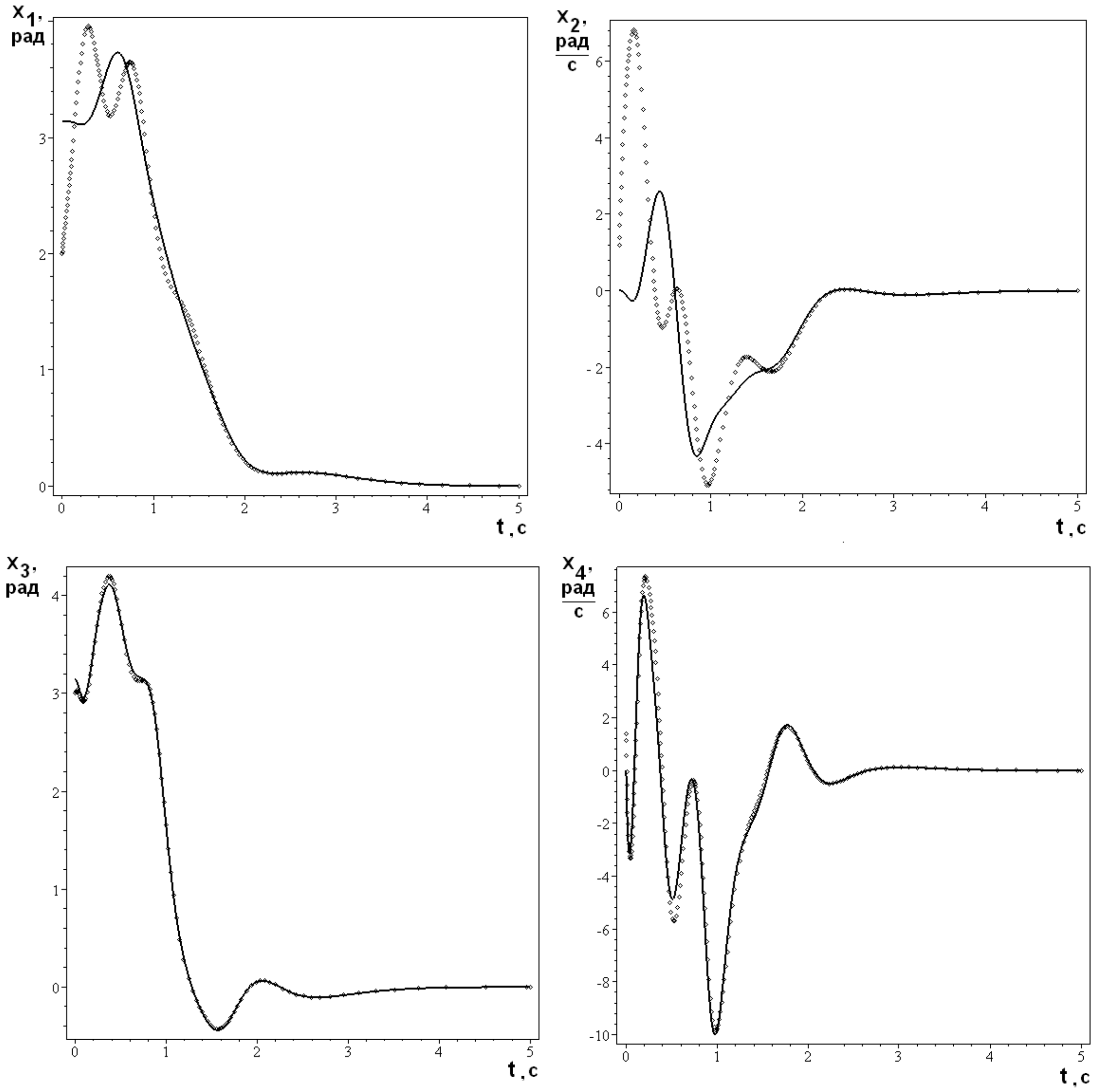

Рис. 1. Переходные процессы системы (сплошная линия) и наблюдателя (пунктир) при управлении $u = k(\tilde{\Psi}^{-1}(\hat{x}))$

4. Метод обхода интегратора в наблюдателе

Обобщим алгоритм построения управления при помощи обхода интегратора в наблюдателе [2, 3] на случай стабилизации системы (1) с рассматриваемым выходом $y = x_3$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_4 = -b_1\hat{x}_4 + k_2(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) + \theta^2 g_2(\hat{x}_3 - x_3) + u/J,\\
&\dot{e} = \tilde{A}e + \varphi(x + e) - \varphi(x),
\end{aligned} \qquad (14)$$

составленную из первых двух уравнений системы (1), последних двух уравнений наблюдателя (5) и уравнений системы (6), описывающей динамику ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (1) наблюдателем (5).

Заметим, что динамическая система (14) в силу линейного соотношения $e = \hat{x} - x$ эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3),\\
&\dot{x}_3 = x_4,\\
&\dot{x}_4 = -b_1 x_4 + k_2(x_1 - x_3) + u/J,\\
&\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + (\theta^3 g_3/k_2 + \theta g_1 + b_1\theta^2 g_2/k_2)(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_2 = M_1 \sin \hat{x}_1 - k_1(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) + \\
&\qquad\qquad + (\theta^4 g_4/k_2 + \theta^2 g_2 + b_1\theta^3 g_3/k_2)(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3),\\
&\dot{\hat{x}}_4 = -b_1\hat{x}_4 + k_2(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) + \theta^2 g_2(\hat{x}_3 - x_3) + u/J,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

состоящей из уравнений системы (1) и наблюдателя (5).

Рассмотрим сначала подсистему, состоящую из первых двух уравнений системы (14). С учетом соотношения $x_3 = \hat{x}_3 - e_3$ данную подсистему можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = M_1 \sin x_1 - k_1 x_1 - k_1 e_3 + k_1 \hat{x}_3.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Используем переменную $\hat{x}_3$ в качестве «виртуального» управления. «Виртуальный» закон управления $\hat{x}_3 = \tilde{\alpha}_2(x_1, x_2)$, $\tilde{\alpha}_2(0,0) = 0$, в виде обратной связи по состоянию, при котором положение равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы (16) с данным «виртуальным» управлением при $e_3(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом, имеет вид

$$
\hat{x}_3 = \tilde{\alpha}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{k_1}(-M_1 \sin x_1 + k_1 x_1 - c_1 x_1 - c_2 x_2),
$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — произвольные положительные постоянные. Следовательно, существуют матрицы $P_2 = P_2^{\text{т}} > 0$ и $Q_2 = Q_2^{\text{т}} > 0$, удовлетворяющие уравнению Ляпунова

$$
A_c^{\text{т}} P_2 + P_2 A_c = -Q_2,
$$

где $A_c = (a_{ij}^c)$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$, — квадратная матрица порядка 2 с элементами $a_{11}^c = 0$, $a_{12}^c = 1$, $a_{21}^c = -c_1$, $a_{22}^c = -c_2$.

Рассмотрим функцию

$$V_2(z_{(1:2)}, e) = \kappa z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 z_{(1:2)} + W(e) > 0,$$

где $z_{(1:2)} = (z_1, z_2)^{\text{т}} = (x_1, x_2)^{\text{т}}$; $\kappa > 0$ — некоторая положительная постоянная, подлежащая определению; $W(e)$ — функция Ляпунова для системы (6), описывающей динамику ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (1) наблюдателем (5).

Подставим в $\tilde{\alpha}_2(x_1, x_2)$ вместо переменных x_1, x_2 их оценки $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, получаемые с помощью наблюдателя (5). Для удобства используем также переменную $z_3 = \hat{x}_3 - \tilde{\alpha}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Тогда производную по времени функции V_2 в силу системы (14) с учетом соотношений $\hat{x}_1 = x_1 + e_1$, $\hat{x}_2 = x_2 + e_2$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(z_{(1:2)}, e) = \kappa z_{(1:2)}^{\text{т}} (A_c^{\text{т}} P_2 + P_2 A_c) z_{(1:2)} + \\ + 2\kappa M_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 (\sin x_1 - \sin \hat{x}_1) + 2\kappa z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 \big((k_1 - c_1) e_1 - c_2 e_2 - \\ - k_1 e_3\big) + 2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 z_3 + \dot{W}(e),\end{aligned}$$

где $B_2 = (0, 1)^{\text{т}}$. Далее имеем

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(z_{(1:2)}, e) \le -\kappa \lambda_{\min}(Q_2) \|z_{(1:2)}\|^2 + 2\kappa M_1 \|z_{(1:2)}\| \, \|P_2\| \|e\| + \\ + 2\kappa \tilde{c} \|z_{(1:2)}\| \, \|P_2\| \, \|e\| - \lambda \|e\|^2 + 2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 z_3 = \\ = -\kappa \lambda_{\min}(Q_2) \Big(\|z_{(1:2)}\| - \frac{(M_1 \|P_2\| + \tilde{c} \|P_2\|)}{\lambda_{\min}(Q_2)} \|e\| \Big)^2 - \\ - \Big(\lambda - \kappa \frac{(M_1 \|P_2\| + \tilde{c} \|P_2\|)^2}{\lambda_{\min}(Q_2)} \Big) \|e\|^2 + 2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 z_3 = \\ = -S_{12} + 2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 z_3.\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{c} = \max\{\|k_1 - c_1\|, c_2, k_1\}$;

$$\begin{aligned}S_{12} = \kappa \lambda_{\min}(Q_2) \Big(\|z_{(1:2)}\| - \frac{(M_1 \|P_2\| + \tilde{c} \|P_2\|)}{\lambda_{\min}(Q_2)} \|e\| \Big)^2 + \\ + \Big(\lambda - \kappa \frac{(M_1 \|P_2\| + \tilde{c} \|P_2\|)^2}{\lambda_{\min}(Q_2)} \Big) \|e\|^2 \ge 0\end{aligned}$$

при

$$\kappa < \frac{\lambda_{\min}(Q_2) \lambda}{(M_1 \|P_2\| + \tilde{c} \|P_2\|)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$V_3(z_1, z_2, z_3, e) = V_2(z_1, z_2, e) + \frac{1}{2}{z_3}^2 + W(e).$$

Для удобства используем далее обозначение $z_4 = \hat{x}_4 - \tilde{\alpha}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_3)$, где $\tilde{\alpha}_3$ — некоторая гладкая функция своих аргументов. Для производной по времени функции V_3 в силу системы (14) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + z_3\dot{z}_3 + \dot{W} \leq -S_{12} + 2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 z_3 + z_3\dot{z}_3 + \dot{W} \leq \\ &\leq -S_{12} + z_3\Big(2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 + \hat{x}_4 + \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3) - \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_1}\dot{\hat{x}}_1 - \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_2}\dot{\hat{x}}_2\Big) - \\ &\qquad - \lambda e_1^2 - \lambda e_2^2 = \\ &= -S_{12} + z_3\Big(2\kappa k_1 z_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 + z_4 + \alpha_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_3) + \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3) - \\ &\qquad - \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_1}\dot{\hat{x}}_1 - \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_2}\dot{\hat{x}}_2\Big) - \lambda e_1^2 - \lambda e_2^2.\end{aligned}$$

Выбрав

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_3) &= -c_3 z_3 - 2\kappa k_1 \hat{x}_{(1:2)}^{\text{т}} P_2 B_2 - \theta g_1(\hat{x}_3 - x_3) + \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_1}\dot{\hat{x}}_1 + \\ &\quad + \frac{\partial\tilde{\alpha}_2}{\partial\hat{x}_2}\dot{\hat{x}}_2 - d_{31}(2\kappa k_1 p_{12})^2 z_3 - d_{32}(2\kappa k_1 p_{22})^2 z_3,\end{aligned}$$

где $\hat{x}_{(1:2)} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^{\text{т}}$; p_{12} и p_{22} соответствующие элементы матрицы $P_2 = (p_{ij})$, $j = \overline{1,2}$, $i = \overline{1,2}$; $c_3 > 0$, $d_{31} > 0$, $d_{32} > 0$ — произвольные положительные константы, получим

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &\leq -S_{12} - c_3 z_3^2 + z_3 z_4 - \Big(d_{31}(2\kappa k_1 p_{12})^2 z_3^2 + 2\kappa k_1 p_{12} z_3 e_1 + \lambda e_1^2\Big) - \\ &\quad - \Big(d_{32}(2\kappa k_1 p_{22})^2 z_3^2 + 2\kappa k_1 p_{22} z_3 e_2 + \lambda e_2^2\Big) = -c_3 z_3^2 + z_3 z_4 - S_{12} - S_3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}S_3 &= \Big(\sqrt{d_{31}}2\kappa k_1 p_{12} z_3 + \frac{1}{2\sqrt{d_{31}}}e_1\Big)^2 + \Big(\lambda - \frac{1}{4d_{31}}\Big)e_1^2 + \\ &\quad + \Big(\sqrt{d_{32}}2\kappa k_1 p_{22} z_3 + \frac{1}{2\sqrt{d_{32}}}e_2\Big)^2 + \Big(\lambda - \frac{1}{4d_{32}}\Big)e_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

при $\lambda > \max\Big\{\frac{1}{4d_{31}}, \frac{1}{4d_{32}}\Big\}$.

Рассмотрим функцию

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4, e) = V_3(z_1, z_2, z_3, e) + \frac{1}{2}{z_4}^2 + W(e) > 0.$$

Для производной по времени функции V_4 в силу системы (14) справедлива оценка

$$\dot V_4 = \dot V_3 + z_4\dot z_4 + \dot W \le -c_3 z_3^2 + z_3 z_4 - S_{12} - S_3 + z_4\dot z_4 + \dot W \le$$
$$\le -c_3 z_3^2 - S_{12} - S_3 + z_4\Bigg(z_3 - b_1\hat x_4 + k_2(\hat x_1 - \hat x_3) + \theta^2 g_2(\hat x_3 - x_3) + \frac{u}{J} -$$
$$- \frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial x_3}(\hat x_4 - e_4) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial\hat x_i}\dot{\hat x}_i\Bigg) - \lambda e_3^2 - \lambda e_4^2.$$

Тогда при выборе закона управления

$$u = \tilde\alpha_4(\hat x, x_3) = J\Bigg(-c_4 z_4 - z_3 + b_1\hat x_4 - k_2(\hat x_1 - \hat x_3) - \theta^2 g_2(\hat x_3 - x_3) +$$
$$+\frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial x_3}\hat x_4 + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial\hat x_i}\dot{\hat x}_i - d_{44}\Big(\frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial x_3}\Big)^2 z_4\Bigg), \qquad (17)$$

где $c_4 > 0$, $d_{44} > 0$ — произвольные положительные константы, для производной по времени функции V_4 в силу замкнутой системы (14) справедлива оценка

$$\dot V_4 \le -c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - \kappa\lambda_{\min}(Q_2)\Big(\|z_{(1:2)}\| - \frac{(M_1\|P_2\| + \tilde c\|P_2\|)}{\lambda_{\min}(Q_2)}\|e\|\Big)^2 -$$
$$-\Big(\lambda - \kappa\frac{(M_1\|P_2\| + \tilde c\|P_2\|)^2}{\lambda_{\min}(Q_2)}\Big)\|e\|^2 -$$
$$-\Big(\sqrt{d_{31}}2\kappa k_1 p_{12} z_3 + \frac{1}{2\sqrt{d_{31}}}e_1\Big)^2 - \Big(\lambda - \frac{1}{4d_{31}}\Big)e_1^2 -$$
$$+\Big(\sqrt{d_{32}}2\kappa k_1 p_{22} z_3 + \frac{1}{2\sqrt{d_{32}}}e_2\Big)^2 - \Big(\lambda - \frac{1}{4d_{32}}\Big)e_2^2 -$$
$$-\Big(\sqrt{d_{44}}\frac{\partial\tilde\alpha_3}{\partial x_3}z_4 - \frac{1}{2\sqrt{d_{44}}}e_4\Big)^2 - \Big(\lambda - \frac{1}{4d_{44}}\Big)e_4^2 - \lambda e_3^2.$$

При

$$\lambda > \max\Big\{\kappa\frac{(M_1\|P_2\| + \tilde c\|P_2\|)^2}{\lambda_{\min}(Q_2)}, \frac{1}{4d_{31}}, \frac{1}{4d_{32}}, \frac{1}{4d_{44}}\Big\}$$

справедливо неравенство

$$\dot V_4 \le -\kappa\lambda_{\min}(Q_2)z_1^2 - \kappa\lambda_{\min}(Q_2)z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - \tilde\lambda\sum_{i=1}^{4}e_i^2, \qquad (18)$$

где $\tilde\lambda = \min\Big\{\lambda, \lambda - \frac{1}{4d_{31}}, \lambda - \frac{1}{4d_{32}}, \lambda - \frac{1}{4d_{44}}\Big\} > 0.$

Соотношения

$$z_1 = x_1, \ \ z_2 = x_2, \ \ z_3 = \hat{x}_3 - \tilde{\alpha}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \ \ z_4 = \hat{x}_4 - \tilde{\alpha}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_3), \ \ e = e$$

представляют собой гладкую замену переменных, определенную глобально. В переменных z_i, $i = \overline{1,4}$, и e система (14), замкнутая управлением (17), примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2,\\
&\dot{z}_2 = M_1(\sin z_1 - \sin(z_1 + e_1)) - c_1 z_1 - c_2 z_2 + k_1 z_3 + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (k_1 - c_1)e_1 - c_2 e_2 - k_1 e_3,\\
&\dot{z}_3 = -c_3 z_3 - d_{31}(2\kappa k_1 p_{12})^2 z_3 - d_{32}(2\kappa k_1 p_{22})^2 z_3 - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - d_{31} 2\kappa k_1 p_{12} e_1 - d_{32} 2\kappa k_1 p_{22} e_2,\\
&\dot{z}_4 = -c_4 z_4 - z_3 - d_{44}\Big(\frac{\partial \tilde{\alpha}_3}{\partial x_3}\Big)^2 z_4 + \frac{\partial \tilde{\alpha}_3}{\partial x_3} e_4,\\
&\dot{e} = (A + LC)e,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^4$,

Положение равновесия $z = 0$, $e = 0$ системы (19) экспоненциально устойчиво в целом. Тогда, так как $\tilde{\alpha}_2(0) = 0$, $\tilde{\alpha}_3(0) = 0$, положение равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\hat{x}_3 = 0$, $\hat{x}_4 = 0$, $e = 0$ системы (14), замкнутой управлением (17) асимптотически устойчиво в целом. В силу соотношения $x = \hat{x} - e$ положение равновесия $x = 0$, $\hat{x} = 0$ системы (15) при управлении (17) также асимптотически устойчиво в целом.

Результаты численного моделирования системы (1) и наблюдателя (5) при управлении $u = \tilde{\alpha}_4(\hat{x}, x_3)$ представлены на рис. 2 при следующих значениях параметров и начальных данных рассматриваемой системы и наблюдателя: $M = 0.21$ кг, $I = 0.0093$ кг $\cdot$ м^2, $J = 0.0037$ кг $\cdot$ м^2, $k = 0.18$ Н $\cdot$ м $\cdot$ рад$^{-1}$, $d = 0.046$ кг $\cdot$ м$^2 \cdot$ с$^{-1}$, $l = 0.15$ м, $g = 10$ м $\cdot$ с$^{-2}$, $c_1 = 6$, $c_2 = 6$, $c_3 = 6$, $c_4 = 6$, $d_{31} = 10^{-2}$, $d_{32} = 10^{-2}$, $d_{44} = 10^{-2}$, $\kappa = 10^{-3}$, $p_{12} = 1/4$, $p_{22} = 3/8$, $\theta = 2$, $g_1 = -9.5$, $g_2 = -33.7$, $g_3 = -52.8$, $g_4 = -30.9$, $x_1(0) = x_3(0) = 3.14$, $x_2(0) = x_4(0) = 0$, $\hat{x}_1(0) = 2$, $\hat{x}_2(0) = 1.2$, $\hat{x}_3(0) = 3$, $\hat{x}_4(0) = 1.4$.

5. Заключение

В настоящей работе рассмотрено решение задачи стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора в случае, когда измерениям

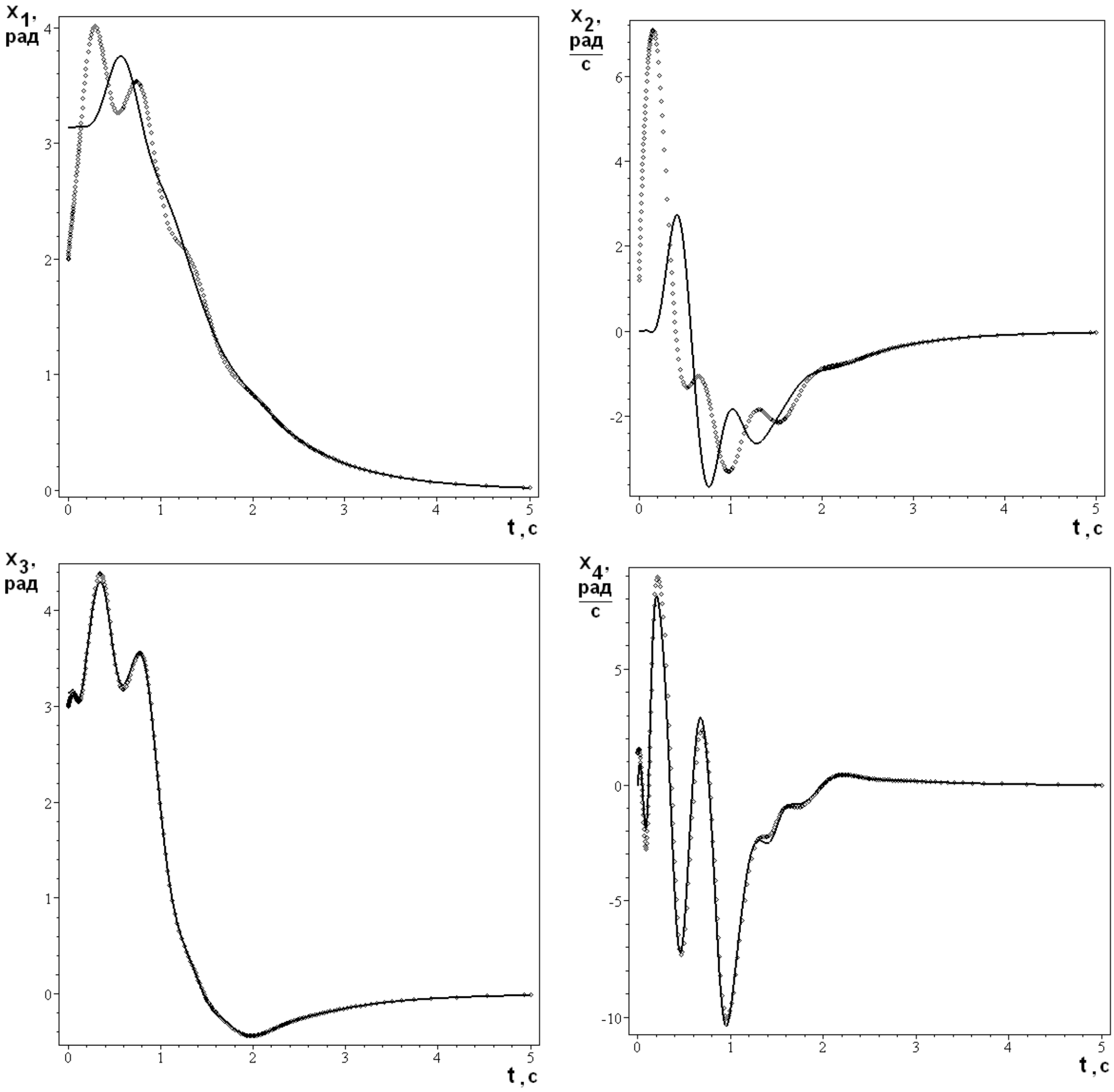

Рис. 2. Переходные процессы системы (сплошная линия) и наблюдателя (пунктир) при управлении $u = \tilde{\alpha}_4(\hat{x}, x_3)$

доступна только угловая координата вала двигателя. Показано, что синтез стабилизирующих законов управления, так же как и в случае доступности измерениям только угловой координаты звена манипулятора [1], может быть осуществлен при помощи принципа разделения, а также метода обхода интегратора в наблюдателе.

По результатам численного моделирования можно сделать вывод о приблизительно одинаковом при рассмотренных начальных данных и использовании одного и того же наблюдателя качестве переходных процессов системы с управлением, найденным при помощи метода обхода интегратора в наблюдателе, и управлением, основанном на принципе разделения и методе линеаризации обратной связью по состоянию.

Возможность применения метода обхода интегратора к рассматриваемой задаче стабилизации позволяет решать данную задачу также и в случае наличия в системе возмущений и неопределенностей [3].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №11-01-00733, №12-07-329 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант №НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Голубев А.Е. Стабилизация однозвенного манипулятора при неполном измерении состояния: обратная связь по угловой координате звена манипулятора // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 11. DOI: 10.7463/1112.0500549.
2. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 3–42.
3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
4. Gauthier J.P., Hammouri H., Othman S. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors // IEEE Trans. on Autom. Control. 1992. Vol. 37, no. 6. P. 875–880.
5. Gauthier J.P., Kupka I. Observability and observers for nonlinear systems // SIAM J. Control and Optimization. 1994. Vol. 32, no. 4. P. 975–994.
6. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
7. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 103–112.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Single-Link Manipulator Output Feedback Control: Motor Side Angular Coordinate Feedback

12, December 2012
DOI: 10.7463/1212.0500563
Golubev A. E.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
mathmod@bmstu.ru

In this note a regulation problem for the flexible single-link manipulator is considered. Only the motor side angular position is supposed to be physically measured. The stabilizing control laws are synthesized using two different approaches. First, the separation principle is applied. The state feedback control law is found using the feedback linearization technique. Then, the observer backstepping procedure is used to stabilize the system in question. Both control design methods are compared through simulation.

References

1. Golubev A.E. Stabilizatsiia odnozvennogo manipuliatora pri nepolnom izmerenii sostoianiia: obratnaia sviaz' po uglovoi koordinate zvena manipuliatora [Single-link manipulator output feedback control: manipulator link angular coordinate feedback]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 11. DOI: 10.7463/1112.0500549.
2. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Stabilizatsiia nelineinykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem otsenki sostoianiia sistemy asimptoticheskim nabliudatelem (obzor) [Stabilization of nonlinear dynamic systems with the use of the assessment of the status of the system asymptotic observer (review)]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, no. 7, pp. 3–42.

3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. *Nonlinear and adaptive control design*. New York, John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
4. Gauthier J.P., Hammouri H., Othman S. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1992, vol. 37, no. 6. pp. 875–880.
5. Gauthier J.P., Kupka I. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 1994, vol. 32, no. 4. P. 975–994.
6. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. New York, Springer, 1979. (Russ. ed.: Uonem U.M. *Lineinye mnogomernye sistemy upravleniia: Geometricheskii podkhod*. Moscow, Nauka, 1980. 376 p.).
7. Stabilizatsiia programmnykh dvizhenii nelineinykh sistem [Stabilization of programmed motions of non-linear systems]. *Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika* [Proceedings of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1985, no. 6, pp. 103–112.