НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Метод гарантированного оценивания области притяжения линейной системы с выпуклым допустимым множеством

12, декабрь 2012

DOI: 10.7463/1212.0506130

Горбунов А.В.

УДК 517.926

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

1. Введение

Многие задачи управления и устойчивости для систем с ограниченными ресурсами могут быть переформулированы как задачи построения области притяжения для системы с фазовыми ограничениями [2, 3, 1, 5, 4]. Такие задачи естественно возникают и в случаях, когда у конкретного технического объекта определена некоторая рабочая зона, выход за пределы которой равносилен аварии, или математическая модель объекта адекватна лишь на ограниченном множестве состояний.

Областью притяжения при наличии фазовых ограничений называется множество таких и только таких начальных состояний, что выходящие из них положительные полутраектории системы притягиваются к невозмущенному движению, не покидая заданной допустимой области. Ясно, что область притяжения при наличии фазовых ограничений целиком расположена в допустимой области, т.е. в общем случае является собственным подмножеством пространства состояний. Поэтому задача построения области притяжения при наличии фазовых ограничений актуальна даже для линейных систем. Примером может служить рассматривавшаяся в [1, 2, 3, 4, 5] задача построения области притяжения линейной системы, замкнутой ограниченным линейным управлением (множества линейной стабилизации).

Задачи описания областей притяжения для систем с фазовыми ограничениями рассматривалась в [6, 2, 3, 1, 7, 8, 4, 9].

Для оценки искомой области в [6, 2, 3, 4] используется множество, целиком находящееся внутри допустимой области и ограниченное поверхностью уровня некоторой функции Ляпунова. В [2, 3] предложены методы построения таких последовательностей функций Ляпунова, что соответствующие оценки области притяжения монотонно улучшаются. В [11] определен класс функций Ляпунова, в котором обеспечивается наиболее полная аппроксимация области притяжения линейной системы с фазовыми ограничениями, заданными линейными неравенствами. В [4] для поиска квадратичной функции Ляпунова используется подход, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств. Отметим, что использование множеств, ограниченных поверхностью уровня функции Ляпунова, как правило, на практике дает весьма консервативные оценки области притяжения.

Методы оценки области притяжения для системы с фазовыми ограничениями, не связанные с применением аппарата функций Ляпунова, рассматривались в [1, 7, 8, 9]. В [7] для этого использовался метод опорных векторов (support vector machine — SVM). Образ искомого множества в [7] предложено определять статистически на основе серии вычислительных экспериментов, в каждом из которых проводится проверка принадлежности точка из конечной случайной совокупности искомому множеству. После этого на основе полученных в серии таких экспериментов данных выполняется построение разделяющей поверхности. Ясно, что такая оценка области притяжения является случайной и может не содержаться в аппроксимируемой области.

Иной подход связан с исследованием структуры границы искомой области. В [8] для дифференциально-алгебраических уравнений с фазовыми ограничениями получены условия, при которых граница области притяжения представляет объединение некоторых инвариантных многообразий, части границ допустимой области и области притяжения системы без ограничений на состояние. Отметим, что в [8] от функций в правой части системы дифференциальных уравнений и индикатора допустимого множества требуют непрерывности вторых частных производных. В [9] для системы с фазовыми ограничениями предложена система, не содержащая ограничений, область притяжения кото-

рой при достаточно общих предположениях совпадает с областью притяжения исходной системы с фазовыми ограничениями.

В [1] рассматривались задачи описания области притяжения линейной системы для трех специальных видов выпуклых фазовых ограничений и их пересечений. Показано, что в этих частных случаях область притяжения является выпуклым, цилиндрическим множеством.

В настоящей работе доказано, что область притяжения линейной системы, определенной на выпуклой допустимой области, является выпуклым множеством. Для искомой области притяжения предъявлена функция Минковского и предложен метод ее вычисления. Предложен метод гарантированного оценивания искомой области выпуклым многогранником. Рассмотрен иллюстративный пример. Отметим, что некоторые результаты настоящей работы являются обобщением результатов из [1].

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная динамическая система, заданная дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

на состояние которой наложены фазовые ограничения вида

$$x(t) \in D. \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — матрица-столбец состояния системы; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — гурвицевая квадратная матрица; D — выпуклое допустимое множество такое, что $0 \in \operatorname{int} D$; $\operatorname{int} D$ — внутренность множества D.

Пусть $X(t, x_0)$ — решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Известно, что в случае, когда матрица A — гурвицевая, все решения системы (1) являются асимптотически устойчивыми, а область притяжения положения равновесия $x = 0$ системы (1) совпадает с $\mathbb{R}^n$, т.е. $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t, x_0) = 0$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

При наличии фазовых ограничений (2) в системе (1) область притяжения сужается до некоторого множества, содержащегося в D, и возникают задачи точного построения или оценки такого множества.

Определение 1. Областью притяжения для системы (1) с фазовыми ограничениями (2) называется наибольшее множество Ω_D такое, что для всех начальных возмущений $x_0 \in \Omega_D$:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t, x_0) = 0$;

2) для любого $t \geqslant 0$ выполнено включение $X(t, x_0) \in D$.

Цель настоящей работы показать, что в рассматриваемом случае Ω_D является выпуклым множеством, и предложить метод гарантированного оценивания множества Ω_D, т.е. метод построения такой оценки S_D множества Ω_D, что $S_D \subseteq \Omega_D$.

3. Основные результаты

Покажем, что при сделанных ранее допущениях область притяжения Ω_D динамической системы (1) с фазовыми ограничениями (2) является выпуклым множеством и предъявим функцию Минковского для этого множества.

Теорема 1. Пусть D — выпуклое множество. Тогда область притяжения Ω_D динамической системы (1) с фазовыми ограничениями (2) также является выпуклым множеством.

◀ Требуется показать, что для любых $x, y \in \Omega_D$ и $\vartheta \in [0, 1]$ имеет место включение $\vartheta x + (1-\vartheta)y \in \Omega_D$. Действительно,

$$\lim_{t\to+\infty} X(t, \vartheta x + (1-\vartheta)y) = 0.$$

Остается проверить, что если для всех $t \geqslant 0$ выполняются включения $X(t, x) \in D$ и $X(t, y) \in D$, то $X(t, \vartheta x + (1-\vartheta)y) \in D$ при всех $t \geqslant 0$. Поскольку

$$X(t, \vartheta x + (1-\vartheta)y) = \vartheta X(t, x) + (1-\vartheta)X(t, y)$$

и множество D выпуклое, то $X(t, \vartheta x + (1-\vartheta)y) \in D$ для всех $t \geqslant 0$. Что и требовалось доказать. ▶

Рассмотрим для выпуклого множества D функцию Минковского [10]

$$\mu_D(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, \frac{x}{\alpha} \in D\right\}.$$

Известно [10], что функция μ_D определена и непрерывна в $\mathbb{R}^n$ для любого выпуклого множества D, удовлетворяющего условию $0 \in \operatorname{int} D$, и обладает следующими свойствами:

1) $\mu_D(\lambda x) = \lambda \mu_D(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$;

2) если $x \in D$, то $\mu_D(x) \leqslant 1$, а если $x \notin D$, то $\mu_D(x) \geqslant 1$;

3) существует $\Delta > 0$ такое, что

$$\mu_D(x) \leqslant \frac{\|x\|}{\Delta}. \tag{3}$$

Для динамической системы (1) с фазовыми ограничениями (2) введем функцию

$$M(x) = \sup_{t \geqslant 0} \mu_D(X(t,x)). \tag{4}$$

Докажем некоторые свойства функции M.

Теорема 2. Значение $M(x)$ определено при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

◀ Покажем сначала, что M определена в окрестности точки 0. Для этого выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы шар $\|x\| < \varepsilon$ был вложен в допустимое множество D. Такое $\varepsilon > 0$ существует в силу того, что $0 \in \operatorname{int} D$. По выбранному $\varepsilon > 0$ определим $\delta > 0$ так, чтобы для всех $\|x\| < \delta$ и $t \geqslant 0$ выполнялось неравенство $\|X(t,x)\| < \varepsilon$. Существование такого $\delta > 0$ обеспечивается устойчивостью нулевого решения системы (1). Тогда $X(t,x) \in D$ и, следовательно, $\mu_D(X(t,x)) \leqslant 1$ для всех $\|x\| < \delta$ и $t \geqslant 0$. Это значит, что функция $M(x)$ определена внутри шара $\|x\| < \delta$, в частности, определено значение $M(0)$.

Покажем теперь, что $M(x)$ определено при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Пусть $\alpha = \dfrac{\delta}{2\|x\|} > 0$, тогда $\|\alpha x\| < \delta$. Используя свойства оператора X и функции μ_D, имеем

$$M(x) = \sup_{t \geqslant 0} \mu_D\left(X\left(t, \frac{1}{\alpha}\alpha x\right)\right) = \sup_{t \geqslant 0} \mu_D\left(\frac{1}{\alpha} X\left(t, \alpha x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sup_{t \geqslant 0} \mu_D\left(X\left(t, \alpha x\right)\right) = \frac{1}{\alpha} M(\alpha x),$$

т.е. $M(x)$ определено для произвольного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Учитывая, что значение $M(0)$ тоже определено, приходим к заключению теоремы. ►

Теорема 3. Функция M является функцией Минковского для области притяжения Ω_D динамической системы (1) с фазовыми ограничениями (2).

◄ Пусть $\frac{x}{\alpha} \in \Omega_D$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$. Тогда по свойству функции Минковского $\mu_D\Big(X\big(t, \frac{x}{\alpha}\big)\Big) \leqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$. Поскольку в силу свойств оператора X и функции μ_D

$$\mu_D\left(X\left(t, \frac{x}{\alpha}\right)\right) = \mu_D\left(\frac{1}{\alpha}X(t,x)\right) = \frac{1}{\alpha}\mu_D(X(t,x)),$$

то при $\frac{x}{\alpha} \in \Omega_D$ неравенство $\mu_D(X(t,x)) \leqslant \alpha$ выполняется для всех $t \geqslant 0$. Поэтому $\sup\limits_{t\geqslant 0} \mu_D(X(t,x)) \leqslant \alpha$ как только $\frac{x}{\alpha} \in \Omega_D$.

Используя полученное, запишем функцию Минковского для выпуклого множества Ω_D

$$\mu_{\Omega_D}(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, \frac{x}{\alpha} \in \Omega_D\right\} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, \sup_{t\geqslant 0} \mu_D(X(t,x)) \leqslant \alpha\right\} = \sup_{t\geqslant 0} \mu_D(X(t,x)) = M(x).$$

Что и требовалось. ►

4. Метод вычисления значений функции M

В случае систем высоких порядков вычисление значений функции M не представляется возможным без применения численных методов. Однако присутствие в определении этой функции операции нахождения точной верхней грани затрудняет создание корректных (в рассматриваемой задаче — завершающихся за конечное время) алгоритмов вычисления $M(x)$ непосредственно по формуле (4). Поэтому в настоящем разделе рассматривается метод вычисления значений M, сводящийся к решению таких корректных вычислительных задач как задачи Коши и задачи поиска наибольшего значения непрерывной функции на компактном множестве.

Далее будем предполагать, что

$$M(x) = \mu_{\Omega_D}(x) \geqslant \frac{\|x\|}{\eta}, \tag{5}$$

где $\eta > 0$ — некоторая постоянная. Неравенство (5) будет выполнено при всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если множество Ω_D ограничено, т.е. существует $\eta > 0$, такое, что

$$\Omega_D \subseteq B_\eta(0), \tag{6}$$

где $B_\eta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \eta\}$ — шар радиуса $\eta > 0$ с центром в точке 0.

При вычислении $M(x)$ будем учитывать экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (1), т.е.

$$\|X(t,x)\| \leqslant C\|x\|e^{-\lambda t} \text{ для всех } t \geqslant 0, \tag{7}$$

где λ — степень затухания переходных процессов в системе (1); C — коэффициент перерегулирования. Отметим, что в качестве λ и C в (7) могут использоваться любые значения, для которых выполнены неравенства [4]

$$\lambda < -\max_{k=1,\dots,n} \operatorname{Re} \lambda_k(A), \tag{8}$$

$$C \geqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(L)}{\lambda_{\min}(L)}}, \tag{9}$$

где $\lambda_k(A)$ — k-е характеристическое число матрицы A; L — симметрическая положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному неравенству Ляпунова

$$A^T L + LA < 0; \tag{10}$$

$\lambda_{\max}(L)$ и $\lambda_{\min}(L)$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы L соответственно. Отметим, что в случае, когда все характеристические числа матрицы A с наибольшей действительной частью простые, в качестве степени затухания можно принять $\lambda = -\max\limits_{k=1,\dots,n} \operatorname{Re} \lambda_k(A)$.

При сделанных предположениях значение $M(x)$ может быть найдено как наибольшее значение непрерывной функции на компактном множестве, точнее говоря, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\Delta > 0$ таково, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство (3). Тогда для любого x, удовлеворяющего условиям (5) и (7), верно равенство

$$M(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mu_D(X(t,x)), \tag{11}$$

где

$$T \geqslant \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{C\eta}{\Delta} \right). \tag{12}$$

◀ По (4) для любого $T \geqslant 0$ имеем

$$M(x) = \max \left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mu_D(X(t,x)), \ \sup_{t>T} \mu_D(X(t,x)) \right\}. \tag{13}$$

Используя неравенства (3), (7) и $t > T$, получим

$$\mu_D(X(t,x)) \leqslant \frac{\|X(t,x)\|}{\Delta} \leqslant \frac{C\|x\|}{\Delta} \exp(-\lambda t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\|x\|}{\Delta} \exp\left(-\lambda \frac{1}{\lambda} \ln \frac{C\eta}{\Delta} \right) = \frac{\|x\|}{\eta}, \tag{14}$$

поэтому

$$\sup_{t>T} \mu_D(X(t,x)) \leqslant \frac{\|x\|}{\eta}. \tag{15}$$

Сопоставляя (5), (13) и (15), убеждаемся в справедливости (11). ▶

5. Метод оценивания области Ω_D выпуклым многогранником

Для оценки области Ω_D будем использовать выпуклый многогранник вида

$$S_D = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \vartheta_k s_k \mid \ \vartheta_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{m} \vartheta_k < 1 \right\},$$

где $\vartheta_k \in \mathbb{R}$, а точки $s_k \in \mathbb{R}^n$ расположены внутри или на границе $\partial\Omega_D$ множества Ω_D. Поскольку множество Ω_D — выпуклое, то $S_D \subseteq \Omega_D$.

В случае, когда множество Ω_D ограниченное, набор точек $s_k \in \partial\Omega_D$ может быть построен следующим способом. Рассмотрим произвольные точки $e_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и положим $s_k = (M(e_k))^{-1}e_k$. Тогда

$$\mu_{\Omega_D}(s_k) = M(s_k) = M\left(\frac{e_k}{M(e_k)}\right) = 1,$$

следовательно, $s_k \in \partial\Omega_D$.

В общем случае, для построения точек s_k зафиксируем $\eta > 0$ и положим

$$s_k = \frac{e_k}{\max\{M(e_k), \|e_k\|\eta^{-1}\}},$$

где $e_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Пользуясь тем, что $\mu_{A\cap B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$, имеем

$$\mu_{\Omega_D\cap B_\eta(0)}(x) = \max\{M(x),\ \|x\|\eta^{-1}\}. \tag{16}$$

Следовательно, $\mu_{\Omega_D\cap B_\eta(0)}(s_k) = 1$ и $s_k \in \partial(\Omega_D \cap B_\eta(0))$.

Для вычисления $\mu_{\Omega_D\cap B_\eta(0)}(x)$ может использоваться следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $C \geqslant 1$, $\lambda > 0$, $\Delta > 0$, $\eta > 0$ и $T \geqslant 0$ таковы, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства (3), (5) и (12). Тогда

$$\mu_{\Omega_D\cap B_\eta(0)}(x) = \max\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_D(X(t,x)),\ \|x\|\eta^{-1}\right\}. \tag{17}$$

◀ Рассмотрим два возможных случая.

Пусть $M(x) < \|x\|\eta^{-1}$. Тогда, с одной стороны,

$$\mu_{\Omega_D\cap B_\eta(0)}(x) = \max\{M(x),\ \|x\|\eta^{-1}\} = \|x\|\eta^{-1}, \tag{18}$$

с другой стороны,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_D(X(t,x)) \leqslant M(x) < \|x\|\eta^{-1},$$

и поэтому

$$\max\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_D(X(t,x)),\ \|x\|\eta^{-1}\right\} = \|x\|\eta^{-1}. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19), заключаем, что в рассматриваемом случае равенство (17) верно.

Пусть $M(x) \geqslant \|x\|\eta^{-1}$. Тогда по (16) и лемме 1 имеем

$$\mu_{\Omega_D \cap B_\eta(0)}(x) = \max\{M(x),\, \|x\|\eta^{-1}\} = M(x) =$$
$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mu_D(X(t,x)) = \max\left\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mu_D(X(t,x)),\, \|x\|\eta^{-1}\right\}.$$

Тождество (17) доказано. ►

6. Пример

Рассмотрим систему [1, 11]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sqrt{2}x_2 + u, \end{cases} \tag{20}$$

замкнутую управлением

$$u = -2\sqrt{2}x_2, \tag{21}$$

на величину которого наложены ограничения

$$|u| \leqslant 1. \tag{22}$$

Неравенство (22) для замкнутой системы (20),(21) можно рассматривать как фазовые ограничения вида

$$|2\sqrt{2}x_2| \leqslant 1. \tag{23}$$

Выполним оценку области притяжения замкнутой системы (20),(21) с фазовыми ограничениями (23). Для применения метода определим величины Δ, λ, C и η в условиях леммы 1.

Функцией Минковского для допустимой области D, заданной неравенством (23), является $\mu_D(x) = |2\sqrt{2}x_2|$. Поскольку $\mu_D(x) \leqslant 2\sqrt{2} \cdot \|x\|$, то $\Delta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}354$ в (3).

Матрица

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

является решением матричного уравнения Ляпунова $A^T L + LA = -2E$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

замкнутой системы (20), (21) и удовлетворяет матричному неравенству (10). По (9) коэффициент перерегулирования может быть найден как

$$C = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(L)}{\lambda_{\min}(L)}} = \sqrt{\sqrt{3}+2},$$

где $\lambda_{\max}(L) = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $\lambda_{\min}(L) = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

Степень затухания определим как

$$\lambda = -\max_{i=1,\dots,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где $\lambda_{1,2}(A) = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$.

Положим $\eta = 1$ и по (12) выберем $T = 2{,}5$.

В качестве e_k рассмотрим точки, равномерно расположенные на эллипсе

$$e_k = \left(2\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Оценка области притяжения замкнутой системы (20), (21) с фазовыми ограничениями (23), выполненная по $m = 512$ точкам, показана на рис. 1 жирной линией. На этом рисунке для сопоставления тонкими линиями показаны оценки искомой области, полученные в [11] методом функций Ляпунова. На рис. 2 показаны оценки искомой области для различного числа точек $m = 2^p$, $p = 2, \dots, 7$.

7. Заключение

Рассматривалась задача оценивания области притяжения для линейной системы с фазовыми ограничениями. Доказано, что область притяжения линейной системы с выпуклой допустимой областью является выпуклым множеством, предъявлена функция Минковского искомого множества и предложен

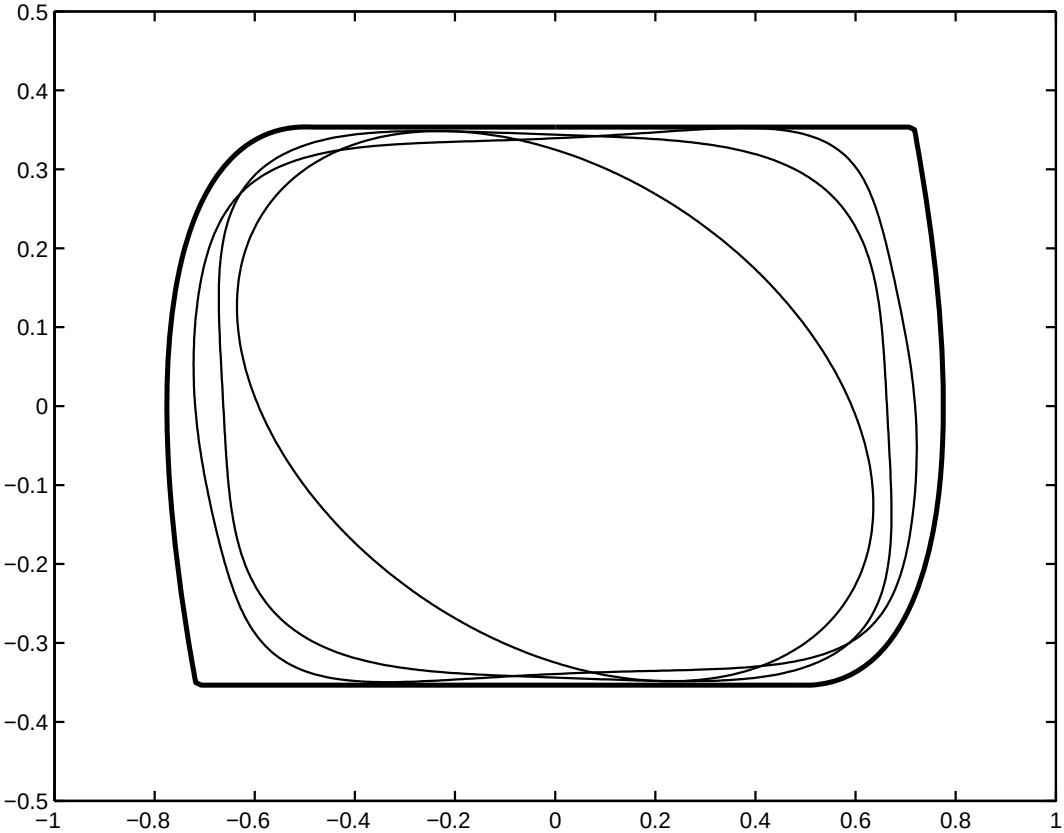

Рис. 1. Сравнение оценок области притяжения, полученных разными методами

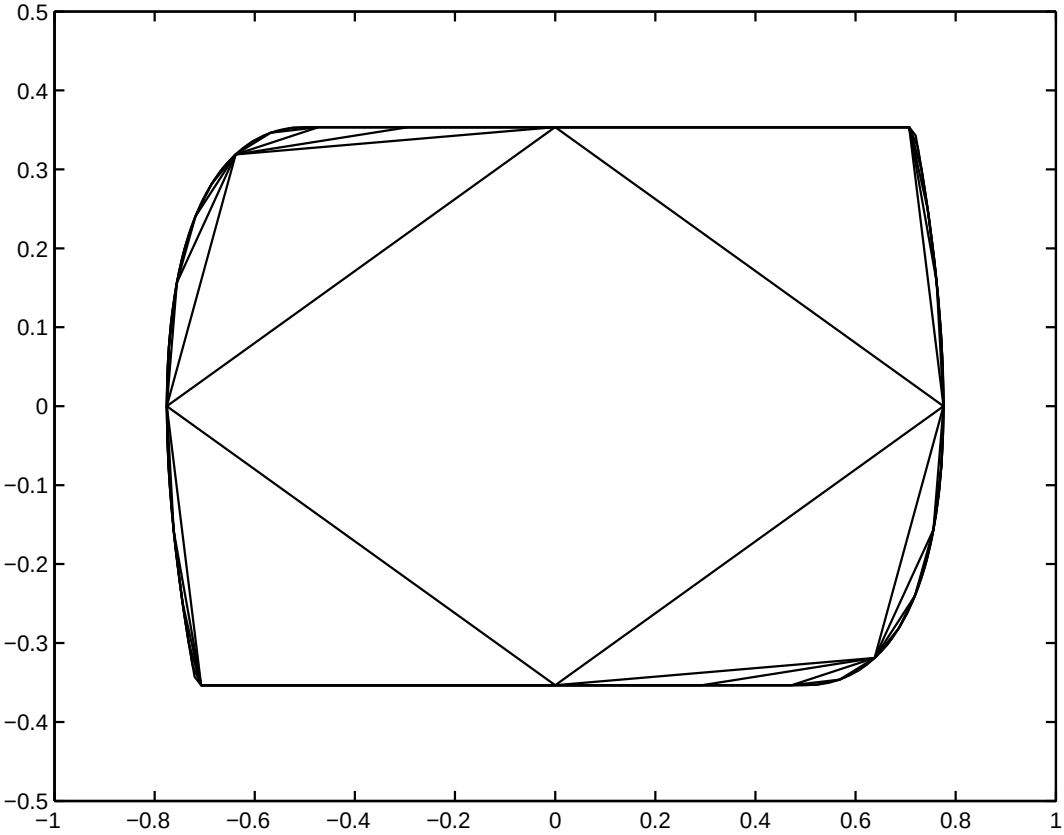

Рис. 2. Сравнение оценок области притяжения для различных m

метод ее вычисления. Предложен метод гарантированного оценивания искомой области выпуклым многогранником. Рассмотрен иллюстративный пример. Полученные в работе результаты могут использоваться при оценке областей притяжения для линейных систем с ограниченными ресурсами управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31303 и № 10-07-00617), Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-3659.2012.1) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0370).

Список литературы

1. Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
2. Каменецкий В.А. Параметрическая стабилизация нелинейных систем управления с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 65–71.
3. Каменецкий В.А. Аппроксимация множества линейной стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1997. № 3. С. 113–121.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Линейные матричные неравенства в синтезе регуляторов при ограничениях на управление и фазовые переменные // Труды VIII Международной конференции «Идентификация системи задачи управления» SICPRO’09 (Москва, 26-30 января 2009 г.). 2009. С. 31–44.
5. Gutman P.-O., Hagander P. A new design of constrained controllers for linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. Vol. AC-30, no. 1. P. 22–33.
6. Julich P.M. Region of acceptable motions // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. Vol. 13, no. 6. P. 725–726.
7. Stability regions for constrained nonlinear systems and their functional characterization via support-vector-machine learning / C.J. Ong, S.S. Keerthi, E.G. Gilbert, Z.H. Zhang // Automatica. 2004. Vol. 40, no. 11. P. 1955–1964. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.06.005.

8. Praprost K.L., Loparo K.A. A stability theory for constrained dynamic systems with applications to electric power systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. Vol. 41, no. 11. P. 1605–1617.
9. Горбунов А.В. О методах построения области притяжения динамической системы с ограничениями на состояние // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 2. С. 283–284.
10. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
11. Kamenetskiy V.A. The choice of a Lyapunov function class for close approximation of the set of linear stabilization // Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control. Kobe (Japan), 1996. P. 1059–1060.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Method guaranteed estimation of domain of attraction for the linear system with a convex admissible set

12, December 2012

DOI: 10.7463/1212.0506130

Gorbunov A. V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

The problem of estimating the domain of attraction for linear systems with phase constraints was examined. It is proved that the domain of attraction of the linear system with a convex admissible region is a convex set, function Minkovsky for the domain of attraction and the method for its calculation was presented. A method of guaranteed estimation of the required set by convex polyhedron. Example was considered. The obtained results can be used to estimate the domain of attraction for linear systems with bounded control.

References

1. Formal'skii A.M. *Upravliaemost' i ustoichivost' sistem s ogranichennymi resursami* [Controllability and stability of systems with limited resources]. Moscow, Nauka, 1974. 368 p.
2. Kamenetskii V.A. Parametricheskaia stabilizatsiia nelineinykh sistem upravleniia s fazovymi ogranicheniiami [Parametric stabilization of nonlinear control systems with phase constraints]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1996, no. 10, pp. 65–71.
3. Kamenetskii V.A. Approksimatsiia mnozhestva lineinoi stabilizatsii [Approximation of the set of linear stabilization]. *Differentsial'nye uravneniia*, 1997, no. 3, pp. 113–121.

4. Balandin D.V., Kogan M.M. Lineinye matrichnye neravenstva v sinteze regu-liatorov pri ogranicheniiakh na upravlenie i fazovye peremennye [Linear matrix inequalities in the synthesis of regulators with constraints on the control and phase variables]. *Trudy 8 Mezhdunarodnoi konferentsii "Identifikatsiia sistem i zadachi upravleniia" SICPRO'09* [Proceedings of 8th International conference "System Identification and Control Problems" SICPRO'09]. Moscow, 26–30 January, 2009, pp. 31–44.
5. Gutman P.-O., Hagander P. A new design of constrained controllers for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1985, vol. AC-30, no. 1, pp. 22–33.
6. Julich P.M. Region of acceptable motions. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1968, vol. 13, no. 6, pp. 725–726.
7. Ong C.J., Keerthi S.S., Gilbert E.G., Zhang Z.H. Stability regions for constrained nonlinear systems and their functional characterization via support-vector-machine learning. Automatica, 2004, vol. 40, no. 11, pp. 1955–1964. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.06.005.
8. Praprost K.L., Loparo K.A. A stability theory for constrained dynamic systems with applications to electric power systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1996, vol. 41, no. 11, pp. 1605–1617.
9. Gorbunov A.V. O metodakh postroeniia oblasti pritiazheniia dinamicheskoi sistemy s ogranicheniiami na sostoianie [A method of constructing the domain of attraction of a dynamical system with constraints on the state]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2009, vol. 45, no. 2, pp. 283–284.
10. Pshenichnyi B.N. Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi [Convex analysis and extremal problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p.
11. Kamenetskiy V.A. The choice of a Lyapunov function class for close approximation of the set of linear stabilization. Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control. Kobe, Japan, 1996, pp. 1059–1060.