НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций

12, декабрь 2012

DOI: 10.7463/1212.0500464

Иванков П. Л.

УДК 511.361

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
ivankovpl@bmstu.ru

Введение

Для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами обычно применяют эффективные конструкции аппроксимаций Паде первого или второго рода. При этом аппроксимации второго рода (совместные приближения) устроены проще и часто позволяют получать более общие результаты. В данной работе предлагается эффективная конструкция совместных приближений для гипергеометрических функций общего вида и их производных (в том числе и по параметру). С помощью этой конструкции оценивается снизу модуль соответствующей линейной формы. Некоторые из параметров рассматриваемых функций являются иррациональными.

1. Основной результат

Для комплексных чисел

$$\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_r, \quad \beta_1, \ \ldots, \ \beta_m,$$

где $r < u = m + 1$, положим

$$a(x) = (x + \alpha_1) \ldots (x + \alpha_r), \quad b(x) = (x + \beta_1) \ldots (x + \beta_m).$$

При этом считаем, что

$$a(x)\, b(x) \neq 0 \ \text{ при } \ x = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Пусть также даны числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_k \notin \mathbb{Z}, \ \ k = 1, \ldots, t; \quad \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \notin \mathbb{Z}, \ \ k_1, k_2 = 1, \ldots, t, \ \ k_1 \neq k_2. \tag{2}$$

Для $k=1,\,\ldots,\,t$ и $j=1,\,\ldots,\,u$ рассмотрим следующие функции:

$$F_{kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)\,(\lambda_k+x)}\,, \tag{3}$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k:

$$F_{kl_kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda_k+x}\,. \tag{4}$$

Здесь $k=1,\,\ldots,t$, $l_k=0,\,\ldots,\,\tau_k-1$, $j=1,\,\ldots,\,u$, $\tau_1,\ldots,\tau_t$ — натуральные числа.

Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле (или поле рациональных чисел). Для целого неотрицательного числа r полагаем $r_0=\max\{r,\,1\}$, т.е. $r_0=1$ если $r=0$, и $r_0=r$, если $r>0$. При выполнении условий (1) и (2) справедлива следующая теорема.

Теорема. Предположим, что числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, $\beta_1,\ldots,\beta_{r_0-1}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$ рациональные и удовлетворяют условиям (1) и (2); многочлен $(x+\beta_{r_0})\ldots(x+\beta_m)$ лежит в кольце $\mathbb{I}[x]$; степени алгебраических чисел $\beta_{r_0},\,\ldots,\,\beta_m$ равны соответственно $\varkappa_{r_0},\,\ldots,\,\varkappa_m$; разности $\alpha_i-\lambda_k$ и $\alpha_i-\beta_j$ при всех допустимых значениях индексов не являются целыми рациональными числами;

$$\eta=1-\frac{1}{u-r_0}\left(\frac{1}{\varkappa_{r_0}}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_m}\right);$$

число ξ отлично от нуля и лежит в поле $\mathbb{I}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и для любого нетривиального набора целых чисел

$$h_0,\quad h_{kl_kj},\;\; k=1,\,\ldots,\,t,\;\; l_k=0,\,\ldots,\,\tau_k-1,\;\; j=1,\,\ldots,\,u, \tag{5}$$

из этого поля выполняется неравенство

$$\left|h_0+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\right|>H^{-\frac{w(u-r)+\eta(u-r_0)}{u-r-\eta(u-r_0)}-\varepsilon},$$

где H есть максимум модулей коэффициентов (5), причем H достаточно велико (нижняя граница зависит от ε);

$$w=uT,\quad T=\tau_1+\ldots+\tau_t.$$

2. Доказательство основного результата

Пусть n — достаточно большое натуральное число, $N_1=\left[\dfrac{n}{T}\right]$, $N_2=\left[\dfrac{n}{w}\right]-1$. Обозначим

$$\theta_s=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi(\zeta)}{\prod\limits_{x=n-s}^{n}(\zeta+x)}\,d\zeta,\quad s=0,\,1,\,\ldots,\,n, \tag{6}$$

где Γ — положительно ориентированная окружность с центром в начале координат, охватывающая все полюсы подынтегральной функции, и

$$\Phi(\zeta)=\prod_{k=1}^{t}\prod_{\sigma=0}^{N_1-1}(\zeta-\lambda_k-N_2+\sigma)^{\tau_k}. \tag{7}$$

Лемма 1. При всех допустимых значениях z имеет место равенство

$$\frac{\Phi(z)}{\prod\limits_{x=1}^{n}(z+x)} = \sum_{s=0}^{n}\theta_s\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{z+x}. \tag{8}$$

◀ Теория рядов Ньютона (см., например, [1, с. 40–41]) позволяет написать равенство

$$\Phi(z) = \sum_{s=0}^{n}\theta_s\prod_{x=n-s+1}^{n}(z+x),$$

из которого (8) получается делением обеих частей на $\prod\limits_{x=1}^{n}(z+x)$. ▶

Лемма 2. При $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^{n}\theta_s\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2-\sigma+x} = 0. \tag{9}$$

◀ Продифференцируем l_k раз равенство (8) по z и подставим $z = \lambda_k + N_2 - \sigma$. В результате получим (9). ▶

Лемма 3. При $1 \leqslant k \leqslant t$, $0 \leqslant l_k \leqslant \tau_k - 1$ выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^{n}\theta_s B(s)\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2+x} = 0, \tag{10}$$

где $B(s)$ — произвольный многочлен, степень которого не превышает $N_1 - 1$.

◀ Применим индукцию по параметру l_k. Сначала предположим, что $l_k = 0$. Тогда, согласно (9), при $\sigma = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ имеем

$$0 = \sum_{s=0}^{n}\theta_s\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2-\sigma+x} = \sum_{s=0}^{n}\theta_s B_\sigma(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2+x},$$

где

$$B_\sigma(s) = \prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{\lambda_k+N_2+n-s-x}{\lambda_k+N_2-x}.$$

Поскольку любой многочлен $B(s)$ степени не выше $N_1 - 1$ можно представить в виде линейной комбинации многочленов $B_\sigma(s)$, то при $l_k = 0$ равенство (10) справедливо. Используя предположение индукции, по лемме 2 при положительном l_k и при указанных σ имеем

$$0 = \sum_{s=0}^{n}\theta_s\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2-\sigma+x} = \sum_{s=0}^{n}\theta_s\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\left(\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2+x}B_\sigma(s)\right) =$$

$$= \sum_{\mu_k=0}^{l_k}\binom{l_k}{\mu_k}\sum_{s=0}^{n}\theta_s\frac{d^{\mu_k}}{d\lambda_k^{\mu_k}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2+x}\,\frac{d^{l_k-\mu_k}}{d\lambda_k^{l_k-\mu_k}}B_\sigma(s) = \sum_{s=0}^{n}\theta_s B_\sigma(s)\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_2+x}.$$

Теперь рассуждение по индукции можно завершить, как указано выше. ►

Пусть при $s = 0, 1, \ldots, n$

$$p_s = \theta_s \prod_{x=1}^{n-s} b(N_2 + x) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{a(x)}, \qquad (11)$$

и

$$P(z) = \sum_{s=0}^{n} p_s z^s.$$

Лемма 4. В разложении в ряд по степеням z функций $r^*_{kl_kj}(z) = P(z)F_{kl_kj}(z)$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, коэффициент при степени z^ν равен нулю при $n \leqslant \nu \leqslant n + N_2$.

◄ Указанный коэффициент можно записать так:

$$\sum_{s=0}^{n} p_s (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{\lambda_k + x} = \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{s=0}^{n} \theta_s (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} b(x - s) \times$$

$$\times \prod_{x=n+1}^{\nu} a(x - s) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k + N_2 + x} \frac{\prod\limits_{x=\nu+1}^{n+N_2} (\lambda_k - s + x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_2} (\lambda_k + x)} \right) = \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{\mu_k=0}^{l_k} \binom{l_k}{\mu_k} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n} \theta_s B_{\mu_k}(s) \frac{d^{\mu_k}}{d\lambda_k^{\mu_k}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k + N_2 + x}, \qquad (12)$$

где

$$B_{\mu_k}(s) = (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} b(x - s) \prod_{x=n+1}^{\nu} a(x - s) \frac{d^{l_k - \mu_k}}{d\lambda_k^{l_k - \mu_k}} \frac{\prod\limits_{x=\nu+1}^{n+N_2} (\lambda_k - s + x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_2} (\lambda_k + x)}.$$

Последний многочлен от переменной s имеет, степен не выше $N_1 - 1$. Поэтому выражение (12) равно нулю в силу (10). ►

В дальнейшем через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, не зависящие от n (но, возможно, зависящие от параметров функций (4)). Наименьшим общим знаменателем некоторого множества чисел X из поля $\mathbb{I}$ будем называть наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое любое число из X становится целым в упомянутом поле.

Лемма 5. Для абсолютной величины чисел (11) справедлива оценка

$$|p_s| \leqslant \left(\frac{n!}{s!} \right)^{u-r} e^{\gamma_1 n}; \qquad (13)$$

модуль общего наименьшего знаменателя этих чисел не превышает $e^{\gamma_2 n}$.

Доказательство леммы является стандартным; оценка (13) следует непосредственно из (6), (7) и (11). Оценка общего знаменателя следует из рациональности чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Определим многочлены

$$P_{kl_kj}(z)=\sum_{s=0}^{n} p_{kl_kjs}z^s, \tag{14}$$

где p_{kl_kjs} есть умноженный на -1 коэффициент при z^s в разложении по степеням z произведения $P(z)F_{kl_kj(z)}$.

Лемма 6. Пусть N — натуральное число, l — неотрицательное целое рациональное число. Тогда

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}\prod_{x=1}^{N}\frac{1}{\lambda+x}=\prod_{x=1}^{N}\frac{1}{\lambda+x}\sum\frac{\pm 1}{(\lambda+x_1)\ldots(\lambda+x_l)}\,,$$

где $x_1,\ \ldots,\ x_l$ — числа (среди которых могут быть и повторяющиеся), соответствующим образом выбранные из множества $\{1,\ \ldots,\ N\}$.

Доказательство проводится индукцией по l.

Лемма 7. Для любого $\varepsilon>0$ абсолютная величина наименьшего общего знаменателя коэффициентов многочленов (14) не превышает $n^{\frac{u-r_0}{w}(\eta+\varepsilon)n}$; эта оценка справедлива для всех достаточно больших n (нижняя граница зависит от ε и от параметров функций (4); числа η и w определены в формулировке теоремы).

Доказательство леммы является стандартным. Укажем лишь на основные моменты соответствующего рассуждения. Очевидно, что

$$p_{kl_kjs}=-\sum_{\nu=0}^{s}p_\nu(s-\nu)^{j-1}\prod_{x=1}^{s-\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\,\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{s-\nu}\frac{1}{\lambda_k+x}\,,$$

где p_ν определяются равенством (11). Числа θ_ν, входящие в правую часть (11) и определяемые равенствами (6) и (7), запишем с помощью теоремы о вычетах. После несложных преобразований, учитывающих предыдущую лемму, получаем

$$p_{kl_kjs}=-\sum_{\nu=0}^{s}\frac{\prod\limits_{x=1}^{N_2}b(n-\nu+x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_2}b(x)}(s-\nu)^{j-1}\frac{\prod\limits_{x=s+1}^{n}b(x-\nu)}{\prod\limits_{x=s+1}^{n}a(x-\nu)}\times$$
$$\times\left(\sum_{x=n-\nu}^{n}\frac{\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{\sigma=0}^{N_1-1}(-x-\lambda_k-N_2+\sigma)^{\tau_k}}{\pm(x-n+\nu)!(n-x)!}\right)\prod_{x=1}^{s-\nu}\frac{1}{\lambda_k+x}\sum\frac{\pm 1}{(\lambda_k+x_1)\ldots(\lambda_k+x_{l_k})}\,. \tag{15}$$

Модуль общего наименьшего знаменателя дробей вида

$$\frac{\prod\limits_{x=1}^{N_2}b(n-\nu+x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_2}b(x)}$$

оценивается сверху величиной $n^{\frac{u-r_0}{w}(\eta+\varepsilon)n}$ при любом $\varepsilon>0$ и при достаточно большом n. Чтобы убедиться в этом, следует применить (с соответствующими изменениями) рассуждения, доказывающие лемму 6, с. 1227 работы [2].

Оценка общего наименьшего знаменателя (понимаемого в обычном смысле) последней суммы, входящей в выражение (15) основана на том обстоятельстве, что общее наименьшее кратное чисел $1, \ldots, n$ ограничено сверху величиной $e^{O(n)}$. Для оценки наименьшего общего знаменателя остальных множителей, входящих в (15), применяется стандартная техника, основанная на сравнении степеней, в которых простые числа входят в числители и знаменатели соответствующих дробей (см., например, [3, лемма 2 на с. 186]).

Все дальнейшие рассуждения являются стандартными. Суммируя вышесказанное, заключаем, что многочлены $P(z)$, $P_{kl_kj}(z)$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, образуют совместные приближения для функций (4), причем порядок нуля при $z = 0$ каждой из функций

$$r_{kl_kj}(z) = P_{kl_kj}(z) + P(z)\,F_{kl_kj}(z) \tag{16}$$

не меньше, чем $n + N_2$.

Функции (3) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$b(\delta)(\delta + \lambda_k)y = a(\delta)zy + b(0)\lambda_k, \quad \delta = z\frac{d}{dz}, \quad k = 1, \ldots, t.$$

Дифференцируя эти уравнения (формально) соответствующее число раз по λ_k, можно получить систему линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции (4). Перенумеруем указанные функции в произвольном порядке и обозначим их $y_1, \ldots, y_w$. Упомянутую выше систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют эти функции, можно записать в виде

$$y_i' = \sum_{j=1}^{w} f_{ij}(z)y_j + f_i(z). \tag{17}$$

Обозначим через Y столбец функций $y_1, \ldots, y_w$, через A и B соответственно матрицу и столбец свободных членов системы (17). Далее, следуя методу, предложенному в работе [5], запишем равенства (16) в матричном виде

$$R(z) = P(z)Y + Q(z),$$

где $R(z)$ и $Q(z)$ — столбцы, составленные из функций $r_{kl_kj}(z)$ и $P_{kl_kj}(z)$. Пусть $T(z)$ — многочлен, являющийся общим наименьшим кратным коэффициентов системы (17). При $i = 0, 1, \ldots$ положим $R_i(z) = (T(z))^i(D - A)^iR(z)$, где $D = \dfrac{d}{dz}$ — оператор дифференцирования вектора-столбца. Таким образом мы получим систему совместных приближений для функций (4). Из результатов работы [4] следует линейная независимость над $\mathbb{I}[z]$ совокупности этих функций (при выполнении условий теоремы), поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} P_0 & P_{01} & \ldots & P_{0w} \\ P_1 & P_{11} & \ldots & P_{1w} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_w & P_{w1} & \ldots & P_{ww} \end{vmatrix}$$

будет отличен от нуля при всех достаточно больших значениях n (подробности см. в [5]). От функциональных форм (используя стандартную процедуру) следует перейти затем к числовым формам; получающийся при этом результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 8. При всех достаточно больших n в поле $\mathbb{I}$ существуют числа

$$q_{\mu 0}, \quad q_{\mu k l_k j}, \ \mu = 0, 1, \ldots, w, \ k = 1, \ldots, t, \ l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \ j = 1, \ldots, u, \tag{18}$$

такие, что:

1) определитель порядка $w+1$, μ-я строка которого составлена из чисел (18), отличен от нуля;

2) $|q_{\mu 0}| \leqslant n^{(u-r)n} e^{\gamma_3 n}$;

3) при всех μ $|q_{\mu 0} + q_{\mu k l_k j} F_{k l_k j}(\xi)| \leqslant n^{-\frac{(u-r)n}{w}} e^{\gamma_3 n}$, γ_3 может зависеть также и от ξ;

4) общий наименьший знаменатель чисел (18) оценивается сверху величиной $n^{\frac{u-r_0}{w}(\eta+\varepsilon)n}$.

Подробное описание метода получения последнего результата имеется в работе [5]. Из последней леммы утверждение теоремы выводится стандартным способом.

Заключение

Таким образом, с помощью предложенной в работе эффективной конструкции аппроксимаций Паде второго рода удалось получить оценку снизу модуля линейной формы от значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Естественным обобщением рассмотренной эффективной конструкции могли бы быть совместные приближения в случае, когда варьируются точки, в которых вычисляются значения функций, или когда варьируются сразу несколько параметров (по которым в этом случае возможно дифференцирование).

Список литературы

1. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Московского университета, 1982. 312 с.

2. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, № 6. С. 1220–1235.

3. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.

4. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

5. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Pade approximation to Diophantine inequalities in values of G-function // Number Theory. Springer Berlin Heidelberg, 1985. P. 9–51. (Ser. Lect. Notes in Math., vol. 1135.). DOI:10.1007/BFb0074600.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

On the application of simultaneous approximations for the investigation of arithmetic properties of the values of hypergeometric functions

12, December 2012

DOI: 10.7463/1212.0500464

Ivankov P. L.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

ivankovpl@bmstu.ru

For the investigation of arithmetic properties of the values of the hypergeometric functions with irrational parameters one usually applies Pade approximations of the first or second type. Pade approximations of the second type (simultaneous approximations) are much simpler and application of such approximations often makes it possible to obtain more general results. In the present paper we propose an effective construction of simultaneous approximations for the generalized hypergeometric functions and their derivatives (also with respect to parameter). This construction is applied for the estimation of the absolute value of corresponding linear form. Some of the parameters of the functions under consideration are irrational.

References

1. Фельдман Н.И. Fel'dman N.I. Sed'maia problema Gil'berta [The Hilbert seventh problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. 312 p.
2. Galochkin A.I. Ob arifmeticheskikh svoistvakh znachenii nekotorykh tselykh gipergeometricheskikh funktsii [On the arithmetic properties the values of certain entire hypergeometric functions]. Sibirskii matematicheskii zhurnal [Siberian mathematical journal], 1976, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235.
3. Шидловский А.Б. Shidlovskii A.B. Transtsendentnye chisla [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka, 1987. 448 p.
4. Иванков П.Л. Ivankov P.L. O lineinoi nezavisimosti nekotorykh funktsii [On linear independence of some functions]. Chebyshevskii sbornik, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 145-151.
5. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Pade approximation to Diophantine inequalities in values of G-function. In: Number Theory. Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. 9–51. (Lect. Notes in Math., vol. 1135.). DOI: 10.1007/BFb0074600