Взаимодействие взаимно перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводнике второго рода.

11, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0479190

Игнатьев В. К., Якимец А. Л.

УДК. 53.098

Россия, Волгоградский государственный университет
yakimets_volsu@mail.ru

1. Введение

Исследования, посвященные изучению взаимодействию взаимно перпендикулярных магнитных полей в нелинейных магнетиках имеют почтенный возраст [1]. Как правило, в качестве такой нелинейной среды рассматривают ферромагнитные материалы и среды [2]. Одним из практических результатов таких исследований стала разработка феррозондовых магнитометров, обладающих рекордной (для не квантовых измерителей) чувствительностью [3]. Вместе с тем, хотя современная теория ферромагнетизма не позволяет аналитически описывать гистерезис, анализ работы феррозонда [2] показывает, что гистерезисные потери являются фундаментальным ограничением порога чувствительности феррозондовых магнитометров.

Существенно повысить чувствительность, быстродействие электронной аппаратуры возможно при переходе к более низким температурам, в частности при использовании в измерительной и вычислительной технике сверхпроводящих материалов. Электродинамика сверхпроводников в диапазоне радиочастот, на котором энергия кванта существенно меньше ширины энергетической щели, с достаточной точностью описывается уравнениями Гинзбурга – Ландау [4]. Хорошо известно, что сверхпроводники так же как и ферромагнетики обладают нелинейными магнитными свойствами. Более того, вытекающая из уравнений Гинзбурга – Ландау нелокальность взаимодействия сверхпроводящего конденсата куперовских пар с магнитным полем оказывает существенное влияние на генерацию высших гармоник в радиочастотном диапазоне [5].

Рисунок 1. Сверхпроводящий провод во внешнем поле

Поскольку потери в сверхпроводниках в радиочастотном диапазоне пренебрежимо малы, нелинейная восприимчивость сверхпроводников второго рода с успехом используется для измерения слабых магнитных полей [6, 7]. Вместе с тем все существующие сверхпроводниковые магнитометры основаны на взаимодействии параллельных магнитных полей – измеряемого постоянного поля и радиочастотного поля накачки, то есть повторяют конструкцию классического феррозонда с продольным возбуждением. Можно ожидать, что нелинейное взаимодействие взаимно перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводниках, рассматриваемых как нелинейный проводящий магнетик [8], позволит разработать магнитометры, не уступающие по чувствительности квантовым, например, скивдам [9, 10]. Улучшение чувствительности возможно благодаря тому, что объем, в котором происходит нелинейное взаимодействие, гораздо больше объема джозефсоновского контакта в скивде.

Несмотря на большое количество публикаций, посвященных нелинейной электродинамике сверхпроводников второго рода, вопрос о нелинейном взаимодействии взаимно перпендикулярных магнитных полей в них до сих пор не рассматривался. Задачей работы является описание этого взаимодействия по аналогии с классической работой [1] для ферромагнетиков с помощью уравнений Гинзбурга – Ландау и аналитическое решение

полученных нелинейных уравнений для предельного случая проволоки толщиной меньше лондоновской глубины проникновения методом последовательных приближений. Цель работы – оценить потенциальную чувствительность криозонда, использующего взаимодействие взаимно перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводнике второго рода в задачах магнитометрии.

2. Постановка задачи

Пусть зондом сверхпроводникового магнитометра, который можно назвать криозондовым, является тонкая проволока из сверхпроводника второго рода диаметром $2R$, причем $\xi \ll R \ll \lambda$, где ξ – длина когерентности, а λ – глубина проникновения. Запишем для проволоки, находящейся во внешнем продольном однородном магнитном поле $\mathbf{H}_e$, по которой течет ток i (рис. 1), уравнения Гинзбурга-Ландау [4]:

$$\xi^2 (i\nabla + 2\pi\mathbf{A}/\Phi_0)^2 \psi - \psi + \psi \cdot |\psi|^2 = 0, \quad (1)$$

$$(i\nabla + 2\pi\mathbf{A}/\Phi_0)\mathbf{n}\psi = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \Phi_0 / (2\pi\lambda^2) - |\psi|^2 \mathbf{A} / \lambda^2, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности сверхпроводника, $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})/\psi_0$ – нормированный параметр порядка, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – векторный потенциал магнитного поля, $\Phi_0 \approx 2,07 \times 10^{-15} \text{ Вб}$ – квант магнитного потока.

Выберем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью проволоки. Пусть напряженность внешнего магнитного поля равна $\mathbf{H}_e = H_e(r)\mathbf{e}_\varphi = \text{const}$.

Магнитное поле, создаваемое током, имеет вид $\mathbf{H}_i = H_i(r)\mathbf{e}_\varphi = \text{const}$ $\vec{H}_i = H_i(r)\vec{e}_\varphi$.

Выберем калибровку вектор потенциала $\mathbf{A}$ таким образом, чтобы функция Ψ была вещественной. Тогда уравнения (1) – (3) сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям (4) – (6) с действительными коэффициентами и граничным условиям (7) к ним:

$$-\xi^2 \Delta \Psi + \left(\xi^2 \frac{4\pi^2 A^2}{\Phi_0^2} - 1 \right) \Psi + \Psi^3 = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + |\Psi|^2 \mathbf{A} / \lambda^2 = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \nabla \Psi = 0, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_r(r=R)=0, \quad A_\varphi(r=0)=0, \\ \frac{\partial A_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{i}{2\pi R}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = H_e, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

3. Методика решения

В силу симметрии задачи можно считать, что параметр порядка Ψ и вектор потенциал $\mathbf{A}$ зависят только от координаты r . Тогда из уравнения (6) следует $A_r(r) \equiv 0$, что согласуется с первым граничным условием (7). Таким образом, вектор $\mathbf{A}$ имеет только z и φ компоненты: $\mathbf{A} = A_z(r)\mathbf{e}_z + A_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi$. Введем безразмерную координату $\rho = r/\lambda$ и безразмерные компоненты вектор-потенциала $a_z(\rho) = A_z(\rho)/a_0$, $a_\varphi(\rho) = A_\varphi(\rho)/a_0$ где $a_0 = R\Phi_0/(2\pi\xi\lambda)$, и обозначим $\alpha = \xi^2/\lambda^2 \ll 1$, $\beta = R^2/\lambda^2 \ll 1$ – малые параметры. Тогда уравнения (4), (5) и (7) принимают вид

$$\alpha \frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\Psi}{d\rho} + \Psi - \beta(a_z^2 + a_\varphi^2)\Psi - \Psi^3 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho a_\varphi)}{d\rho} \right] - \Psi^2 a_\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{da_z}{d\rho} \right) - \Psi^2 a_z = 0, \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\varphi(0) = 0, \\ \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{i\lambda}{2\pi a_0 R}, \quad \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d a_\varphi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi\xi\lambda^2 H_e}{R\Phi_0}, \\ \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Если потребовать дополнительно, чтобы при $0 \leq \rho \leq R/\lambda$ выполнялись условия:

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{d\Psi}{d\rho} \right| \leq 1, \quad a_\varphi^2 + a_z^2 \leq 1, \quad (12)$$

то уравнения (8) – (10) можно решать методом последовательных приближений, положив $\Psi = \Psi_0 + \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2 + \dots$. Подставляя это разложение в уравнение (8) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях α и β , получим $\Psi_0 = 1$, $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = -(a_z^2 + a_\varphi^2)/2$. Тогда уравнения (9) – (12) принимают вид:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho a_\varphi)}{d\rho} \right] = a_\varphi - \beta a_\varphi^3 - \beta a_\varphi a_z^2, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{da_z}{d\rho} \right) = a_z - \beta a_z^3 - \beta a_z a_\varphi^2, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \left(a_\varphi \frac{da_\varphi}{d\rho} + a_z \frac{da_z}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = 0, \\ a_\varphi(0) = 0, \\ \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{i\lambda}{2\pi a_0 R}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{da_\varphi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi\xi\lambda^2 H_e}{R\Phi_0} \end{cases}, \quad (15)$$

$$\left| a_\varphi \frac{da_\varphi}{d\rho} + a_z \frac{da_z}{d\rho} \right| \leq \frac{\rho}{\beta}, \quad a_\varphi^2 + a_z^2 \leq 1. \quad (16)$$

Найдем приближенное решение уравнений (13) и (14), используя метод регулярного разложения по малому параметру β , в виде:

$$\begin{aligned} a_z(\rho) &= a_{z0}(\rho) + \beta \cdot a_{z1}(\rho) + \beta^2 \cdot a_{z2}(\rho) + \dots, \\ a_\varphi(\rho) &= a_{\varphi0}(\rho) + \beta \cdot a_{\varphi1}(\rho) + \beta^2 \cdot a_{\varphi2}(\rho) + \dots \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (15) в нулевом приближении, приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях, получим:

$$a_{z0} = \frac{i}{2\pi\sqrt{\beta}a_0} \cdot \frac{I_0(\rho)}{I_1(\sqrt{\beta})}, \quad a_{\varphi0} = \frac{H_e\lambda}{a_0} \cdot \frac{I_1(\rho)}{I_0(\sqrt{\beta})},$$

где $I_0(x)$ и $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, соответственно.

Используя известное фундаментальное решение уравнения [11], следующее приближение решения уравнения (13) имеет вид:

$$a_{\varphi 1} = K_1(\rho) \int I_1(\rho) \frac{-a_{\varphi 0}^3 - a_{\varphi 0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} - I_1(\rho) \int K_1(\rho) \frac{-a_{\varphi 0}^3 - a_{\varphi 0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W},$$

где $W = I_1(\rho) \cdot K_1'(\rho) - K_1(\rho) \cdot I_1'(\rho) = -1/\rho$ - детерминант Вронского, $K_1(x)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка. Тогда приближенное решение второго уравнения системы (8) может быть записано следующим образом:

$$a_{\varphi} \approx D I_1(\rho) + \beta \cdot K_1(\rho) \int I_1(\rho) \frac{-a_{\varphi 0}^3 - a_{\varphi 0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} - I_1(\rho) \int K_1(\rho) \frac{-a_{\varphi 0}^3 - a_{\varphi 0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} d\rho.$$

Оценим величину магнитного потока через поперечное сечение сверхпроводящей проволоки. Приблизенно вычисляя интегралы, входящее в последнее выражение, раскладывая модифицированные функции Бесселя вблизи нуля ($\rho \ll 1$) и ограничиваясь линейными по ρ слагаемыми, получим:

$$A_{\varphi} = a_0 a_{\varphi} \left(\frac{r}{\lambda} \right) \approx H_e \frac{r}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi \lambda^2 i}{\Phi_0 R^2} \right)^2 \right).$$

Откуда:

$$\Phi = \int_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \pi R^2 H_e \left[1 + \frac{1}{18} \left(\frac{j}{j_C} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где $j_C = \Phi_0 / (3\sqrt{3}\pi\lambda^2\xi)$ - критическая плотность тока [12], $j = i/S$, $S = \pi R^2$ - площадь поперечного сечения зонда.

Оценим порог чувствительности криозондового магнитометра. Пусть по зонду протекает переменный ток $i(t) = i_0 \sin(\omega_0 t)$, создающий в нем плотность тока $j(t) = j_0 \sin(\omega_0 t)$, близкую к критической. Положим $j_0 = i_0/S = 0,9 j_C$. Как и в феррозондовом магнитометре, сверхпроводящая проволока является сердечником LC контура с резонансной частотой близкой к $2\omega_0$ (рис. 1). Если катушка индуктивности является длинным соленоидом, содержащим n витков, то:

$$H_e(t) = H_0 + \frac{L}{nS} \frac{dq}{dt}, \quad (18)$$

где H_0 – постоянное или медленно меняющееся измеряемое магнитное поле, $q(t)$ – заряд на конденсаторе C .

Колебания в резонансном контуре описываются уравнением:

$$n \frac{d\Phi}{dt} + R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (19)$$

Подставляя в уравнение (19) выражение (17) для магнитного потока через сверхпроводящий зонд с учетом соотношения (18), получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \xi x - D \frac{dx}{d\tau} + aH_0 \sin(\tau) + \frac{\alpha}{4} \left(2 \frac{dx}{d\tau} \sin(\tau) - \frac{d^2x}{d\tau^2} \cos(\tau) \right), \quad (20)$$

где обозначено $\omega_1^2 = 1/2LC(1+\alpha)$, $\tau = 2\omega_0 t$, $\delta = R_0/2L(1+\alpha)$, $q = q_0 x$, $a = Sn\alpha^2/(2L\omega_0 q_0)$, $D = \delta/\omega_0$, $\omega_1^2/(4\omega_0^2) = 1 - \xi$, $\alpha = (j_0/6j_c)^2$.

Поскольку $\alpha \ll 1$, найдем решение уравнения (20) методом последовательных приближений в виде $x = x_0 + \alpha x_1 + \dots$. В нулевом приближении, система описывается уравнением:

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = \xi x_0 - D \frac{dx_0}{d\tau} + aH_0 \sin(\tau).$$

Решение имеет вид:

$$x_0 = \frac{DaH_0}{\xi^2 + D^2} \cos(\tau) + \frac{a\xi H_0}{\xi^2 + D^2} \sin(\tau).$$

При точной настройке контура ($\xi \ll D$) для выходного напряжения преобразователя получаем:

$$u(t) = \frac{q_0 x_0(t)}{C} = U_0 \cos(2\omega_0 t), \quad U_0 = 2Qn\alpha^2 \omega_0 \Phi, \quad (21)$$

где $Q = 1/D$ – добротность контура, $\Phi = SH_0$ – поток измеряемого магнитного поля H_0 через поперечное сечение сверхпроводникового зонда.

Из формулы (21) видно, что напряжение на контуре $u(t)$ осциллирует с частотой $2\omega_0$ синхронно с переменным током $i(t)$, текущим по проволоке, что позволяет использовать метод синхронного детектирования. Амплитуда U_0 выходного напряжения

пропорциональна измеряемому магнитному полю H_0 , причем крутизна преобразования растет с увеличением частоты ω_0 .

Известно, что глубина проникновения переменного электромагнитного поля зависит от его частоты. Критическую частоту, при которой это изменение становится существенным, можно оценить из выражения для комплексной глубины проникновения [12]:

$$\lambda^{-1} = \frac{\omega}{ic} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega + iv)}},$$

где ω_s , ω_n - плазменные частоты сверхпроводящих и нормальных электронов, их значения порядка $10^{10} \dots 10^{11}$ Гц, v - эффективная частота столкновений, равная 10^{10} Гц, ω - частота электромагнитного поля. Таким образом, изменение глубины проникновения в $\sqrt{2}$ происходит на частоте порядка 10^{11} Гц и для рабочей частоты 30 МГц ей можно пренебречь. При низких температурах легко получить для контура, содержащего $n = 100$ витков добротность $Q = 10^3$. Если $j_0/j_C = 0,9$, то коэффициент пропорциональности в формуле (21) между амплитудой выходного напряжения U_0 и потоком Φ измеряемого магнитного поля составит 10^{12} c^{-1} .

4. Результаты и обсуждение

Собственное шумовое напряжение измерительного усилителя, приведенное к входу, имеет величину порядка 1 нВ в полосе 1 Гц, тогда порог чувствительности криозондового магнитометра по магнитному потоку $\Phi_n = 10^{-21} \frac{\text{Вб}}{\sqrt{\text{Гц}}} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\Phi_0}{\sqrt{\text{Гц}}}$ не уступает лучшим сквидам [9, 10] при том, что конструкция сверхпроводникового зонда гораздо проще и технологичнее. По сути, сверхпроводниковый зонд очень похож на криотрон [9], в котором вентиль является зондом, а управляющая катушка – резонансным контуром.

Требование $R \ll \lambda$ фактически использовалось только для упрощения расчетов. При практических применениях достаточно выбирать $R \approx \lambda$, в этом случае взаимодействие скрещенных полей будет происходить по всему объему сверхпроводника. При этом для магнитометрии нужны "плохие" сверхпроводники – с большой глубиной проникновения и малой плотностью критического тока, например ВТСП-керамика с пониженным содержанием кислорода вблизи перехода. При температуре 77 К эффективная глубина проникновения в керамическом сверхпроводнике порядка 100 мкм [13].

Поскольку в соответствии с формулой (17) поток переменного магнитного поля через сечение сверхпроводника не зависит от направления тока в нем, сверхпроводящую проволоку диаметром 0,1 мм можно уложить "змейкой" так, чтобы в соседних звеньях ток протекал в противоположных направлениях. Зонд магнитометра диаметром 1 мм будет состоять из 100 таких звеньев и позволит получить порог чувствительности по магнитному полю порядка $B_n = 10^{-15} \frac{\text{Тл}}{\sqrt{\text{Гц}}}$. Такая чувствительность является рекордной даже для квантовых магнитометров и позволит проводить предельные измерения в области гео- и биомagnetизма. Отметим, что в отличие от сквидов, сигнальная характеристика криозондового магнитометра не является периодической, поэтому такой магнитометр может измерять абсолютное значение магнитной индукции, а не только ее изменение.

5. Заключение

1. Получено приближенное решение задачи о нелинейном взаимодействии взаимно-перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводнике второго рода в квазистационарном приближении.
2. Показана возможность использования взаимодействия взаимно-перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводящей проволоке для измерения напряженности магнитного поля.
3. Оценена предельная чувствительность криозондового магнитометра с поперечным возбуждением, рекордная даже для квантовых магнитометров.

Работа выполнена в рамках реализации ФПЦ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (соглашение № 14.В37.21.0736).

6. Список литературы

1. Горелик Г.С. О некоторых нелинейных явлениях, происходящих при суперпозиции взаимно перпендикулярных магнитных полей // Известия Академии наук СССР. Серия Физическая. 1944. Т. VIII, № 4. С. 172-188.
2. Зацепин Н.Н. Метод высших гармоник в неразрушающем контроле металлов. Минск: Наука и техника, 1980. 167 с.
3. Афанасьев Ю.В. Феррозонды. Л.: Энергия, 1969. 168 с.
4. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. К теории сверхпроводимости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1950. Т. 20, вып. 12. С. 1064 – 1082.

5. Игнатьев В.К. Обобщенная проницаемость сверхпроводника второго рода // Физика низких температур. 2005. Т. 31, № 12. С. 1355 – 1365
6. Игнатьев В.К., Черных С.В. Сверхпроводящий магнитометр с обратной связью по магнитному полю // Приборы и техника эксперимента. 1996. № 2. С. 124 – 126.
7. Игнатьев В.К., Якимец А.Л. ВТСП-магнитометр с двойной модуляцией // Измерительная техника. 2000. № 10. С. 49 – 52.
8. Игнатьев В.К., Якимец А.Л. Нелинейное взаимодействие трех волн в проводящем магнетике // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2002. № 1. С. 55 - 59
9. Алфеев В.Н., Бахтин П.А., Васенков А.А., Войтович И. Д., Махов В. И. Интегральные схемы и микроэлектронные устройства на сверхпроводниках / Под ред. В.Н. Алфеева. М.: Радио и связь, 1985. 232 с.
10. Игнатьев В.К., Краснополин И.Я. Оптимизированный СКВИД с радиочастотным смещением в диапазоне 25 - 30 МГц // Приборы и техника эксперимента. 1982. № 1. С. 198 – 201.
11. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
12. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000. 402 с.
13. Копелевич Я.В., Леманов В.В., Холкин А.Л.. Частотная зависимость импеданса и глубина проникновения магнитного поля в керамике $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ // Физика твердого тела. 1989. Т. 31, вып. 8. С. 302 – 304.

Interaction of mutually perpendicular magnetic fields in the type II superconductor

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0479190

Ignat'ev V.K., Yakimec A.L.

Russia, Volgograd State University
yakimets_volsu@mail.ru

The problem of interaction of crossed magnetic fields in the superconductors is considered. The expression which connects values of longitudinal and cross components of a magnetic field was obtained. The possibility of using this effect for measuring a magnetic field is shown; assessment of sensitivity of such a magnetometer was carried out.

Publications with keywords: [superconductor](#), [magnetometer](#), [SQUID](#), [cryotron](#), [the crossed magnetic fields](#), [non-linear magnetic](#)

Publications with words: [superconductor](#), [magnetometer](#), [SQUID](#), [cryotron](#), [the crossed magnetic fields](#), [non-linear magnetic](#)

References

1. Gorelik G.S. O nekotorykh nelineinykh iavleniiakh, proiskhodiashchikh pri superpozitsii vzaimno perpendikuliarnykh magnitnykh polei [Some nonlinear phenomena occurring in the superposition of mutually perpendicular magnetic fields]. *Izvestiia Akademii nauk SSS., Seriia Fizicheskaiia* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physics], 1944, vol. 8, no. 4, pp. 172-188.
2. Zatsepin N.N. *Metod vysshikh garmonik v nerazrushaiushchem kontrole metallov* [The method of higher harmonics in the nondestructive testing of metals]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1980. 167 p.
3. Afanas'ev Iu.V. *Ferrozondy* [Ferroprobes]. Leningrad, Energiia, 1969. 168 p.
4. Ginzburg V.L., Landau L.D. K teorii sverkhprovodimosti [To the theory of superconductivity]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of experimental and theoretical physics], 1950, vol. 20, no. 12, pp. 1064-1082.

5. Ignat'ev V.K. Obobshchennaia pronitsaemost' sverkhprovodnika vtorogo roda [Generalized permeability of superconductor of the second kind]. *Fizika nizkikh temperature* [Physics of low temperatures], 2005, vol. 31, no. 12, pp. 1355-1365
6. Ignat'ev V.K., Chernykh S.V. Sverkhprovodiashchii magnitometr s obratnoi svyaz'iu po magnitnomu poliu [Superconducting magnetometer with feedback on the magnetic field]. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and techniques of experiment], 1996, no. 2, pp. 124-126.
7. Ignat'ev V.K., Iakimets A.L. VTSP-magnitometr s dvoynoi moduliatsiei [HTSC-magnetometer with double modulation]. *Izmeritel'naia tekhnika* [Measurement technique], 2000, no. 10, pp. 49-52.
8. Ignat'ev V.K., Iakimets A.L. Nelineinoe vzaimodeistvie trekh voln v provodiashchem magnetike [Nonlinear interaction of three waves in a conducting magnetic]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of wave processes and radio engineering systems], 2002, no. 1, pp. 55 - 59
9. Alfeev V.N., Bakhtin P.A., Vasenkov A.A., Voitovich I. D., Makhov V. I. *Integral'nye skhemy i mikroelektronnye ustroystva na sverkhprovodnikakh* [Integrated circuits and microelectronic devices on superconductors]. Moscow, Radio i svyaz', 1985. 232 p.
10. Ignat'ev V.K., Krasnopolin I.Ia. Optimizirovannyi SKVID s radiochastotnym smeshcheniem v diapazone 25 - 30 MGts [Optimized SQUID with radio-frequency shift in the range of 25 - 30 MHz]. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and techniques of experiment], 1982, no. 1, pp. 198 – 201.
11. Zaitsev V.F., Polianin A.D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p.
12. Shmidt V.V. *Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov* [Introduction to the physics of superconductors]. Moscow, MTsNMO Publ., 2000. 402 p.
13. Kopelevich Ia.V., Lemanov V.V., Kholkin A.L. Chastotnaia zavisimost' impedansa i glubina proniknoveniia magnitnogo polia v keramike $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ [Frequency dependence of the impedance and the depth of penetration of the magnetic field in the ceramics $YBa_2Cu_3O_{7-x}$]. *Fizika tverdogo tela* [Solid state physics], 1989, vol. 31, no. 8, pp. 302 – 304.