

## Системная функция магнитоактивного элемента в неоднородном магнитном поле

# 10, октябрь 2012

DOI: 10.7463/1012.0462881

Игнатьев В. К., Орлов А. А.

УДК 537.633.2, 621.3.08

Россия, Волгоградский государственный университет

[orlwork@inbox.ru](mailto:orlwork@inbox.ru)

[ignatjev@vlpost.ru](mailto:ignatjev@vlpost.ru)

### Введение

Развитие современной электроники идет по пути внедрения новых физических принципов при конструировании микросхем. Одним из перспективных для применения физическим явлением являются спиновые и магнитостатические волны. Ведутся исследования для замены энергозатратного способа передачи сигнала через электрический ток на спиновые токи, которые практически не требуют энергетических затрат. В настоящее время можно говорить о появлении целой области функциональной электроники – магнитной микроэлектроники, рассматривающей проблемы создания электронных компонентов и интегральных схем на спиновых токах и других магнитных эффектах [1, 2].

Элементы магнетоэлектроники в общем случае можно рассматривать как параметрические многополюсники, осуществляющие интегральное преобразование сигналов типа свертки, аналогичное преобразованию сигнала в акустоэлектронных элементах [3]. Ядром соответствующего интегрального преобразования является системная (аппаратная) функция, которая полностью описывает все свойства элемента. В современной радиотехнике метод системных функций используется для оптимизации сигнальных характеристик

радиосистем [4], в частности редукция за аппаратную функцию для компенсации возникающих искажений сигнала [5]. В отличие от параметрических многополюсников с сосредоточенными параметрами, преобразование сигнала в которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, вытекающими из правил Кирхгофа, управляющим воздействием для магнитоактивного элемента является распределенная не только во времени, но и в пространстве волна. При этом длина спиновой волны может быть существенно меньше размера элемента [1], то есть магнитное поле будет существенно неоднородным в пределах магнитоактивного элемента. Поэтому для анализа преобразования сигнала в устройствах магнетозлектроники необходим электродинамический подход, аналогичный методам анализа акустооптических элементов с использованием магнитостатического приближения [6].

## 1. Магнитостатическая задача

Рассмотрим обобщенную конструкцию магнитоактивного элемента (рис. 1) в виде объемного многополюсника  $D$  с  $M$  контактами ( $S_m, m = 1, 2, \dots, M$ ). Закон Ома для изотропного проводника в магнитном поле

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\sigma}{en} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}''],$$

где  $\sigma$  – проводимость,  $n$  – концентрация носителей заряда,  $\mathbf{B}''$  – полная индукция магнитного поля в проводнике, можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \cdot B_z'' & \beta \cdot B_y'' \\ \beta \cdot B_z'' & 1 & -\beta \cdot B_x'' \\ -\beta \cdot B_y'' & \beta \cdot B_x'' & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{\sigma}{en}.$$

и разрешить относительно плотности тока в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E},$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + (\beta \mathbf{B}'')^2} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 B_x''^2 & -\beta B_z'' - \beta^2 B_x'' B_y'' & \beta B_y'' + \beta^2 B_z'' B_x'' \\ \beta B_z'' + \beta^2 B_x'' B_y'' & 1 + \beta^2 B_y''^2 & -\beta B_x'' - \beta^2 B_z'' B_y'' \\ -\beta B_y'' - \beta^2 B_z'' B_x'' & \beta B_x'' + \beta^2 B_z'' B_y'' & 1 + \beta^2 B_z''^2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{A_0^{-1} + \beta A_1^{-1} + \beta^2 A_2^{-1}}{1 + (\beta \mathbf{B}'')^2},$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z'' & B_y'' \\ B_z'' & 0 & -B_x'' \\ -B_y'' & B_x'' & 0 \end{pmatrix}; A_2^{-1} = \begin{pmatrix} B_x''^2 & -B_x'' B_y'' & B_z'' B_x'' \\ B_x'' B_y'' & B_y''^2 & -B_z'' B_y'' \\ -B_z'' B_x'' & B_z'' B_y'' & B_z''^2 \end{pmatrix}.$$

В слабых полях при  $|\mathbf{B}''|\beta \ll 1$  в линейном по магнитному полю приближении получаем

$$\mathbf{j} = \sigma(A_0^{-1} + \beta A_1^{-1})\mathbf{E} + \frac{\sigma^2}{en}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}'']. \quad (1)$$

Разделим полное магнитное поле  $\mathbf{B}''$  на поле  $\mathbf{B}$ , созданное внешними источниками, и поле  $\mathbf{B}'$  токов, текущих через магнитоактивный элемент:  $\mathbf{B}'' = \mathbf{B} + \mathbf{B}'$ . Для однородного и немагнитного материала из уравнения (1) и уравнений магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

получаем

$$\Delta \varphi = -\frac{\sigma^2 \mu_0}{en} (\nabla \varphi)^2, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}' = \mu_0 \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{\sigma}{en} [\mathbf{E} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}')] \right\}. \quad (3)$$

Правая часть в уравнении (2) описывает самовоздействие тока, протекающего через магнитоактивный элемент, то есть пинч-эффект.

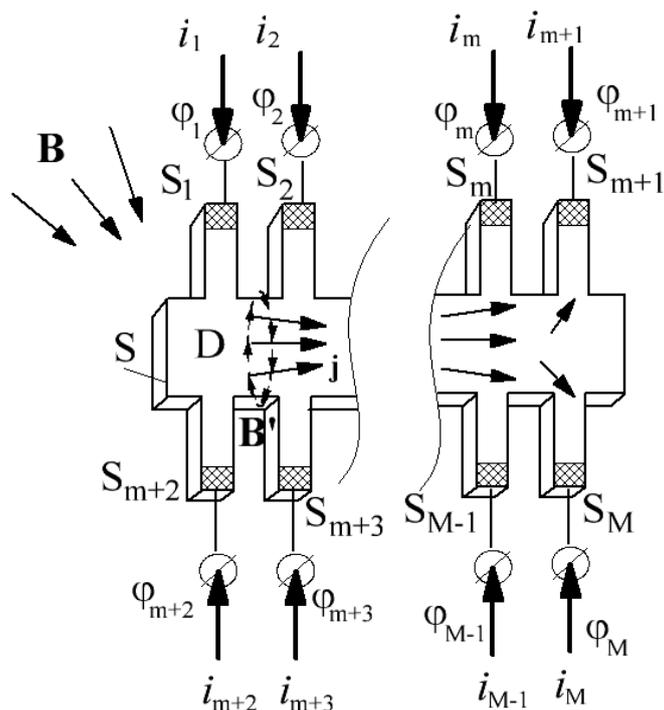


Рис. 1. Структура магнитоактивного устройства.

Пусть в область  $D$ , ограниченную поверхностью  $S$ , через соответствующие контактные поверхности  $S_m$  втекают токи  $i_m$ . Условие для нормальной компоненты плотности тока на границе  $S$  имеет вид:

$$j_n|_S = -\sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $f_m(\mathbf{r})$  – функция-носитель поверхности  $S_m$ :

$$\begin{cases} \oint_{S_m} f_m(\mathbf{r}) ds = 1; \\ f_m(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \notin S_m. \end{cases}, \quad (5)$$

Из материального уравнения (1) в этом случае следует, что распределение потенциала является решением внутренней смешанной задачи, когда на границе области задана линейная комбинация нормальной и тангенциальной производных потенциала

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S + \frac{\sigma}{en} ([\nabla \varphi \times \mathbf{B}] \mathbf{n}) \Big|_S + \frac{\sigma}{en} ([\nabla \varphi \times \mathbf{B}'] \mathbf{n}) \Big|_S = -\frac{1}{\sigma} \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль поверхности  $S$ .

Примем за ноль среднее значение потенциала  $\varphi$  в области  $D$  и будем искать совместное решение уравнений (2) и (3) с граничными условиями (5) методом последовательных приближений, положив

$$\varphi(\mathbf{r}) = u_0 \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \sigma u_0 \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mu_0 \sigma u_0 \mathbf{b}'(\mathbf{r}),$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \alpha \psi_1(\mathbf{r}) + \dots, \quad \mathbf{b}'(\mathbf{r}) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) + \alpha \mathbf{b}_1(\mathbf{r}),$$

где  $u_0 = \max_{m,k} |\varphi_m - \varphi_k|$  – максимальное напряжение на магнитоактивном

элементе,  $\alpha = \frac{\sigma^2 \mu_0}{en} u_0$ ,  $0 < \alpha \ll 1$ . Тогда уравнения (2, 3, 5) эквивалентны

цепочке краевых задач Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta \psi_0 &= 0, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \Big|_S &= -\frac{1}{\sigma u_1} \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{rot } \mathbf{b}_0 = -\nabla \psi_0, \quad \text{rot } \mathbf{b} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 &= -(\nabla \psi_0)^2, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \Big|_S &= [\mathbf{b} \times \nabla \psi_0] \mathbf{n} + [\mathbf{b}_0 \times \nabla \psi_0] \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{r} \in D$ ,  $\mathbf{r}' \in S$  – вторая функция Грина задачи Неймана для области  $D$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Тогда решение краевой задачи (7) имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\sigma u_0} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{m=1}^M i_m f_m(\mathbf{r}') ds', \quad (9)$$

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}') / \partial \mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'. \quad (10)$$

Соответственно, решение краевой задачи (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}) = & \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right)^2 d^3 r' + \\ & + \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' + \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds'. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем второе слагаемое в формуле (11) с учетом третьего уравнения системы (7):

$$\begin{aligned} \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' &= \int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] \right\} d^3 r' = \\ &= \int_D \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} d^3 r' + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left[ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' = \\ &= \int_D \mathbf{b}_0(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' - \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right]^2 d^3 r'. \end{aligned}$$

Для третьего слагаемого, соответственно, получаем:

$$\oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{b}(\mathbf{r}') \times \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] ds' = \int_D \mathbf{b}(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r'.$$

Таким образом, с учетом формул (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{\sigma}{en} \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' + \\ & + \frac{\sigma^2 \mu_0}{en} \int_D \int_D \left[ \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} \right] \left[ \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' d^3 r''. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2. Измеряемые потенциалы и взаимность

Формула (12) совместно с (9) позволяет получить потенциал внутри и на поверхности магнитоактивного элемента. Однако, места контактов, к которым прикреплены проводники, не могут рассматриваться как точечные. Измеряемое напряжение при этом равно разности потенциалов между сечениями проводников подводимых к магнитоактивному элементу, выбранными на некотором расстоянии от активной зоны элемента.

Пусть к контакту с номером  $m$  подключен измеритель напряжения, через который в общую шину течет ток  $i_v$ . Будем считать, что через боковую поверхность провода ток не течет, а вольтметр подключен к достаточно удаленному от активной зоны преобразователя сечению, которое является эквипотенциальным. Мощность тепловых потерь в подводящем проводе может с учетом условия  $div \mathbf{j} = 0$  и формул (4) и (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = & \int_{C_m} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r = - \int_{C_m} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot grad(\varphi(\mathbf{r})) d^3 r = \int_{C_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot div(\mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3 r - \\ & - \int_{C_m} div(\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3 r - \int_{s_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) ds = i_v \left( \varphi_m - \int_{s_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $C_m$  – внутренняя область проводника, подсоединенного к  $m$ -ой площадке,  $s_m$  – его поверхность,  $\varphi_m$  – потенциал на сечении проводника, удаленного от магнитоактивной зоны. С другой стороны мощность тепловых потерь в проводнике может быть выражена через интегральный закон Джоуля-Ленца:

$$\frac{dQ}{dt} = i_v^2 R_m. \quad (14)$$

Здесь  $R_m$  – эквивалентное сопротивление проводника. Учитывая (20) и (21) получаем

$$\varphi_m - \int_{s_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds = i_v R_c.$$

Для потенциала, измеряемого идеальным вольтметром при  $i_v$ , стремящемся к нулю, получаем:

$$\varphi_m = \int_S f_m(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') ds'. \quad (15)$$

Покажем теперь, что именно измеряемые потенциалы, определенные соотношением (15), в однородном магнитном поле удовлетворяют соотношениям взаимности Онзагера [7]. Производство энтропии  $S$  для системы

с заданными плотностью тока и распределением электрического поля при температуре  $T$  можно найти по аналогии с выводом соотношения (13):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{T} \int_D \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M i_m \int_{S_m} \varphi(\mathbf{r}) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M X_m J_m. \quad (16)$$

Здесь

$$X_m = i_m, J_m = \varphi_m \quad (17)$$

– свободная сила и поток энергии соответственно. Выражение в виде (16) и определение (17) позволяет применить теорему взаимности для матрицы сопротивления  $\mathbf{Y}$ , определяемой следующим уравнением:

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^M \mathbf{Y}_{mk} i_k. \quad (18)$$

Теорема Онзагера [7] утверждает, что в однородном магнитном поле матрица  $\mathbf{Y}$  симметрична, т.е. для ее элементов справедливо

$$\mathbf{Y}_{mk}(\mathbf{B}) = \mathbf{Y}_{km}(-\mathbf{B}). \quad (19)$$

Представим теперь измеряемый потенциал из (15) с учетом соотношения (12) как сумму пропорционального внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}$  потенциала сигнала  $\varphi_m^{(S)}$  и не зависящего от внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  потенциала асимметрии  $\varphi_m^{(A)}$ , который можно разделить на линейную и нелинейную по току  $i$  части. Тогда

$$\varphi_m^{(A1)} = \frac{1}{\sigma} \oint_S \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( \sum_{k=1}^M i_k f_k(\mathbf{r}') \right) \cdot f_m(\mathbf{r}) ds ds', \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(A2)} &= \frac{\mu_0}{4\pi en} \iint_{D D} \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}''} \cdot \left( \sum_{k=1}^M i_k f_k(\mathbf{r}') \right) ds \right\} \times \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} \right] \times \\ &\times \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{\partial \mathbf{r}'''} \left[ \sum_{k=1}^M i_k f_k(\mathbf{r}') \right] ds''' \right\} \times \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} f_m(\mathbf{r}) ds \right\} \right] d^3 r' d^3 r'', \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varphi_m^{(S)} = \frac{1}{en} \oint_S f_m(\mathbf{r}) \times \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}'} \left[ \sum_{k=1}^M i_k f_k(\mathbf{r}'') \right] ds'' \right\} \times \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \right] d^3 r' ds,$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$\varphi_m^{(S)} = \sum_{k=1}^M i_k \frac{1}{en} \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}'} f_k(\mathbf{r}'') ds'' \right\} \times \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} f_m(\mathbf{r}) ds \right\} \right] d^3 r'. \quad (22)$$

При выполнении условия единственности функции Грина задачи Неймана

$$\oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS_r = 0.$$

она является симметричной [8]:

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}''). \quad (23)$$

Применяя условие (23) в соотношении (24) получим

$$\varphi_m^{(S)} = \sum_{k=1}^M i_k \frac{1}{en} \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') [\Gamma_k(\mathbf{r}') \times \Gamma_m(\mathbf{r}')] d^3 r', \quad (24)$$

где обозначено

$$\Gamma_k(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} f_k(\mathbf{r}') ds'. \quad (25)$$

Системная функция магнитоактивного элемента в этом случае может быть определена следующим образом:

$$\mathbf{W}_{km}(\mathbf{r}') = [\Gamma_k(\mathbf{r}') \times \Gamma_m(\mathbf{r}')] = \left[ \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}'} f_k(\mathbf{r}'') ds'' \right\} \times \left\{ \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}'} f_m(\mathbf{r}) ds \right\} \right]. \quad (26)$$

Приведем формулу (20) к виду (18), тогда для сигнальной части тензора сопротивления  $\mathbf{Y}$  получаем

$$\varphi_m^{(S)} = \sum_{k=1}^M Y_{mk}^{(S)} i_k, \text{ где } Y_{mk}^{(S)} = \frac{1}{en_D} \int \mathbf{B}(\mathbf{r}') \mathbf{W}_{mk}(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Но из соотношения (25) видно, что матрица  $\mathbf{W}$  антисимметричная, следовательно, для сигнальной части тензора сопротивления соотношения взаимности Онзагера в виде (19) выполняется даже в неоднородном магнитном поле:

$$Y_{mk}^{(S)}(\mathbf{B}(r)) = Y_{km}^{(S)}(-\mathbf{B}(r)). \quad (27)$$

### 3. Системная функция магнитоактивного четырехполюсника

Экспериментальную проверку соотношений (24) и (27) можно провести для гальваномагнитного четырехполюсника, например, преобразователя Холла, структура которого приведена на рис. 2.

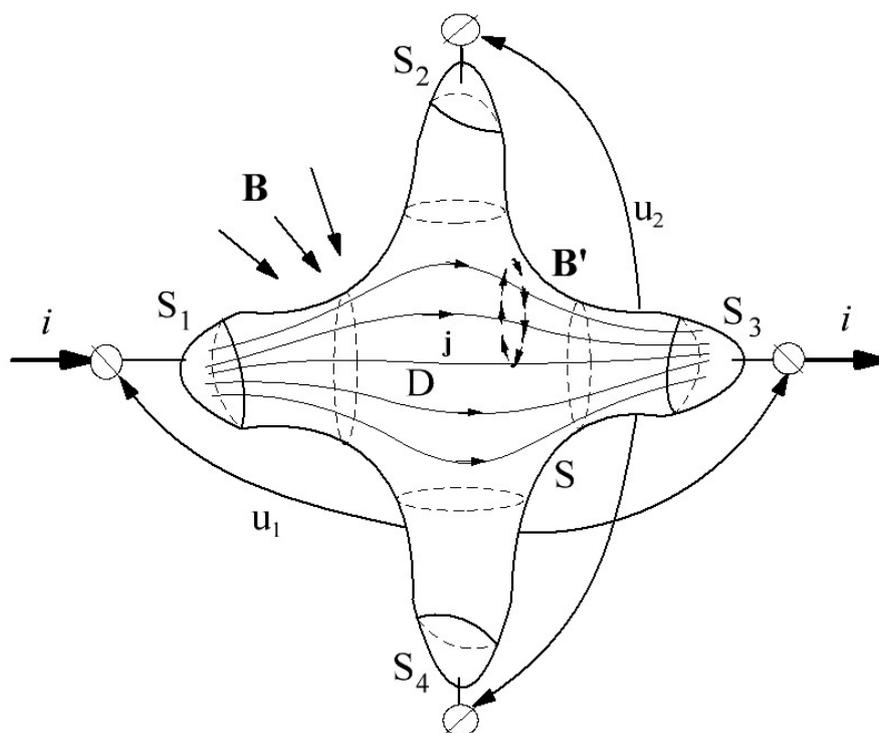


Рис. 2. Структура магнитоактивного четырехполюсника.

Рассмотрим и две возможные схемы подключения магнитоактивного четырехполюсника:

1) Контакты 1 и 3 подключены к источнику тока  $i$ . Напряжение  $u_s^{(2)}$  измеряется идеальным вольтметром, подключенным к 4 и 2 контакту.

2) Контакты 2 и 4 подключены к источнику тока  $i$ . Напряжение  $u_s^{(1)}$  измеряется идеальным вольтметром, подключенным к 3 и 1 контакту.

Заметим, что выражение (9) представляет собой распределение потенциала при протекании тока, без учета влияния магнитного поля. Используя формулы (1) и (25), положив  $\mathbf{B}'' = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , получим выражения для распределения плотности тока в магнитоактивном четырехполюснике для обоих случаев подключения:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) = i(\Gamma_1(\mathbf{r}) - \Gamma_3(\mathbf{r})) = i \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} [f_3(\mathbf{r}') - f_1(\mathbf{r}')] ds',$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = i(\Gamma_4(\mathbf{r}) - \Gamma_2(\mathbf{r})) = i \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} [f_4(\mathbf{r}') - f_2(\mathbf{r}')] ds'.$$

Здесь  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{j}_2(\mathbf{r})$  – плотности тока в отсутствии внешнего магнитного поля в соответствующих случаях. Тогда выражение (22) может быть записано в следующем виде:

$$u_s^{(2)} = \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} = \frac{1}{eni_D} \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') [\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \times \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')] d^3 r',$$

$$u_s^{(1)} = \varphi_1^{(1)} - \varphi_3^{(1)} = \frac{1}{eni_D} \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') [\mathbf{j}_2(\mathbf{r}') \times \mathbf{j}_1(\mathbf{r}')] d^3 r',$$
(28)

В уравнении (29) координаты отсчитываются от центра магнитоактивного элемента. При экспериментальной проверке полученных выражений для системной функции магнитоактивного элемента удобно рассматривать напряжение сигнала  $u_s$  как функцию координат его центра, тогда уравнение (28) можно преобразовать в свертку

$$u_s(\mathbf{r}) = i \cdot R_H \int_D \mathbf{B}(\mathbf{r}') \mathbf{W}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r',$$
(29)

где  $\mathbf{r}$  – координаты центра датчика;  $R_H = 1/en$  – коэффициент Холла,  $\mathbf{W}(\mathbf{r})$  – векторная объемная системная функция магнитоактивного четырехполюсника:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \times \mathbf{j}_2(\mathbf{r})]}{i^2}. \quad (30)$$

Приближение малого тока в соотношении (30) математически требуется для строгого выполнения первого условия краевой задачи (8), в правую часть которой входят значения потенциала в нулевом магнитном поле. Физически условие (30) обеспечивает справедливость линейного приближения, естественно, что понятие системной функции и теорема взаимности применимы только к линейным системам.

В большинстве случаев магнитоактивный элемент представляет собой тонкую пленку из полупроводникового материала, поэтому имеет смысл свести задачу к двумерной. Пусть область  $D$  представляет собой цилиндр высотой  $d$  с основанием  $S$ , лежащим в плоскости  $xu$ , то есть пленку достаточно тонкую, чтобы распределение тока и магнитного поля вдоль оси  $z$  считать равномерным. Тогда векторы  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{j}_2(\mathbf{r})$  можно считать лежащими в плоскости  $xu$ , а их векторное произведение направленным вдоль оси  $z$ . Тройной интеграл в формуле (28) можно взять сначала по оси  $z$ , что эквивалентно умножению на  $d$  двойного интеграла по основанию  $S$ .

Введем относительную линейную плотность тока  $\lambda$  в отсутствие магнитного поля

$$\lambda(x, y) = \lim_{i \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{i} \int_0^d \mathbf{j}(x, y, z) dz \right] = \lim_{i \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{i} \mathbf{j}(x, y, 0) \right]$$

и перепишем формулу (28) в виде

$$u_s = \frac{iR_H}{d} \int_C B_z(x', y') [\lambda_{1x}(x', y') \lambda_{2y}(x', y') - \lambda_{2x}(x', y') \lambda_{1y}(x', y')] dx' dy'.$$

Тогда уравнения (30) и (29) могут быть записаны в следующем виде:

$$u_s(x, y) = i \cdot R_H \int_C B_n(x', y') w(x - x', y - y') \cdot dx' \cdot dy', \quad (31)$$

$$w(x, y) = \frac{\lambda_{1x}(x, y) \cdot \lambda_{2y}(x, y) - \lambda_{2x}(x, y) \cdot \lambda_{1y}(x, y)}{d}. \quad (32)$$

#### 4. Численное моделирование

Для реального магнитоактивного элемента системную функцию целесообразно находить численными методами, например в среде физического моделирования COMSOL [9]. Рассмотрим в качестве примера тонкопленочный гальваномагнитный преобразователь Холла ПХЭ602817А, геометрия которого приведена на рис. 3 [10]. Построим его системную функцию по формуле (33) через распределение токов. Перейдем к двумерной задаче, предполагая, что плотность втекающего в область преобразователя тока равномерна по границе контактов. Толщина пленки датчика составляет  $d = 10$  мкм.

Численное моделирование выполнялось сеточным методом с использованием адаптивной сетки, с максимальным размером элемента в 9 мкм. Общее число элементов составило 158394. Расчет был произведен на ПК с процессором Pentium(R) Dual-Core T4300 и 3 Гбайт оперативной памяти. Двумерная системная функция преобразователя Холла показана на рис. 4.

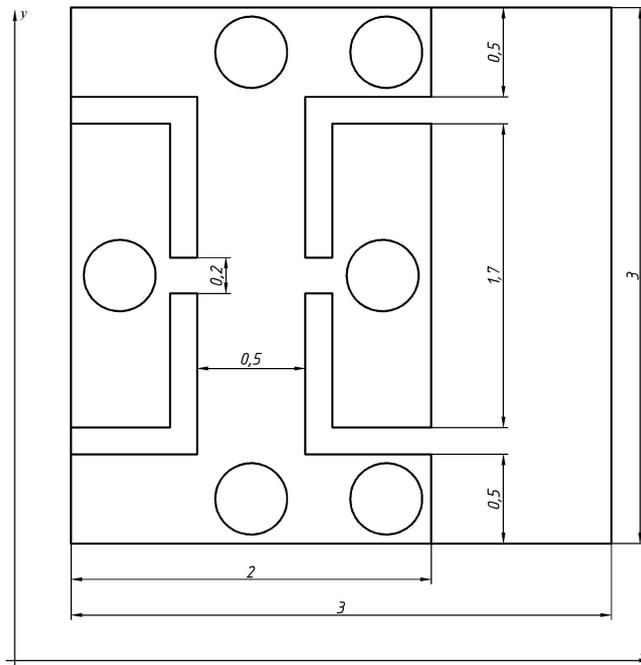


Рис. 3. Конструкция преобразователя ПХЭ602817А.

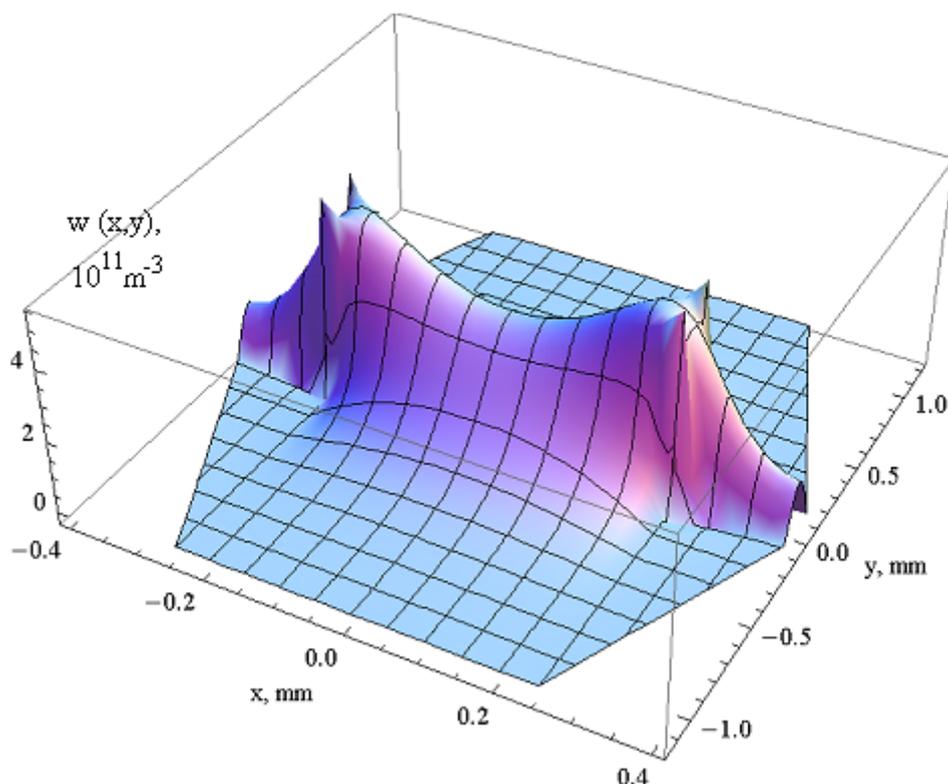


Рис. 4. График двухмерной системной функции преобразователя Холла ПХЭ602817А.

Для измерения системной функции, зависящей от двух координат, необходимо создавать распределения магнитного поля, локального по обеим координатам. Это принципиально возможно (к примеру, соленоид малых размеров), но практически сложно осуществимо. Для экспериментальной проверки более удобными являются одномерные системные функции. Они получаются, если в уравнении (31) положить  $B_n(x',y') = B_n(x)$ :

$$u_s(x) = i \cdot R_H \int_{x-x_{\min}}^{x-x_{\max}} B_n(x') \int_{y-y_{\min}}^{y-y_{\max}} w(x-x', y-y') \cdot dy' \cdot dx'.$$

Здесь  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ ;  $y_{\max}$ ,  $y_{\min}$  – координаты, определяющие размеры датчика по соответствующим осям. Тогда, вводя одномерные системные функции для  $x$  и  $y$

$$w_x(x) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} w(x, y') \cdot dy', \quad w_y(y) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} w(x', y) \cdot dx', \quad (33)$$

получим выражения для напряжений сигнала

$$u_s(x) = i \cdot R_H \int_{x-x_{\min}}^{x-x_{\max}} B_n(x') w_x(x-x') \cdot dx';$$
$$u_s(y) = i \cdot R_H \int_{y-y_{\min}}^{y-y_{\max}} B_n(y') w_y(y-y') \cdot dy'.$$
(34)

Для получения одномерных аппаратных функций, двумерная аппаратная функция была проинтегрирована согласно (33). На рис. 5 и 6 показаны результаты интегрирования (33). Они различаются тем, по какой оси предполагается однородность магнитного поля.

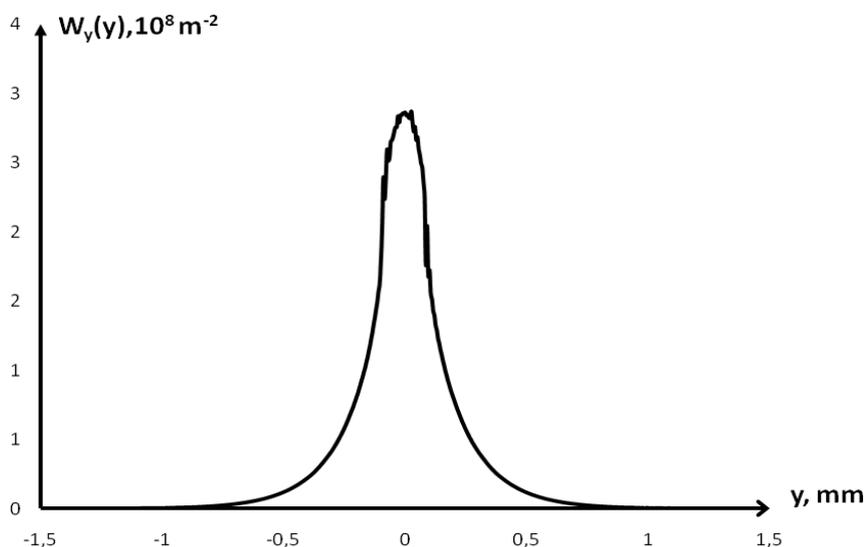


Рис. 5. График одномерной системной функции преобразователя ПХЭ602817А в однородном по оси  $x$  поле.

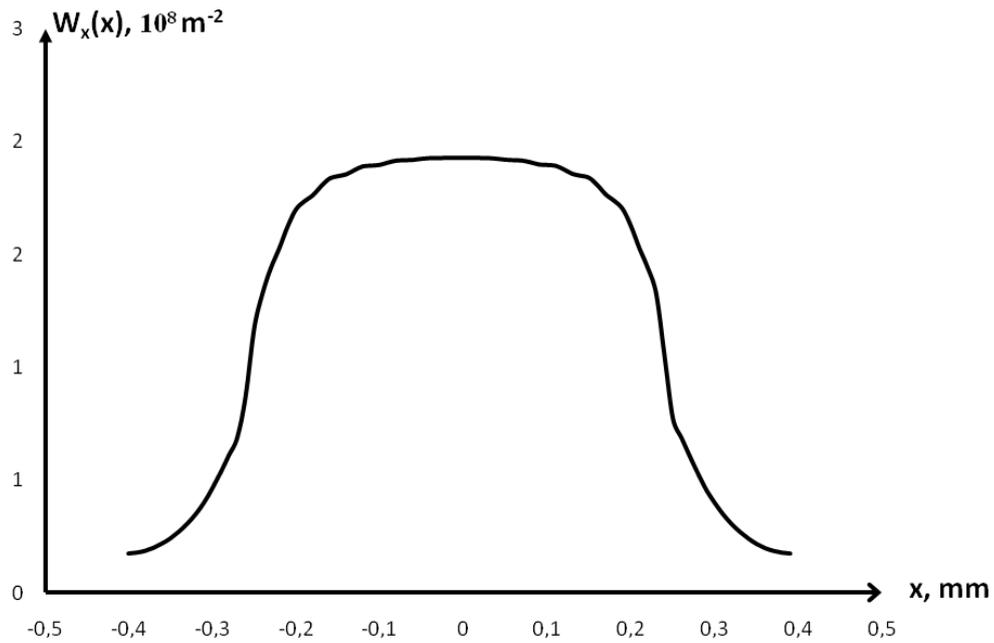


Рис. 6. График одномерной системной функции преобразователя ПХЭ602817А в однородном по оси  $y$  поле.

### 5. Экспериментальная проверка взаимности в неоднородном поле

Для проверки соотношений (28) и (31) разработана специальная установка, структурная схема которой приведена на рис. 7.

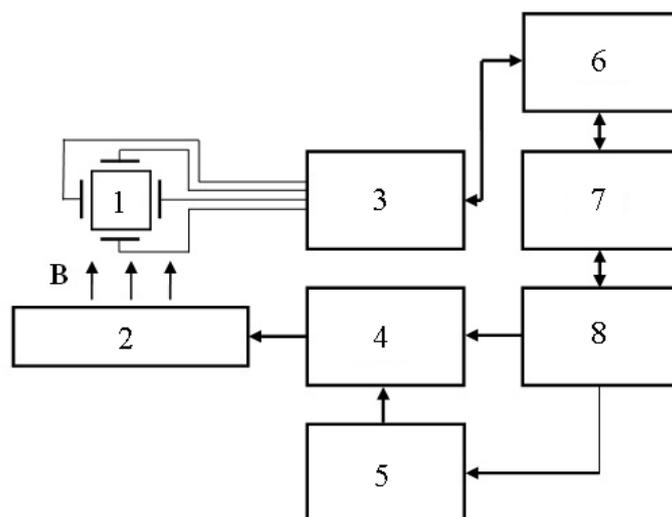


Рис. 7. Структурная схема установки для экспериментальной проверки расчета системной функции преобразователя Холла: 1) преобразователь Холла, 2) система проводников, 3) цифровой холловский магнитометр, 4) блок коммутации токов, 5) источник тока, 6) персональный компьютер (ПК), 7) преобразователь интерфейсов, 8) микроконтроллер.

Интерфейсная программа ПК (6) осуществляет управление и синхронизацию измерений и установки распределения тока. С помощью преобразователя интерфейсов (7) осуществляется передача кодовой последовательности на микроконтроллер (8), который по команде ПК управляет блоком коммутации токов (4). Источник тока (5) является опорным для БКТ, осуществляющим коммутацию тока в системе проводников (2). На систему проводников закрепляется исследуемый преобразователь (1), подключенный к цифровому холловскому магнитометру (3) [11] – он измеряет магнитное поле и передает полученные данные в ПК, интерфейсная программа которого записывает их в файл для дальнейшей обработки. Магнитометр позволяет выполнять измерения магнитного в разных режимах: ток через датчик может пропускаться как через токовые, так и через потенциальные контакты. При этом измерения напряжения Холла проводятся на двух оставшихся свободных контактов.

Система проводников представляет собой 64 параллельных проволочки диаметром 90 мкм, расположенных в одной плоскости (рис. 8). При ее изготовлении на пластмассовом цилиндре диаметром 20 мм через прокладку из конденсаторной бумаги виток к витку была намотана проволока с проклейкой клеем БФ-6, разбавленном спиртом в соотношении 1:6. После этого проволока была разрезана в направлении, перпендикулярном виткам, таким образом, получалась система большого числа параллельных проводников. Эта система наклеена на алюминиевую пластину для обеспечения необходимого уровня отведения тепла. Проволочки припаяны к двум контактным платам, которые приклеены к алюминиевой пластине клеем «Монолит».

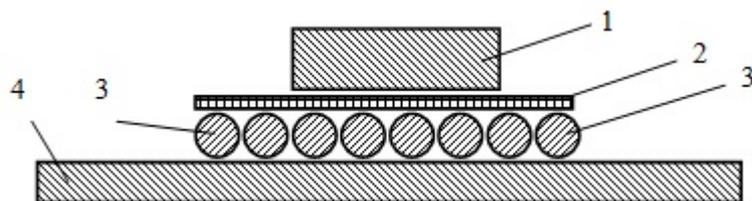


Рис. 8. Система проводников: 1 – преобразователь Холла, 2 – изолятор, 3 – медная проволока, 4 – алюминиевое основание.

При помощи полученных из формулы (28) одномерных системных функций, была восстановлена реакция преобразователя Холла на токи в системе проводников. На рис. 9 показана восстановленная и измеренная реакция датчика на внешнее неоднородное поле.

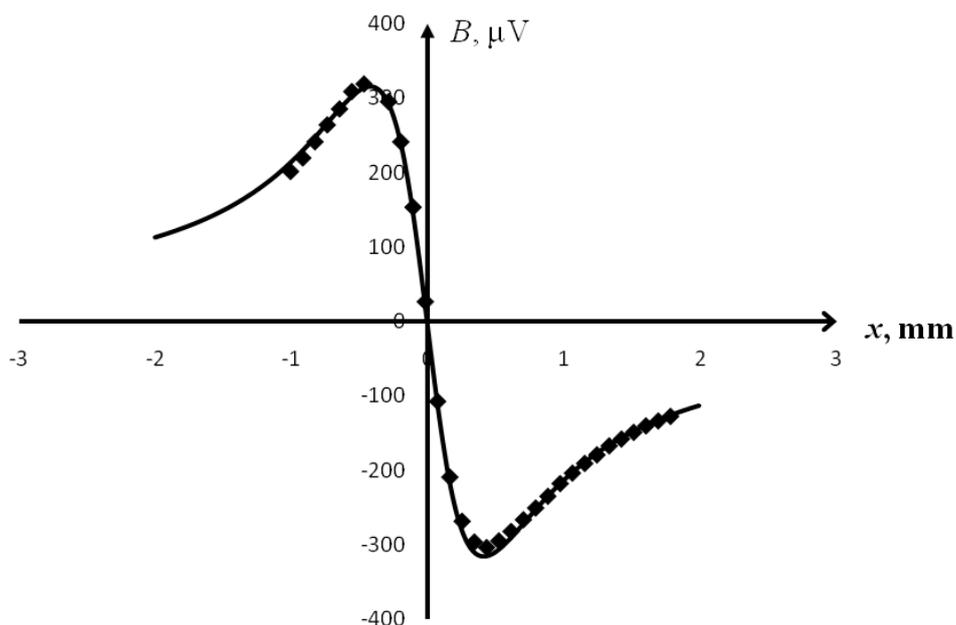


Рис. 9 – Графики экспериментальных и теоретических оценок реакции преобразователя Холла на токи в системе проводников. Сплошная линия – теоретический расчет с учетом одномерной системной функции; точки – экспериментальные значения

Экспериментальные отсчеты накладываются на кривую, полученную по формуле (34) с помощью рассчитанной системной функции, что говорит о достоверности предложенного метода расчета системной функции магнитоактивного элемента.

Схема проверки соотношений взаимности показана на рис. 10. В ходе проверки проводятся две серии измерения рис. 10 (а) и (б), отличающихся схемой подключения вольтметра и источника тока. При этом переключение режима измерения производится при помощи электроники холловского магнитометра [11] и преобразователь остается неподвижным.

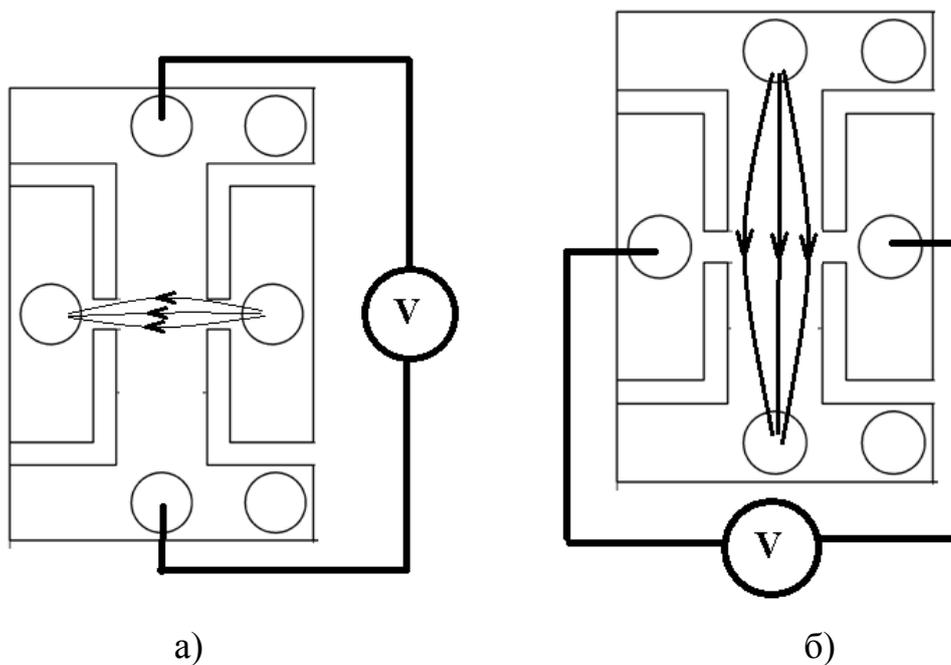


Рис. 10. Схема проверки соотношений взаимности для преобразователя Холла:  
 а) Вольтметр подключен к потенциальным контактам, ток пропускается через токовые; б) Вольтметр подключен к токовым контактам, ток пропускается через потенциальные (Под вольтметром понимается измерительная часть магнитометра, включающая себя усилители и АЦП [11])

В каждой серии измерений производится переключение токов в проводниках, создающих магнитное поле (рис. 8). Полученные значения напряжений для каждого номера проводника сравниваются. Критерием выполнения соотношений взаимности является величина относительной ошибки  $\Delta$ , равная отношению среднеквадратичного отклонения к суммарной энергии сигналов:

$$\Delta = \sqrt{2 \frac{\sum_{n=1}^N (u_s^{(2)}[n] - u_s^{(1)}[n])^2}{\sum_{n=1}^N (u_s^{(1)}[n])^2 + \sum_{n=1}^N (u_s^{(2)}[n])^2}}}. \quad (35)$$

Здесь  $N$  – количество экспериментальных отсчетов, напряжения  $u_S^{(1)}[n]$  и  $u_S^{(2)}[n]$  напряжения, снимаемые с вольтметра в первой и второй сериях измерений, для каждого номера проводника с током  $n$ .

В ходе эксперимента по предложенной схеме относительная ошибка  $\Delta$  составила приблизительно 2 %.

## 6. Выводы

Аппаратная функция является важным параметром любой измерительной системы. Введение такой функции в уровень техники позволяет проектировать устройства, подбирая параметры преобразователей более осознанно и специфично под конкретную задачу при минимальных материальных затратах. Проведенное исследование и формулы (28) и (31) для системной функции магнитоактивных элементов дает возможность ее расчета и анализа физических свойств.

Взаимность преобразователей в неоднородном поле говорит о том, что соотношения Онзагера могут быть распространены на некоторые системы с высокой неоднородностью магнитного поля. Кроме того, полученные выражения для компонент напряжения не зависящих от поля, позволяют учесть паразитные параметры элементов на стадии проектирования, что позволяет поднять производство устройств магнетoeлектроники на новый уровень.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (государственный контракт № 14.740.11.0830).

## Список литературы

1. Игнатъев А.А., Ляшенко А.В. Гетеромагнитная микроэлектроника. Микросистемы активного типа. М.: Наука, 2006. 877 с.
2. Огнев А. В., Самардак А. С. Спинтроника: физические принципы, устройства и перспективы // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 70 – 80.

3. Соболев Б.В., Бочков Б.Г., Бондаренко В.С., Зуев В.Е. Устройства корреляционной обработки сигналов на акустических волнах // Зарубежная электронная техника. 1977. № 6. С. 3 – 54.
4. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
5. Игнатъев В.К., Протопопов А.Г. Повышение разрешающей способности магнитометра на основе эффекта Холла // Известия ВУЗов. Приборостроение. 2003. Т. 46, № 3. С. 38 – 44.
6. Функциональные устройства обработки сигналов (основы теории и алгоритмы) /под ред. Ю.В. Егорова. М.: Радио и связь, 1997. 288 с.
7. Lars Onsager. Reciprocal Relations in Irreversible Process // Physical Review Feb. 15, 1931. Vol. 37. P. 405 – 426.
8. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
9. Официальный сайт программного продукта COMSOL Multiphysics. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://comsol.com/> (дата обращения 14.10.2012).
10. Технические характеристики преобразователей Холла серии ПХЭ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.nvlab.spb.ru/Hall%20sensors.pdf> (дата обращения 14.10.2012).
11. Голубев А.А., [Игнатъев В.К.](#), [Никитин А.В.](#) Прецизионный магнитометр // Приборы и техника эксперимента. 2008. Т. 51, № 5, С. 753-758.

## System function of magnetoactive element in inhomogeneous magnetic field

# 10, October 2012

DOI: [10.7463/1012.0462881](https://doi.org/10.7463/1012.0462881)

Ignat'ev V.K., Orlov A.A.

Russia, Volgograd State University

[orlwork@inbox.ru](mailto:orlwork@inbox.ru)

[ignatjev@vlpost.ru](mailto:ignatjev@vlpost.ru)

The authors propose a method of calculating a system function of a magnetoactive element in the linear approximation. The authors carried out numerical calculations for the galvanomagnetic element of type PHE602817A and experimental verification of the relations of reciprocity in an inhomogeneous magnetic field. They demonstrate the ratio of reciprocity with an accuracy of 2%.

---

**Publications with keywords:** [system function](#), [magnetic electronics](#), [galvanomagnetic transducer](#), [reciprocity relations](#)

**Publications with words:** [system function](#), [magnetic electronics](#), [galvanomagnetic transducer](#), [reciprocity relations](#)

---

### References

1. Ignat'ev A.A., Liashenko A.V. *Geteromagnitnaia mikroelektronika. Mikrosistemy aktivnogo tipa* [Straight magnetic microelectronics. Microsystems of active type]. Moscow, Nauka, 2006. 877 p.
2. Ognev A.V., Samardak A.S. Spintronika: fizicheskie printsipy, ustroistva i perspektivy [Spintronics: physical principles, devices and prospects]. *Vestnik DVO RAN* [Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences], 2006, no. 4, pp. 70-80.
3. Sobolev B.V., Bochkov B.G., Bondarenko V.S., Zuev V.E. Ustroistva korreliatsionnoi obrabotki signalov na akusticheskikh volnakh [Devices of the correlation signal processing at acoustic wave]. *Zarubezhnaia elektronnaia tekhnika* [Foreign electronic engineering], 1977, no. , pp. 3-54.
4. Khurgin Ia.I., Iakovlev V.P. *Finitnye funktsii v fizike i tekhnike* [Finite functions in physics and technology]. Moscow, Nauka, 1971. 408 p.
5. Ignat'ev V.K., Protopopov A.G. Povyshenie razreshaiushchei sposobnosti magnetometra na osnove efekta Kholla [Increasing of the resolution of magnetometer on the basis of Hall effect]. *Izvestiia VUZov. Priborostroenie* [Bulletin of the Universities. Instrument Engineering], 2003, vol. 46, no. 3, pp. 38-44.

6. Egorov Iu.V., ed. *Funktsional'nye ustroistva obrabotki signalov (osnovy teorii i algoritmy)* [Functional devices signal processing (fundamentals of the theory and algorithms)]. Moscow, Radio i svyaz', 1997. 288 p.
7. Lars Onsager. Reciprocal Relations in Irreversible Process. *Physical Review*, Feb. 15, 1931, vol. 37, pp. 405-426.
8. Sveshnikov A.G., Bogoliubov A.N., Kravtsov V.V. *Leksii po matematicheskoi fizike* [Lectures on mathematical physics]. Moscow, MSU Publ., 1993. 352 p.
9. *COMSOL Multiphysics*. Available at: <http://comsol.com/> , accessed 14.10.2012.
10. *Tekhnicheskie kharakteristiki preobrazovatelei Kholla serii PKhE* [Specifications Hall transducers series PCE]. Available at: <http://www.nvlab.spb.ru/Hall%20sensors.pdf> , accessed 14.10.2012.
11. Golubev A.A., Ignat'ev V.K., Nikitin A.V. Pretsizionnyi magnitometr [Precision magnetometer]. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and techniques of experiment], 2008, vol. 51, no. 5, pp. 753-758.