НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Стабилизация однозвенного манипулятора при неполном измерении состояния: обратная связь по угловой координате звена манипулятора

11, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0500549

Голубев А. Е.

УДК 519.71

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

1. Введение и постановка задачи

Многозвенные манипуляторы представляют собой класс технических систем, активно используемых в промышленности. При решении задач управления такими объектами одной из существенных проблем может являться отсутствие полной информации о состоянии системы. Измеряются, как правило, значения только части переменных, описывающих состояние манипулятора. Причины неполного измерения вектора состояния могут быть различные: высокая стоимость установки датчиков, технологические ограничения и т.п.

При синтезе алгоритмов управления многозвенными манипуляторами важную роль играет решение задач управления для отдельных звеньев.

В настоящей работе рассматривается задача стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора, уравнения движения которого имеют вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3),\\
\dot{x}_3 &= x_4,\\
\dot{x}_4 &= -b_1 x_4 + k_2(x_1 - x_3) + u/J,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где x_1, x_2 — угловая координата и угловая скорость звена манипулятора соответственно; x_3, x_4 — угловая координата и угловая скорость вала двигателя;

u — управляющий момент, создаваемый двигателем; $Mgl \sin x_1$ — момент силы тяжести, действующий на звено манипулятора. Константы M_1, b_1, k_1, k_2, J положительны, притом $M_1 = Mgl/I$, $k_1 = k/I$, $k_2 = k/J$, $b_1 = d/J$, где I, J — моменты инерции звена манипулятора и ротора двигателя соответственно, k — жесткость передаточного механизма, d — коэффициент демпфирования, M — масса звена манипулятора.

В качестве стабилизируемого углового положения манипулятора без ограничения общности рассмотрим положение, в котором $x_1 = 0, x_3 = 0$. Для решения задачи управления требуется построить закон управления в виде обратной связи, использующей значения только измеряемого выхода системы, глобально стабилизирующий положение равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (1). Здесь $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния системы (1), $u \in \mathbb{R}$ — управление.

Одной из идей решения задач управления в условиях неполноты измеряемой информации о векторе состояния является использование динамических обратных связей по измеряемому выходу. Динамические обратные связи по выходу строятся на основе вектора состояния вспомогательной динамической системы. Как правило, в качестве вспомогательной системы рассматривается наблюдатель, представляющий собой специальную динамическую систему, состояние которой с течением времени достаточно быстро, например асимптотически, приближается к состоянию исследуемой системы.

В настоящей работе рассматривается случай, когда измерениям доступна только угловая координата x_1 звена манипулятора, т.е. измеряемый выход системы (1) имеет вид $y = x_1$. Показано, что задача стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора может быть решена с помощью использования нелинейного принципа разделения [1, 2] и метода обхода интегратора в наблюдателе [3, 2].

2. Синтез наблюдателя и обратной связи по состоянию

При построении асимптотического наблюдателя для системы (1) с рассматриваемым выходом $y = x_1$ воспользуемся, например, идеями геометрического метода, изложенного в работах [4, 5].

В переменных $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)^{\mathrm{т}}$, заданных соотношениями

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \chi_1,\\
&x_2 = \chi_2 - b_1\chi_1,\\
&x_3 = \chi_3/k_1 - b_1\chi_2/k_1 + (b_1^2 - k_2)\chi_1/k_1,\\
&x_4 = \chi_4/k_1 - b_1\chi_3/k_1 + (b_1^2 - k_2)\chi_2/k_1 + (2b_1k_2 - b_1^3)\chi_1/k_1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

система (1) с рассматриваемым выходом имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot\chi_1 = \chi_2 - b_1\chi_1,\\
&\dot\chi_2 = \chi_3 + M_1 \sin\chi_1 - \chi_1(k_1 + k_2),\\
&\dot\chi_3 = \chi_4 + b_1M_1 \sin\chi_1 - b_1k_1\chi_1,\\
&\dot\chi_4 = k_2M_1 \sin\chi_1 + k_1u/J,\\
&y = \chi_1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Заметим, что отображение $x = \Phi(\chi)$, $\Phi(0) = 0$, определяемое равенствами (2), линейно и является диффеоморфизмом пространств $\mathbb{R}^4 = \{\chi\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{x\}$.

Асимптотический наблюдатель для системы (3) будем искать в виде

$$
\dot{\hat\chi} = A\hat\chi + LC(\hat\chi - \chi) + \psi(\chi_1) + Bu, \tag{4}
$$

где $\hat\chi = (\hat\chi_1, \hat\chi_2, \hat\chi_3, \hat\chi_4)^{\mathrm{т}}$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, — квадратная матрица порядка 4 с элементами $a_{ij} = 1$, если $j - i = 1$, и $a_{ij} = 0$, если $j - i \neq 1$, $C = (1, 0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 0, 1/J)^{\mathrm{т}}$, вектор $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)^{\mathrm{т}}$ коэффициентов усиления задает динамику ошибки $e = \hat\chi - \chi$ оценки состояния системы (3),

$$
\psi(\chi_1) = \bigl(-b_1\chi_1, M_1 \sin\chi_1 - \chi_1(k_1 + k_2), b_1M_1 \sin\chi_1 - b_1k_1\chi_1, k_2M_1 \sin\chi_1\bigr)^{\mathrm{т}}.
$$

Для дальнейших построений можно использовать линейную технику. Система, описывающая динамику ошибки $e = \hat\chi - \chi$ оценки наблюдателем (4) состояния системы (3) при одинаковом управлении в системах (3) и (4), имеет вид

$$
\dot e = (A + LC)e, \tag{5}
$$

где вектор L коэффициентов усиления наблюдателя выбирается таким образом, что матрица $A + LC$ имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями. Указанный выбор матрицы L возможен, так как пара

(A, C) наблюдаема [6]. Следовательно, положение равновесия $e = 0$ системы (5) экспоненциально устойчиво в целом и ошибка оценки состояния не зависит от управления и экспоненциально стремится к нулю.

Отметим, что функцией Ляпунова для системы (5) является положительно определенная квадратичная форма $W(e) = e^{\mathrm{т}}Pe$, где матрица $P = P^{\mathrm{т}} > 0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(A + LC)^{\mathrm{т}}P + P(A + LC) = -Q,\ Q = Q^{\mathrm{т}} > 0, \tag{6}$$

решение которого существует и единственно в силу указанного выше выбора спектра матрицы $A + LC$. Здесь $Q = Q^{\mathrm{т}} > 0$ — произвольная симметрическая положительно определенная матрица. Для производной по времени функции $W(e)$ в силу системы (5) при всех $e \in \mathbb{R}^n$ справедлива следующая оценка:

$$\dot{W}(e) = -e^{\mathrm{т}}Qe \leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\lambda\|e\|^2,$$

где $\lambda_{\min}(Q)$ — наименьшее собственное значение матрицы Q, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^4$.

Далее найдем закон управления в виде непрерывно дифференцируемой обратной связи по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующий положение равновесия $\chi = 0$, $u = 0$ системы (3).

Положение равновесия $\chi = 0$, $u = 0$ аффинной системы (3) (без выхода) во всем пространстве состояний можно стабилизировать методом нелинейной стабилизации, предложенным в работе [7], поскольку эта система во всем пространстве состояний эквивалентна регулярной системе канонического вида, тоже определенной во всем ее пространстве состояний. Преобразование аффинной системы (3) к каноническому виду определяется функцией $\phi(\chi) = \chi_1$, которую можно найти, следуя работе [8]. Дифференцируя эту функцию в силу аффинной системы (3), находим новые переменные для записи системы канонического вида

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \chi_1,\ \xi_2 = \dot{\xi}_1 = \chi_2 - b_1\chi_1,\\
&\xi_3 = \dot{\xi}_2 = \chi_3 + M_1 \sin\chi_1 - \chi_1(k_1 + k_2) - b_1\chi_2 + b_1^2\chi_1,\\
&\xi_4 = \dot{\xi}_3 = \chi_4 + M_1\chi_2\cos\chi_1 - b_1M_1\chi_1\cos\chi_1 - (k_1 + k_2)\chi_2 +\\
&\qquad\qquad + b_1k_2\chi_1 + b_1(k_1 + k_2)\chi_1 - b_1\chi_3 + b_1^2\chi_2 - b_1^3\chi_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

В переменных ξ система (3) без выхода имеет канонический вид

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3,\\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4,\\
\dot{\xi}_4 &= \tilde{f}(\xi) + k_1 u/J,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^{\text{т}}$ — вектор состояния системы, $\tilde{f}(\xi) = k_2 M_1 \sin\xi_1 + {}$ $+ M_1 \cos\xi_1(\xi_3 + b_1\xi_2) - M_1\xi_2^2 \sin\xi_1 - (k_1 + k_2)\xi_3 - b_1 k_1 \xi_2 - b_1\xi_4$.

Соотношение $\xi = \Psi^{-1}(\chi)$, $\Psi^{-1}(0) = 0$, имеющее вид (7), действительно представляет собой замену переменных, так как оно разрешимо относительно χ, $\chi = \Psi(\xi)$. Отметим, что отображение Ψ является диффеоморфизмом пространств $\mathbb{R}^4 = \{\xi\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{\chi\}$, притом функции $\xi = \Psi^{-1}(\chi)$ и $\chi = \Psi(\xi)$ таковы, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\chi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\|\xi\| = \|\Psi^{-1}(\chi)\| \le \gamma_{\Psi^{-1}}\|\chi\|, \quad \|\chi\| = \|\Psi(\xi)\| \le \gamma_{\Psi}\|\xi\|, \tag{9}$$

где γ_Ψ, $\gamma_{\Psi^{-1}}$ — некоторые положительные константы. Поэтому задача глобальной экспоненциальной стабилизации положения равновесия $\chi = 0$, $u = 0$ системы (3) без выхода эквивалентна аналогичной задаче для положения равновесия $\xi = 0$, $u = 0$ системы (8).

Непрерывно дифференцируемая обратная связь по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия $\xi = 0$, $u = 0$ системы (8), имеет вид

$$u = k(\xi) = \frac{J}{k_1}\left(-\tilde{f}(\xi) - \sum_{i=0}^{3} \kappa_i \xi_{i+1}\right), \quad k(0) = 0. \tag{10}$$

Замкнутая этим управлением система (8) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3,\\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4,\\
\dot{\xi}_4 &= -\kappa_0\xi_1 - \kappa_1\xi_2 - \kappa_2\xi_3 - \kappa_3\xi_4.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь постоянные $\kappa_i > 0$, $i = \overline{0,3}$, выбираются таким образом, что матрица $A_4 = (a_{ij}^4)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, с элементами $a_{ij}^4 = 1$, если $j - i = 1$, $a_{ij}^4 = -\kappa_{j-1}$, если $i = 4$, и $a_{ij}^4 = 0$, если $j - i \ne 1$ и $i \ne 4$, имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями. Тогда из экспоненциальной устойчивости в целом положения равновесия $\xi = 0$ системы (8), замкнутой управлением $u = k(\xi)$, имеющим вид (10), в силу неравенств (9) следует экспоненциальная устойчивость в целом положения равновесия $\chi = 0$ системы (3), замкнутой управлением $u = k(\Psi^{-1}(\chi))$.

3. Применение нелинейного принципа разделения

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \tilde{A}\chi + \tilde{\psi}(\chi_1) + \tilde{B}u, \\ y &= \tilde{C}\chi_1, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$; $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ — постоянные матрицы, пара $(\tilde{A}, \tilde{C})$ наблюдаема; отображение $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывно-дифференцируемо, $\tilde{\psi}(0) = 0$.

Асимптотическим наблюдателем для системы (12) является система

$$\dot{\hat{\chi}} = \tilde{A}\hat{\chi} + \tilde{L}\tilde{C}(\hat{\chi} - \chi) + \tilde{\psi}(\chi_1) + \tilde{B}u, \tag{13}$$

где вектор $\tilde{L} = (\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$ коэффицентов усиления выбран таким образом, что матрица $\tilde{A} + \tilde{L}\tilde{C}$ гурвицева.

Теорема 1 ([1]). Пусть: 1) вектор-функция $\tilde{\psi}(\chi_1)$ глобально липшицева; 2) существует непрерывно дифференцируемая обратная связь $u = k_1(\chi)$, $k_1(0) = 0$, по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия $\chi = 0$, $u = 0$ системы (12). Тогда при управлении $u = k_1(\hat{\chi})$ система

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \tilde{A}\chi + \tilde{\psi}(\chi_1) + \tilde{B}u, \\ \dot{\hat{\chi}} &= \tilde{A}\hat{\chi} + \tilde{L}\tilde{C}(\hat{\chi} - \chi) + \tilde{\psi}(\chi_1) + \tilde{B}u, \end{aligned} \tag{14}$$

составленная из уравнений системы (12) и уравнений наблюдателя (13), экспоненциально устойчива в целом в точке $\chi = 0$, $\hat{\chi} = 0$.

Заметим, что для системы (3) выполнены условия теоремы 1. Следовательно, благодаря линейности замены переменных $x = \Phi(\chi)$, заданной соотношениями (2), система, составленная из уравнений исходной системы (1) и уравнений наблюдателя (4), записанного в переменных $\hat{x} = \Phi(\hat{\chi})$, при управлении $u = k(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\hat{x}))$ экспоненциально устойчива в целом в точке $x = 0$, $\hat{x} = 0$.

Результаты численного моделирования системы (1) и наблюдателя (4), записанного в переменных $\hat{x} = \Phi(\hat{\chi})$, при управлении $u = k(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\hat{x}))$ пред-
рис.1 ставлены на рис. 1 при следующих значениях параметров и начальных данных рассматриваемой системы и наблюдателя: $M = 0{,}21$ кг, $I = 0{,}0093$ кг $\cdot$ м^2, $J = 0{,}0037$ кг $\cdot$ м^2, $k = 0{,}18\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$, $d = 0{,}046\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$, $l = 0{,}15$ м, $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\kappa_0 = 561{,}1$, $\kappa_1 = 461{,}9$, $\kappa_2 = 142{,}4$, $\kappa_3 = 19{,}5$, $l_1 = -17{,}5$, $l_2 = -114{,}7$, $l_3 = -333{,}6$, $l_4 = -363{,}4$, $(x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0),\ x_4(0)) = (3{,}14,\ 0,\ 3{,}14,\ 0)$, $(\hat{x}_1(0),\ \hat{x}_2(0),\ \hat{x}_3(0),\ \hat{x}_4(0)) = (2,\ 1{,}2,\ 3,\ 1{,}4)$.

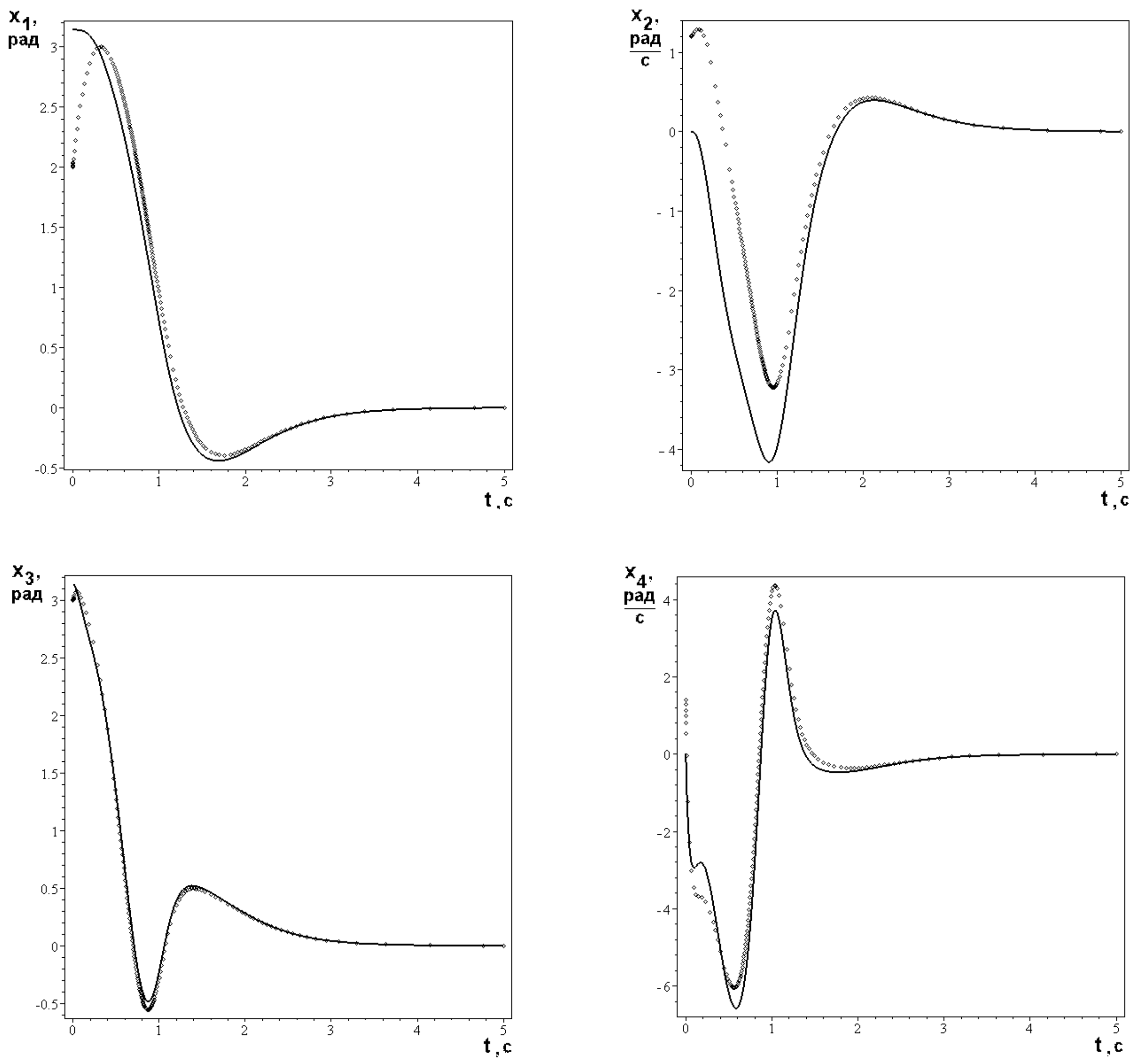

Рис. 1. Переходные процессы системы (сплошная линия) и наблюдателя (пунктир) при управлении $u = k(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\hat{x}))$

4. Метод обхода интегратора в наблюдателе

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{\chi}_1 = \hat{\chi}_2 - e_2 + \psi_1(\chi_1),\\
&\dot{\hat{\chi}}_2 = \hat{\chi}_3 + l_2 e_1 + \psi_2(\chi_1),\\
&\dot{\hat{\chi}}_3 = \hat{\chi}_4 + l_3 e_1 + \psi_3(\chi_1),\\
&\dot{\hat{\chi}}_4 = l_4 e_1 + \psi_4(\chi_1) + \frac{k_1}{J}u,\\
&\dot{e} = (A + LC)e,\\
&y = \chi_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\hat{\chi} = (\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \hat{\chi}_3, \hat{\chi}_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния наблюдателя (4); $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния системы (3); $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^{\mathrm{T}} = (\hat{\chi}_1 - \chi_1, \hat{\chi}_2 - \chi_2, \hat{\chi}_3 - \chi_3, \hat{\chi}_4 - \chi_4)^{\mathrm{T}}$;

$$\psi(\chi_1) = \begin{pmatrix} -b_1\chi_1 \\ M_1 \sin\chi_1 - \chi_1(k_1 + k_2) \\ b_1 M_1 \sin\chi_1 - b_1 k_1 \chi_1 \\ k_2 M_1 \sin\chi_1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что динамическая система (15) в силу линейного соотношения $e = \hat{\chi} - \chi$ эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\dot{\chi} = A\chi + \psi(\chi_1) + Bu,\\
&\dot{\hat{\chi}} = A\hat{\chi} + LC(\hat{\chi} - \chi) + \psi(\chi_1) + Bu,
\end{aligned} \tag{16}$$

состоящей из уравнений системы (3) и наблюдателя (4).

На основе метода обхода интегратора в наблюдателе [2, 3] можно предложить следующий алгоритм построения управления в виде динамической обратной связи $u = \tilde{k}(\hat{\chi}, y)$ по выходу, глобально асимптотически стабилизируещего положение равновесия $\hat{\chi} = 0$, $e = 0$, $u = 0$ системы (15). Отметим, что в силу соотношения $\chi = \hat{\chi} - e$ найденная обратная связь будет также и решением задачи стабилизации положения равновесия $\chi = 0$, $\hat{\chi} = 0$, $u = 0$ системы (16).

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$V_1(z_1, e) = \frac{1}{2}z_1^2 + W(e),$$

где $z_1 = \chi_1$, $W(e)$ — функция Ляпунова для системы (5). Для удобства используем далее также обозначение $z_2 = \hat{\chi}_2 - \alpha_1(\chi_1)$, где $\alpha_1(\cdot)$ — некоторая гладкая функция. Для производной по времени функции V_1 в силу системы (15) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_1 = z_1\dot{z}_1 + \dot{W}(e) \leq z_1(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1) - e_2) - \lambda\|e\|^2 \leq$$
$$\leq z_1(z_2 + \alpha_1(\chi_1) + \psi_1(\chi_1) - e_2) - \lambda e_2^2.$$

Выбрав функцию

$$\alpha_1(\chi_1) = -(c_1 + d_1)z_1 - \psi_1(\chi_1) = -c_1 z_1 - d_1 z_1 + b_1\chi_1,$$

где $c_1 > 0$, $d_1 > 0$ — произвольные положительные константы, получим

$$\dot{V}_1 \leq z_1(-c_1 z_1 + z_2 - d_1 z_1 - e_2) - \lambda e_2^2 =$$
$$= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - (d_1 z_1^2 + z_1 e_2 + \lambda e_2^2) = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - S_1,$$

где

$$S_1 = \Big(\sqrt{d_1}z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d_1}}e_2\Big)^2 + \Big(\lambda - \frac{1}{4d_1}\Big)e_2^2 \geq 0 \quad \text{при} \quad \lambda > \frac{1}{4d_1}.$$

Шаг 2. Рассмотрим функцию

$$V_2(z_1, z_2, e) = V_1(z_1, e) + \frac{1}{2}{z_2}^2 + W(e) > 0.$$

Для удобства используем далее обозначение $z_3 = \hat{\chi}_3 - \alpha_2(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \chi_1)$, где $\alpha_2(\cdot)$ — некоторая гладкая функция своих аргументов. Для производной по времени функции V_2 в силу системы (15) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2\dot{z}_2 + \dot{W} \leq$$
$$\leq -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - S_1 + z_2\dot{z}_2 + \dot{W} \leq -c_1 z_1^2 - S_1 +$$
$$+ z_2\Big(z_1 + \hat{\chi}_3 + l_2(\hat{\chi}_1 - \chi_1) + \psi_2(\chi_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1) - e_2)\Big) - \lambda e_2^2 =$$
$$= -c_1 z_1^2 - S_1 + z_2\Big(z_1 + z_3 + \alpha_2(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \chi_1) + l_2(\hat{\chi}_1 - \chi_1) + \psi_2(\chi_1) -$$
$$- \frac{\partial\alpha_1}{\partial\chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1) - e_2)\Big) - \lambda e_2^2.$$

Выбрав

$$\alpha_2(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \chi_1) = -c_2 z_2 - z_1 - l_2(\hat{\chi}_1 - \chi_1) - \psi_2(\chi_1) + \\ + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1)) - d_2\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1}\Big)^2 z_2 = \\ = -c_2 z_2 - z_1 - l_2(\hat{\chi}_1 - \chi_1) - M_1 \sin\chi_1 + \chi_1(k_1 + k_2) + \\ + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 - b_1\chi_1) - d_2\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1}\Big)^2 z_2,$$

где $c_2 > 0$, $d_2 > 0$ — произвольные положительные константы, получим

$$\dot{V}_2 \le -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - \Big(d_2\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1}\Big)^2 z_2^2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1} z_2 e_2 + \lambda e_2^2\Big) - S_1 = \\ = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - S_1 - S_2,$$

где

$$S_2 = \Big(\sqrt{d_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi_1} z_2 - \frac{1}{2\sqrt{d_2}} e_2\Big)^2 + \Big(\lambda - \frac{1}{4d_2}\Big) e_2^2 \ge 0 \quad \text{при} \quad \lambda > \frac{1}{4d_2}.$$

Шаг 3. Рассмотрим функцию

$$V_3(z_1, z_2, z_3, e) = V_2(z_1, z_2, e) + \frac{1}{2}{z_3}^2 + W(e).$$

Для удобства используем далее обозначение $z_4 = \hat{\chi}_4 - \alpha_3(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \hat{\chi}_3, \chi_1)$, где $\alpha_3(\cdot)$ — некоторая гладкая функция своих аргументов. Для производной по времени функции V_3 в силу системы (15) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + z_3\dot{z}_3 + \dot{W} \le \\ \le -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - S_1 - S_2 + z_3\dot{z}_3 + \dot{W} \le \\ \le -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - S_1 - S_2 + z_3\Big(z_2 + \hat{\chi}_4 + l_3(\hat{\chi}_1 - \chi_1) + \psi_3(\chi_1) - \\ - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1) - e_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\chi}_1}\dot{\hat{\chi}}_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\chi}_2}\dot{\hat{\chi}}_2\Big) - \lambda e_2^2 = \\ = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - S_1 - S_2 + z_3\Big(z_2 + z_4 + \alpha_3(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \hat{\chi}_3, \chi_1) + l_3(\hat{\chi}_1 - \chi_1) + \\ + \psi_3(\chi_1) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1) - e_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\chi}_1}\dot{\hat{\chi}}_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\chi}_2}\dot{\hat{\chi}}_2\Big) - \lambda e_2^2.$$

Выбрав

$$\alpha_3(\hat\chi_1,\hat\chi_2,\hat\chi_3,\chi_1) = -c_3z_3 - z_2 - l_3(\hat\chi_1-\chi_1) - \psi_3(\chi_1) + \\ + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}(\hat\chi_2+\psi_1(\chi_1)) + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat\chi_1}\dot{\hat\chi}_1 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat\chi_2}\dot{\hat\chi}_2 - d_3\Big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_3 = \\ = -c_3z_3 - z_2 - l_3(\hat\chi_1-\chi_1) - b_1M_1\sin\chi_1 + b_1k_1\chi_1 + \\ + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}(\hat\chi_2-b_1\chi_1) + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat\chi_1}\dot{\hat\chi}_1 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat\chi_2}\dot{\hat\chi}_2 - d_3\Big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_3,$$

где $c_3 > 0$, $d_3 > 0$ — произвольные положительные константы, получим

$$\dot V_3 \le -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - c_3z_3^2 + z_3z_4 - \left(d_3\Big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_3^2 - \frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}z_3e_2 + \lambda e_2^2\right) - \\ - S_1 - S_2 = -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - c_3z_3^2 + z_3z_4 - S_1 - S_2 - S_3,$$

где

$$S_3 = \left(\sqrt{d_3}\,\frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}z_3 - \frac{1}{2\sqrt{d_3}}\,e_2\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{4d_3}\right)e_2^2 \ge 0 \quad \text{при} \quad \lambda > \frac{1}{4d_3}.$$

Шаг 4. Рассмотрим функцию

$$V_4(z_1,z_2,z_3,z_4,e) = V_3(z_1,z_2,z_3,e) + \frac{1}{2}{z_4}^2 + W(e) > 0.$$

Для производной по времени функции V_4 в силу системы (15) справедлива оценка

$$\dot V_4 = \dot V_3 + z_4\dot z_4 + \dot W \le -\sum_{i=1}^{3}c_iz_i^2 - \sum_{i=1}^{3}S_i + z_4z_3 + z_4\dot z_4 + \dot W \le \\ \le -\sum_{i=1}^{3}c_iz_i^2 - \sum_{i=1}^{3}S_i + z_4\bigg(z_3 + l_4(\hat\chi_1-\chi_1) + \psi_4(\chi_1) + \frac{k_1}{J}u - \\ - \frac{\partial\alpha_3}{\partial\chi_1}(\hat\chi_2+\psi_1(\chi_1)-e_2) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial\hat\chi_i}\dot{\hat\chi}_i\bigg) - \lambda\sum_{i=1}^{4}e_i^2.$$

Тогда при выборе закона управления

$$u = \alpha_4(\hat{\chi}, \chi_1) = \frac{J}{k_1}\Bigg(-c_4 z_4 - z_3 - l_4(\hat{\chi}_1 - \chi_1) - \psi_4(\chi_1) + $$

$$+ \frac{\partial \alpha_3}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 + \psi_1(\chi_1)) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{\chi}_i}\dot{\hat{\chi}}_i - d_4\Big(\frac{\partial \alpha_3}{\partial \chi_1}\Big)^2 z_4\Bigg) =$$

$$= \frac{J}{k_1}\Bigg(-c_4 z_4 - z_3 - l_4(\hat{\chi}_1 - \chi_1) - k_2 M_1 \sin\chi_1 +$$

$$+ \frac{\partial \alpha_3}{\partial \chi_1}(\hat{\chi}_2 - b_1\chi_1) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{\chi}_1}\dot{\hat{\chi}}_1 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{\chi}_2}\dot{\hat{\chi}}_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{\chi}_3}\dot{\hat{\chi}}_3 - d_4\Big(\frac{\partial \alpha_3}{\partial \chi_1}\Big)^2 z_4\Bigg), \quad (17)$$

где $c_4 > 0$, $d_4 > 0$ — произвольные положительные константы, для производной по времени функции V_4 в силу замкнутой системы (15) справедлива оценка

$$\dot{V}_4 \le -\sum_{i=1}^{4} c_i z_i^2 - \sum_{i=1}^{4} S_i - \lambda e_1^2 - \lambda e_3^2 - \lambda e_4^2 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{4} c_i z_i^2 - \Big(\sqrt{d_1} z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d_1}} e_2\Big)^2 - \sum_{i=2}^{4}\Big(\sqrt{d_i}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \chi_1} z_i - \frac{1}{2\sqrt{d_i}} e_2\Big)^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{4}\Big(\lambda - \frac{1}{4d_i}\Big) e_2^2 - \lambda e_1^2 - \lambda e_3^2 - \lambda e_4^2. \quad (18)$$

При

$$\lambda > \max\Big\{\frac{1}{4d_1}, \frac{1}{4d_2}, \frac{1}{4d_3}, \frac{1}{4d_4}\Big\} \quad (19)$$

справедливо неравенство

$$\dot{V}_4 \le -\sum_{i=1}^{4} c_i z_i^2 - \tilde{\lambda}\sum_{i=1}^{4} e_i^2, \quad (20)$$

где $\tilde{\lambda} = \min\Big\{\lambda, \sum_{i=1}^{4}\Big(\lambda - \frac{1}{4d_i}\Big)\Big\} > 0$.

Отметим, что выполнения условия (19) можно добиться, например, зафиксировав коэффициенты $d_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, и подобрав матрицу $Q = Q^{\text{т}} > 0$ в уравнении Ляпунова (6), удовлетворяющую данному условию.

Соотношения

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \chi_1,\\
z_2 &= \hat\chi_2 - \alpha_1(\chi_1),\\
z_3 &= \hat\chi_3 - \alpha_2(\hat\chi_1, \hat\chi_2, \chi_1),\\
z_4 &= \hat\chi_4 - \alpha_3(\hat\chi_1, \hat\chi_2, \hat\chi_3)
\end{aligned}
$$

представляют собой гладкую замену переменных, определенную глобально. В переменных z_i, $i = \overline{1,4}$ и e система (15) без выхода, замкнутая управлением (17), примет вид

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= -c_1 z_1 + z_2 - d_1 z_1 - e_2,\\
\dot z_2 &= -c_2 z_2 - z_1 + z_3 - d_2\Big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_2 + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\chi_1} e_2,\\
\dot z_3 &= -c_3 z_3 - z_2 + z_4 - d_3\Big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_3 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\chi_1} e_2,\\
\dot z_4 &= -c_4 z_4 - z_3 - d_4\Big(\frac{\partial\alpha_3}{\partial\chi_1}\Big)^2 z_4 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial\chi_1} e_2,\\
\dot e &= (A + LC)e,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $z = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^4$.

Положение равновесия $z = 0$, $e = 0$ системы (21) экспоненциально устойчиво в целом. Тогда, так как $\alpha_i(0) = 0$, $i = \overline{1,3}$, положение равновесия $\hat\chi = 0$, $e = 0$ системы (15), замкнутой управлением (17) асимптотически устойчиво в целом. В силу соотношения $\chi = \hat\chi - e$ положение равновесия $\chi = 0$, $\hat\chi = 0$ системы (16) при управлении (17) также асимптотически устойчиво в целом.

Далее, так как отображение Φ, заданное соотношениями (2), является диффеоморфизмом пространств $\mathbb{R}^4 = \{\chi\}$ и $\mathbb{R}^4 = \{\chi\}$, из асимптотической устойчивости в целом положения равновесия $\chi = 0$, $\hat\chi = 0$ системы (16), составленной из уравнений системы (3) и уравнений наблюдателя (4) при управлении $u = \alpha_4(\hat\chi, \chi_1)$, следует асимптотическая устойчивость в целом в точке $x = 0$, $\hat x = 0$ системы, состоящей из уравнений исходной системы (1) с рассматриваемым выходом и уравнений наблюдателя (4), записанного в переменных $\hat x = \Phi(\hat\chi)$, при управлении $u = \alpha_4(\Phi^{-1}(\hat x), x_1)$.

рис.2

Результаты численного моделирования системы (1) и наблюдателя (4), записанного в переменных $\hat{x} = \Phi(\hat{\chi})$, при управлении $u = \alpha_4(\Phi^{-1}(\hat{x}), x_1)$ представлены на рис. 2 при следующих значениях параметров и начальных данных рассматриваемой системы и наблюдателя: $M = 0{,}21$ кг, $I = 0{,}0093$ кг $\cdot$ м^2, $J = 0{,}0037$ кг $\cdot$ м^2, $k = 0{,}18\,\frac{H \cdot \text{м}}{\text{рад}}$, $d = 0{,}046\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$, $l = 0{,}15$ м, $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $c_1 = 2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 2$, $d_1 = 0{,}1$, $d_2 = 0{,}1$, $d_3 = 10^{-3}$, $d_4 = 10^{-3}$, $l_1 = -17{,}5$, $l_2 = -114{,}7$, $l_3 = -333{,}6$, $l_4 = -363{,}4$, $(\chi_1(0),\ \chi_2(0),\ \chi_3(0),\ \chi_4(0)) = (3{,}14,\ 0,\ 3{,}14,\ 0)$, $(\hat{\chi}_1(0),\ \hat{\chi}_2(0),\ \hat{\chi}_3(0),\ \hat{\chi}_4(0)) = (2,\ 1{,}2,\ 3,\ 1{,}4)$.

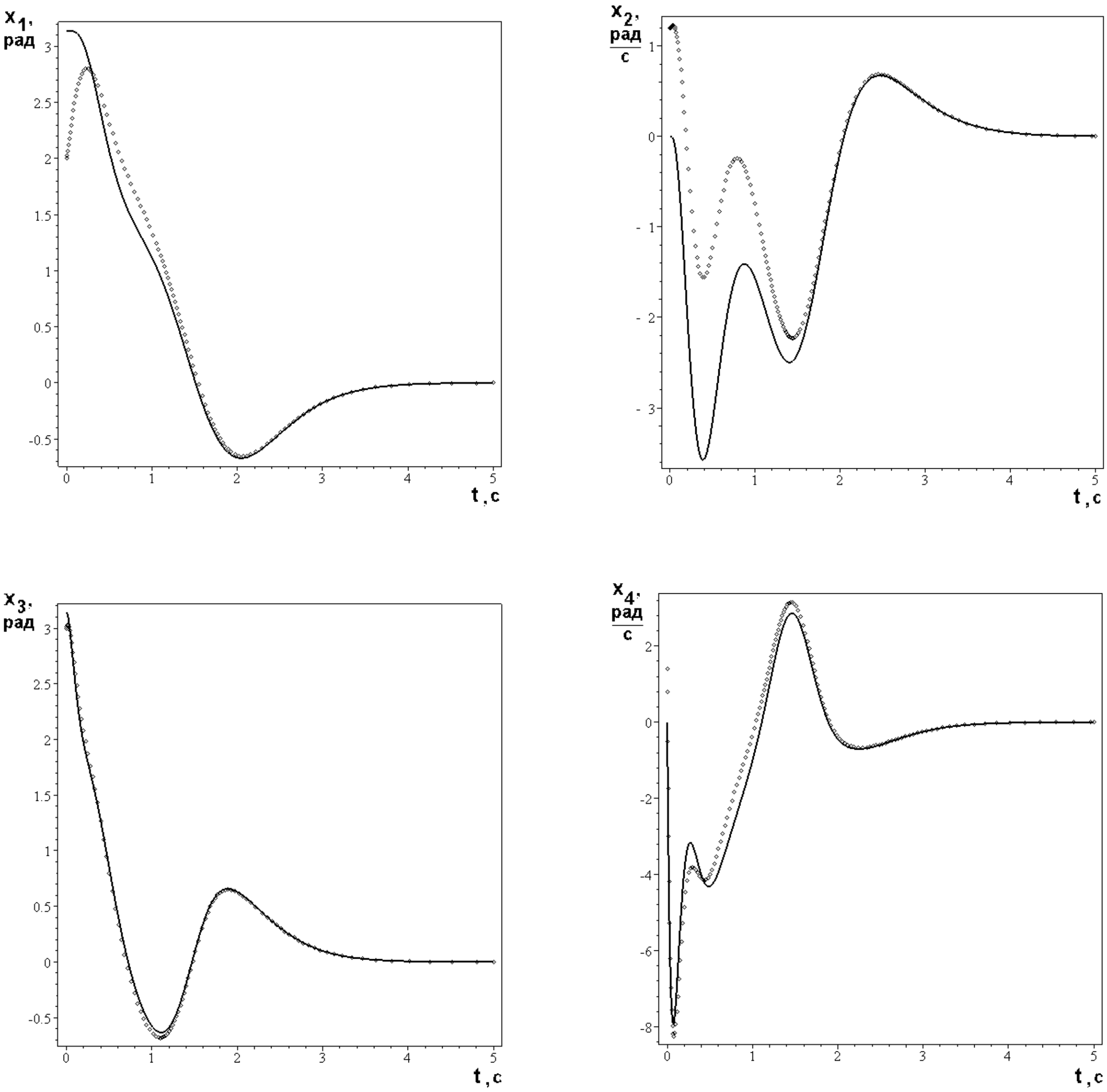

Рис. 2. Переходные процессы системы (сплошная линия) и наблюдателя (пунктир) при управлении $u = \alpha_4(\Phi^{-1}(\hat{x}), x_1)$

5. Заключение

В настоящей работе представлено решение задачи стабилизации заданного углового положения однозвенного манипулятора при неполном измерении вектора состояния. Рассматривался случай, когда измерениям доступна только угловая координата звена манипулятора. Синтез управления осуществлен при помощи раздельного построения стабилизирующей обратной связи по состоянию и наблюдателя с последующей подстановкой оценки состояния системы наблюдателем в обратную связь, а также с использованием метода обхода интегратора в наблюдателе.

По результатам численного моделирования можно сделать вывод о приблизительно одинаковом при рассмотренных начальных данных и использовании одного и того же наблюдателя качестве переходных процессов системы с управлением, найденным при помощи метода обхода интегратора в наблюдателе, и управлением, основанном на принципе разделения и методе линеаризации обратной связью по состоянию.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00733, №12-07-329 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант №НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Принцип разделения для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1468–1475.
2. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С.3–42.
3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
4. Krener A.J., Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control and Optimization. 1985. V. 23, no 2. P. 197–216.

5. Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Нелинейные $k(x)$-двойственные системы и синтез наблюдателей // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 5. С. 648–663.

6. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.

7. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 103–112.

8. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Single-Link Manipulator Output Feedback Control: Manipulator Link Angular Coordinate Feedback

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0500549

Golubev A. E.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

In this paper the author considers solving the problem of stabilization of a set angular position of a single-link manipulator when the measurement can only be done by the angular coordinate of the motor shaft. It was sown that synthesis of stabilizing control laws, as well as in the case when measurements can only be done by the angular coordinate of the link manipulator, can be carried out by the principle of separation and bypass integrator in the observer. According to the results of numerical simulation one can draw a conclusion about approximately the same (with the considered initial data and use of the same observer) quality of transient processes of the system with the control found by the bypass integrator in the observer and the control based on the principle of separation and linearization technique using feedback according to the state. The possibility of applying the bypass method to the problem of stabilization can solve this problem also in the case of system disturbances and uncertainties. Possible range of application of the results obtained in the work is solving solve problems of control of technical systems with incomplete information about the state of the measured system.

References

1. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Printsip razdeleniia dlia affinnykh sistem [Principle of distribution for affine systems]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1468–1475.

2. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Stabilizatsiia nelineinykh dinamicheskikh sistem s ispol’zovaniem otsenki sostoianiia sistemy asimptoticheskim nabliudatelem (obzor) [Stabilization of nonlinear dynamic systems with the use of the assessment of the status of the system asymptotic observer (review)]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, no. 7, pp. 3–42.

3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. *Nonlinear and adaptive control design*. New York, John Wiley and Sons, 1995. 563 p.

4. Krener A.J., Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control and Optimization*, 1985, vol. 23, no 2, pp. 197–216.

5. Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Nelineinye $k(x)$-dvoistvennye sistemy i sintez nabliudatelei [Nonlinear $k(x)$ dual systems and synthesis of observers]. *Differentsial’nye uravneniia*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 648–663.

6. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. New York, Springer, 1979. (Russ. ed.: Uonem U.M. *Lineinye mnogomernye sistemy upravleniia: Geometricheskii podkhod*. Moscow, Nauka, 1980. 376 p.).

7. Krishchenko A.P. Stabilizatsiia programmnykh dvizhenii nelineinykh sistem [Stabilization of programmed motions of non-linear systems]. *Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika* [Proceedings of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1985, no. 6, pp. 103–112.

8. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravliaemost’ nelineinykh sistem i sintez algoritmov upravleniia [Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of the USSR], 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809.