НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

О кусочно-линейных решениях дифференциального включения

10, октябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0489571

Горбунов А. В.

УДК 517.911.5

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

1. Введение

В настоящее время дифференциальные включения (или дифференциальные уравнения с многозначной правой частью) практически незаменимы при математическом моделировании систем с неполным описанием [1] и анализе поведения разрывных систем [2]. Известны применения дифференциальных включений в задачах построения функций Ляпунова и оптимизации [3, 4].

Для приложений важна задача поиска решений дифференциального включения. Как правило, получить аналитическое решение дифференциального включения удается лишь в специальных случаях, а в остальных случаях для этой цели приходится использовать численные методы, наиболее простым из которых представляется метод Эйлера. Напомним, что метод Эйлера заключается в замене дифференциального соотношения разностным и последующем решении полученного разностного соотношения. Естественно ожидать, что решения, полученные методом Эйлера, вообще говоря, не будут точными. Однако, как показано в настоящей работе, существует весьма широкий класс дифференциальных включений, для которых метод Эйлера дает точное решение, имеющее вид кусочно-линейной функции.

Предлагаемое в настоящей работе достаточное условие наличия у диффе껏реренциального включения кусочно-линейных решений содержит требования полунепрерывности снизу, телесности и выпуклости значений многозначного отображения, определяющего правую часть диффереренциального включения. Отметим, что известные условия существования решения [1], как правило, содержат либо требование непрерывности, либо одновременно два требования: одной из полунепрерывностей и выпуклости значений соответствующего многозначного отображения. Таким образом, предлагаемое достаточное условие наличия решений специального вида отличается от условий существования решения лишь дополнительным требованием телесности значений многозначного отображения.

2. Основные определения и обозначения

Приведем определения [1, 5] и обозначения, используемые в дальнейшем.

Определение 1. Дифференциальным включением называется соотношение вида

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ является отображением, имеющим в качестве своих значений подмножества $\mathbb{R}^n$ (символ 2^M здесь и далее обозначает множество всех подмножеств M).

Определение 2. Функция $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется решением диффереренциального включения (1) на промежутке I ($I \subset \mathbb{R}$), если она абсолютно непрерывна на I, почти всюду на I удовлетворяет соотношению (1). Если при этом производная x имеет разрывы только первого рода, то такое решение называется правильным.

Определение 3. Множество M называется телесным, если его внутренность непуста.

Для краткости далее внутренность множества M будем обозначать $\operatorname{int} M$.

Определение 4. Многозначное отображение $F\colon X \to 2^Y$ называется полунепрерывным снизу в x_0, если для любого $y_0 \in F(x_0)$ и любой окрестности $U(y_0)$ точки y_0 существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $F(x) \cap U(y_0) \neq \varnothing$ для любого $x \in U(x_0)$.

3. Условие существования линейного решения

Достаточное условие, при котором дифференциальное включение (1) обладает линейным в окрестности начального условия решением, установлено в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $t_* \in \mathbb{R}$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, а $U_t = U(t_*)$ и $U_x = U(x_*)$ — окрестности точек t_* и x_*; многозначное отображение $F(t, x)\colon U_t \times U_x \to 2^{\mathbb{R}^n}$ полунепрерывно снизу в точке (t_*, x_*); для любых $t \in U_t$ и $x \in U_x$ множество $\operatorname{int} F(t, x)$ выпукло и не пусто. Тогда для любого $\hat{x}_* \in \operatorname{int} F(t_*, x_*)$ существует $\delta > 0$, такое, что при $t \in [t_*, t_* + \delta)$ функция $x(t) = x_* + (t - t_*)\hat{x}_*$ является решением дифференциального включения (1).

◄ Выполнив в дифференциальном включении (1) замену переменной

$$y(t) = x(t) - x_* - (t - t_*)\hat{x}_*,$$

получим

$$\dot{y}(t) \in G(t, y(t)), \tag{2}$$

где $G(t, y) = F(y + x_* + (t - t_*)\hat{x}_*) - \hat{x}_*$ — полунепрерывное снизу по совокупности аргументов многозначное отображение. Теперь достаточно показать существование $\delta > 0$, такого, что $y(t) \equiv 0$ является решением (2) при $t \in [t_*, t_* + \delta)$, т.е. что $0 \in G(t, 0)$ для всех $t \in [t_*, t_* + \delta)$.

Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $x_* + (t - t_*)\hat{x}_* \in U_x$ и $t \in U_t$ при $t \in [t_*, t_* + \delta_0)$. Тогда для любого $t \in [t_*, t_* + \delta_0)$ множество $G(t, 0)$ выпукло и $\operatorname{int} G(t, 0) \neq \varnothing$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы для куба $U_\varepsilon^\infty(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_\infty < \varepsilon\}$ было выполнено вложение $U_\varepsilon^\infty(0) \subseteq G(t_*, 0)$. Здесь символом $\|\cdot\|_\infty$ обозначена кубическая норма ($\|y\|_\infty =$

$= \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$). Такое ε существует вследствие того, что $0 \in \operatorname{int} G(t_*, 0)$. Рассмотрим 2^n открытых кубов

$$K^{(j)} = U_\eta^\infty(\xi^{(j)}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \left\| y - \xi^{(j)} \right\|_\infty < \eta \right\}, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \ldots, 2^n,$$

содержащихся в $U_\varepsilon^\infty(0)$ и отличающихся друг от друга лишь центрами $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)})$, где $\xi_i^{(j)} \in \{-\eta, \eta\}$, $i = 1, \ldots, n$ (точки $\xi^{(j)}$, в свою очередь, являются вершинами куба со стороной ε и центром в точке 0).

Используя полунепрерывность снизу по t при $t = t_*$ многозначного отображения $G(t, 0)$, для каждого $j = 1, \ldots, 2^n$ выберем $\delta_j > 0$ так, чтобы для всех $t \in [t_*, t_* + \delta_j)$ выполнялось неравенство $G(t, 0) \cap K^{(j)} \neq \varnothing$, т.е. чтобы для любых $j = 1, \ldots, 2^n$ и $t \in [t_*, t_* + \delta_j)$ существовала точка $y^{(j)}(t) \in G(t, 0) \cap K^{(j)}$.

Положим $\delta = \min\limits_{j=0,\ldots,2^n} \delta_j$ и покажем, что для всех $t \in [t_*, t_* + \delta)$ будет выполнено включение $0 \in G(t, 0)$. Допустим, что это не так, т.е. $0 \notin G(\tilde{t}, 0)$ для некоторого $\tilde{t} \in [t_*, t_* + \delta)$. Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств [6] существует линейный функционал $L(y) = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$ ($a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$), такой, что неравенство $L(y) \leqslant L(0) = 0$ выполнено для любого $y \in G(\tilde{t}, 0)$. Среди точек $\xi^{(j)}$ выберем любую точку $\xi^{(k)}$ так, чтобы $\operatorname{sgn}(\xi_i^{(k)}) = \operatorname{sgn}(a_i)$ при всех $i = 1, \ldots, n$, для которых $\operatorname{sgn}(a_i) \neq 0$. Положим $y = y^{(k)}(\tilde{t}) \in G(\tilde{t}, 0) \cap K^{(k)}$. Тогда для всех $i = 1, \ldots, n$ таких, что $\operatorname{sgn}(a_i) \neq 0$, имеем $\operatorname{sgn}(y_i) = \operatorname{sgn}(\xi_i^{(k)}) = \operatorname{sgn}(a_i)$, и, следовательно, $L(y) > 0$. Полученное противоречие с неравенством $L(y) \leqslant 0$ завершает доказательство теоремы. ►

4. Процедура поиска кусочно-линейного решения

Кусочно-линейное решение дифференциального включения (1) будем искать в следующей форме

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} (x_k + (t - t_k)\hat{x}_k)\,(\eta(t - t_k) - \eta(t - t_{k+1}))\,, \tag{3}$$

где m — число отрезков линейности, η — функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Для определения значений t_0 и x_0 в (3) используется начальное условие $x(t_0) = x_0$. Значения t_{k+1} и x_{k+1} при $k \geqslant 0$ могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t_k, \tag{4}$$

$$x_{k+1} = x_k + \hat{x}_k \Delta t_k, \tag{5}$$

где $\hat{x}_k \in \operatorname{int} F(t_k, x_k)$, а $\Delta t_k > 0$ таково, что для всех $t \in [t_k, t_k + \Delta t_k]$ выполняется включение

$$\hat{x}_k \in F(t_k, x_k + (t - t_k)\hat{x}_k). \tag{6}$$

Рекуррентные формулы (4) и (5) составляют вычислительную схему метода Эйлера для решения дифференциального включения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Существование $\Delta t_k > 0$, при котором для всех $t \in [t_k, t_k + \Delta t_k]$ имеет место включение (6), обеспечивается при выполнении для точек (t_k, x_k) условий теоремы 1. Соотношения (4) и (5) обеспечивают непрерывность кусочно-линейной функции $x(t)$, определенной выражением (3). При этом производная $x(t)$ может иметь разрывы только первого рода, т. е. найденное $x(t)$ является правильным решением дифференциального включения (1).

5. Пример

Проиллюстрируем предложенный метод при решении следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in [ax(t), bx(t)], \quad 0 < a < b, \\ &x(t_0) = x_0 > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что многозначное отображение в данном дифференциальном включении удовлетворяет условиям теоремы 1 во всех точках (t_*, x_*) при $x_* > 0$.

Выберем

$$\hat{x}_k = (\vartheta a + (1-\vartheta)b)x_k,$$

где параметр $\vartheta \in [0,1]$ будет определен так, чтобы величины Δt_k из (4) и (5) были наибольшими при каждом фиксированном k.

Включение (6) перепишется в виде двойного неравенства

$$a(x_k + (t-t_k)\hat{x}_k) \leqslant \hat{x}_k \leqslant b(x_k + (t-t_k)\hat{x}_k).$$

Вычитая $\hat{x}_k$ из всех частей двойного неравенства, имеем

$$a(x_k + (t-t_k-a^{-1})\hat{x}_k) \leqslant 0 \leqslant b(x_k + (t-t_k-b^{-1})\hat{x}_k),$$

следовательно,

$$t - t_k \leqslant \frac{1}{a} - \frac{x_k}{\hat{x}_k} = \frac{(1-\vartheta)(b-a)}{a(\vartheta a + (1-\vartheta)b)}, \tag{8}$$

$$t - t_k \geqslant \frac{1}{b} - \frac{x_k}{\hat{x}_k} = -\frac{\vartheta(b-a)}{b(\vartheta a + (1-\vartheta)b)}. \tag{9}$$

Заметим, что значение в правой части неравенства (9) не является положительным, и, следовательно, неравенство выполнено при любых $t \geqslant t_k$. Из неравенства (8) находим следующее выражение для наибольшего шага

$$t - t_k \leqslant \Delta t_k = \frac{(1-\vartheta)(b-a)}{a(\vartheta a + (1-\vartheta)b)}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{(1-\vartheta)(b-a)}{a(\vartheta a + (1-\vartheta)b)}\right) = -\frac{b-a}{(\vartheta a + (1-\vartheta)b)^2} < 0,$$

то наибольшее $\Delta t_k = \dfrac{b-a}{ab}$ достигается при $\vartheta = 0$ и соответственно $\hat{x}_k = bx_k$.

Подставив найденные оптимальные значения Δt_k и $\hat{x}_k$ в (4) и (5), получим

$$t_{k+1} = t_k + \frac{b-a}{ab}, \quad x_{k+1} = \frac{x_k b}{a},$$

следовательно,

$$t_k = t_0 + k \cdot \frac{b-a}{ab}, \quad x_k = \frac{x_0 b^k}{a^k}, \quad \hat{x}_k = \frac{x_0 b^{k+1}}{a^k}.$$

Тогда при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ из (3) следует, что

$$x(t) = \frac{x_0 b^k}{a^k} \left(1 + (t - t_0)b - k \cdot \frac{b-a}{a} \right). \tag{10}$$

Выражение (10) определяет решение задачи Коши (7) для всех $t \geqslant t_0$, если в нем положить

$$k = \left[\frac{(t-t_0)ab}{b-a} \right],$$

где $[\, s \,]$ обозначает целую часть числа s.

6. Заключение

Рассматривалась задача решения дифференциального включения в классе кусочно-линейных функций. Предложены достаточные условия локального существования линейного решения и конструктивная процедура поиска кусочно-линейного решения дифференциального включения. Приводится иллюстративный пример. Полученные в работе результаты могут использоваться при математическом моделировании систем с неполным описанием и для реализации вычислительных процедур методов оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31303 и № 12-07-00267) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0370).

Список литературы

1. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
3. Каменецкий В.А. Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1994. № 6. С. 10–26.
4. Каменецкий В.А. Параметрическая стабилизация нелинейных систем управления с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 65–71.
5. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 512 с.
6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

On piecewise linear solutions of the differential inclusion

 # 10, October 2012

DOI: 10.7463/1112.0489571

Gorbunov A. V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

The problem of finding a solution to the differential inclusion in a class of piecewise linear function is examined. Sufficient conditions for the local existence of linear solutions of the differential inclusion and procedure for the construction of piecewise linear solutions of the differential inclusion was proposed. Illustrative example is considered. The results obtained can be used in the mathematical simulation of systems with an incomplete description and calculation procedures for the implementation of optimization techniques.

References

1. Blagodatskikh W.I., Philippov A.Ph. Differential'nie vklucheniya i optimal'noe upravlenie [Differential inclusions and optimal control]. *Trudy MIAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1985, vol. 169, pp. 194–252.
2. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravnenija s razryvnoj pravoj chast'ju*. [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow, Nauka, 1985. 226 s.
3. Kamenetskij V.A. Postroenie oblastej pritjazhenija metodom funktsij Ljapunova [Construction of the domains of attraction by the method of Lyapunov functions]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1994, no. 6, pp. 10-26.
4. Kamenetskij V.A. Parametricheskaja stabilizatsija nelinejnyh sistem upravlenija s fazovymi ogranichenijami [Parametric stabilization of nonlinear control systems under state constraints]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1996, no. 10, pp. 65–71.
5. Aubin J.-P., Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1984. 584 p. (Russ. ed.: Oben Zh.-P., Ekland I. *Prikladnoi nelineinyi analiz*. Moscow, Mir, 1988. 512 p.).
6. Pshenichnyj B.N. *Vypuklyj analiz i ekstremal'nye zadachi.* Moscow, Nauka, 1980. 320 p.