электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Изменение динамических свойств механических колебательных систем при введении в них сочленений звеньев

77-30569/377653

04, апрель 2012

Елисеев С. В., Белокобыльский С. В., Лонцих П. А.

УДК 62.752.

НИИ современных технологий, системного анализа и моделирования,
Иркутский государственный университет путей сообщения
eliseev_s@inbox.ru

Введение. Сочленения играют большую роль в динамике механических систем. Из разнообразие предопределяет интерес к связям, возникающим между элементами механизмов, кинематическим парам и соединениям [1, 2]. Понятие «сочленение» несколько отличается и от понятий «соединение», «кинематическая пара», «связь», поскольку несет на себе, в определенном смысле «предысторию» своего формирования. Под сочленением часто понимают некоторые особенности взаимодействия, возникающего между твердыми телами. В частности, сочленение может предсьавлять собой соединение двух твердых тел, обеспечивающего в некотром направлении, движение. При этом параметры звена соединения могут принимать предельные значения, например, в отношении увеличения жесткости соединения двух тел.

В простейших вариантах звенья, соединяемые шарниром, допускают вращательно-качательные движения относительно друг друга. При этом сочленение из общего числа степеней свободы производит «исключение» одной степени свободы в движениях. В практике виброзащиты могут встречаться звенья, замыкающие на себе через сочленения несколько элементов. Кроме соединения подвижных звеньев между собой часто встречаются соединения твердых тел с неподвижными звеньями или с основанием (или условно неподвижной системой).

Механические колебательные системы могут иметь сочленения различных типов, что обеспечивает особенности структуры системы и, так называемой, «метрики» [1]. Вращательные сочленения твердых тел привносят в системы рычажные связи. Поскольку сочленения уменьшают число степеней свободы системы в целом, то достаточно рациональным подходом представляется первоначальное составление общей модели без ограничений движения. В этом случае математическая модель системы может быть представлена в преобразованиях Лапласа в виде уравнения

$$A\bar{y} = b, \qquad (1)$$

где A - матрица операторных коэффициентов; $\bar{y}$ - вектор-столбец переменных; b - вектор столбец внешних воздействий.

В общем случае матрица A имеет порядок $n \times n$ и является симметричной. При построении математических моделей систем с сочленениями могут использоваться различные системы обобщенных координат, главным образом такие, в которых координаты отражают относительное движение. Сочленение может быть реализовано по отношению к элементу, совершающему «абсолютное» движение. Естественно, при этом, что системы координат допускают соответствующие взаимные преобразования.

Выбирая системы координат, соответствующим для поставленной задачи образом, отметим, что рассматриваемые пары или блоки сочленения будут находиться на диагонали матрицы. Введение сочленения означает исключение соответствующих столбцов и строк матрицы операторных коэффициентов, включая и «исключения» соответствующей правой части уравнения (1).

Внешнее воздействие в этом случае перераспределяется соответствующим образом при выборе систем обобщенных координат, где необходимо соблюдать условия равенства виртуальных работ обобщенных сил в различных системах обобщенных координат [3].

I. Общие положения. Постановка задач исследования. Рассматривается ряд конкретных примеров использования процедур, построения математических моделей, а также примеры сочленений. Набор возможных сочленений может обеспечивать сложные формы взаимодействий, в том числе и на основе кинематических пар IV и III, II классов [4]. На рис.1 представлена расчетная схема виброзащитной системы (ВЗС), в которой имеется два блока, наличие которых отражается контурами I и II. В основе блоков – твердое тело, обладающее массой и моментом инерции; в составе ВЗС задействованы упругие элементы, предполагается, что смещение центра тяжести блока I не оказывает существенного влияния на динамику системы в целом, а силы сопротивления достаточно малы.

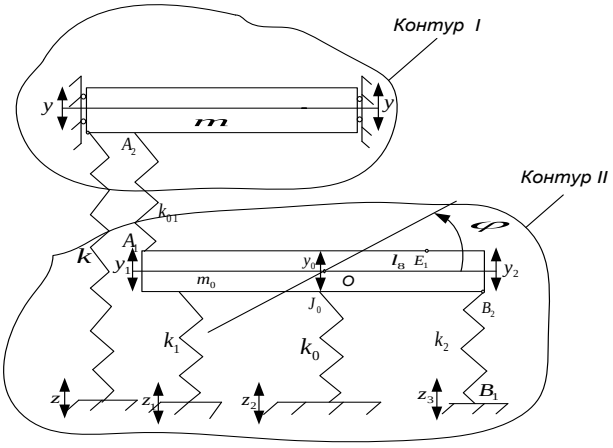


Рис. 1. Расчетная схема ВЗС, имеющей два контура взаимодействия

Расчетная схема в виде колебательной системы с тремя степенями свободы $(y \div y_2)$ может рассматриваться как фрагмент ВЗС, в которой совместно работает блок I (контур I рис. 1) и блок II (контур II рис. 1), состоящий из твердого тела, опирающегося на упругие опоры. Контуры I и II находятся во взаимодействии через упругий связующий элемент k_{01}. В свою очередь, твердое тело опирается не только на упругие опоры k_1 и k_2, но имеет

упругую связь k_0, линия действия которой проходит через центр тяжести балки в точке О. Примем, что $A_1O = l_1, B_2O = l_2$, а присоединенная масса m не вызывает значительных изменений массоинерционных параметров системы. Силы сопротивления также полагаются малыми. Полагая жесткости k_{01} и k_0 достаточно большими, можно преобразовать расчетную схему к виду, как показано на рис. 2.

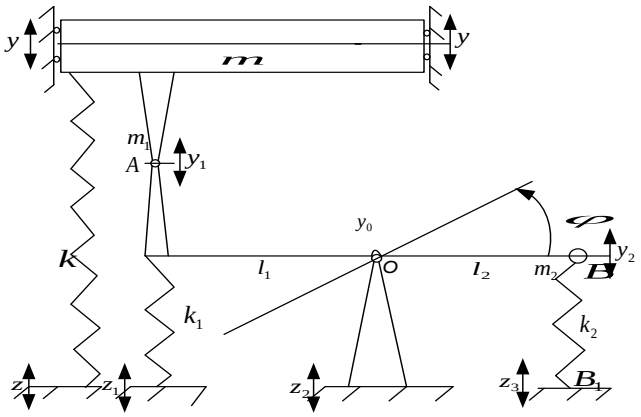


Рис. 2. Преобразованная расчетная схема, содержащая сочленения

Для полученной расчетной схемы могут быть получены математические модели, свойства которых зависят от выбора системы обобщенных координат. При этом представляет интерес формализм построения уравнений движения, на основе уоторых могут быть построены структурные схемы и определены передаточные функции системы. Последние дают возможность появления различных режимов движения и оценить роль и влияние введения сочленений.

II. Построение математических моделей. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий для расчетной схемы ВЗС, приведенной на рис. 2.

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2, \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_2(y - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2, \tag{3}$$

где $\dot{y}_2$ - скорость элемента массой m_2 в абсолютном движении, которая определяется из соотношения

$$\dot{y}_2 = -\left(\frac{\dot{y}}{l_1}\cdot l_2\right) + z_2. \tag{4}$$

Знак минус, отражает изменения движения, вызванное рычагами второго рода, таким образом найдем, что

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[-\dot{y}i + \dot{z}_2(1 + i)\right]^2, \tag{5}$$

где $i = \frac{l_2}{l_1}$ - передаточное отношение рычага.

Потенциальная энергия определяется выражением

$$\begin{aligned} П &= \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_{2аб} - z_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2[-yi + z_2(1+i) - z_3]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Получим дифференциальное уравнение движения для системы рис. 2.

$$\ddot{y}(m_1 + m_2 + m_2 i^2) + y(k + k_1 + k_2 i^2) = m_2(1+i)\ddot{z}_2 + z_2 k_2(1+i) + k_1 z_1 + kz - k_2 i z_3, \quad (7)$$

Для упрощения расчетов примем, что $z_1 = z_2 = z_3$; $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$,

тогда передаточная функция системы примет вид

$$W(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{z}(p)} = \frac{m_2(1+i)ip^2 + k}{(m_1 + m + m_2 i^2)p^2 + k}, \quad (8)$$

где $p = j\omega$ - комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$).

В качестве примера на рис.3 показано семейство амплитудно-частотных характеристик, построенных на основе (8) при изменении параметра передаточного отношения рычага i в пределах от 0÷3 с шагом 0,5. В качестве исходных приняты следующие параметры системы: $m = 100$ *кг*; $m_1 = m_2 = 20$ *кг*; $k = 10000$ Н/м

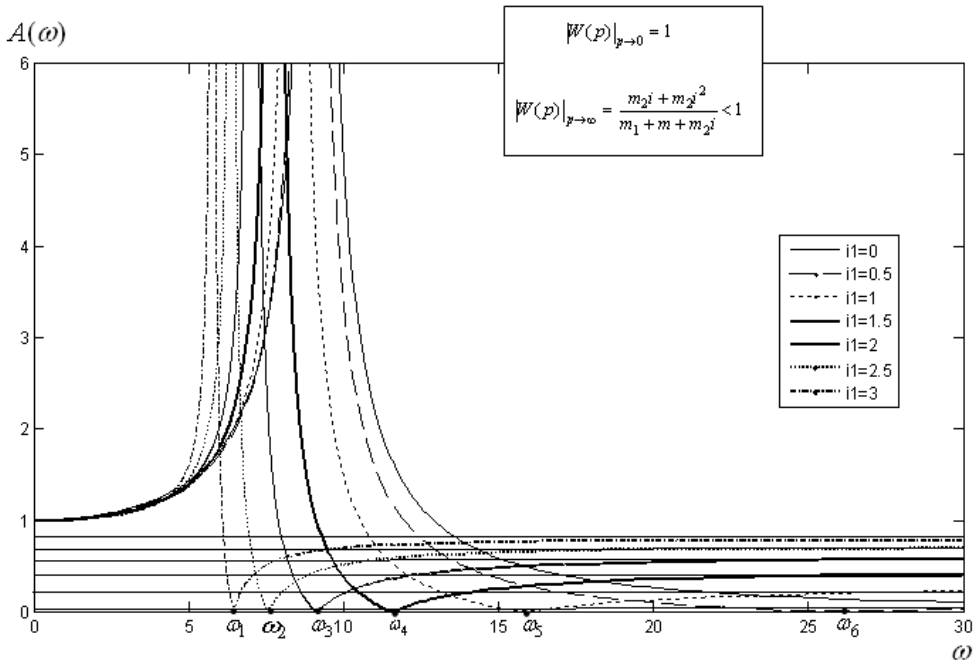


Рис. 3. Семейство амплетудно-частотных характеристик системы с передаточной функцией (8)

На рис. 3 через $\omega_1 \div \omega_6$ обозначены частоты динамического гашения колебаний. Соответствующие значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами динамического гашения приведены в табл.1.

Значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами дигамического гашения $\omega_1 \div \omega_6$ для системы на рис.3

Табл. 1

i	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Значение частот динамического гашения	ω_1	ω_2	ω_3	ω_3	ω_5	ω_6
	25.81	15.81	11.54	9.12	7.55	6.45
Значение частот собственных колебаний	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}1}$	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}2}$	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}3}$	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}4}$	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}5}$	$\omega_{\tilde{n}\hat{i}\acute{a}6}$
	8.94	8.45	7.78	7.07	6.38	5.77

Из сравнения амплитудно-частотных характеристик следует, что при увеличении i происходит смещение частот динамического гашения влево, то есть разность частот $\omega_{соб} - \omega_{дин}$ уменьшается. При этом частота собственных колебаний также уменьшается, но гораздо медленнее. На высоких частотах коэффициент передачи амплитуды колебаний после режима динамического гашения стремится к предельному значению $\left|W(p)\right|_{p\to\infty} = \dfrac{m_2 i + m_2 i^2}{m_1 + m + m_2 i} < 1$; чем больше i, тем – больше будет значение $\left|W(p)\right|_{p\to\infty}$. При $i \to \infty$ получим, что $\left|W(p)\right|_{p\to\infty} = \dfrac{m_2 i + m_2 i^2}{m_1 + m + m_2 i} = 1$.

Более детализированная информация о свойствах динамического гасителя колебаний представлена в работе [5].

III. Построение математических моделей в различных системах координат.

Произведем ряд выкладок, в развитие метода получения математических моделей систем с сочленениями, основанного на упрощениях некоторых более общих систем. При этом используются особенности, возникающие при наложении связей. Вернемся к исходной схеме, приведенной на рис.1. Тогда выражения (5) и (6) для кинетической и потенциальной энергий можно преобразовать к виду

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \tag{9}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_0 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2} k_{01} (y - y_1)^2, \tag{10}$$

где приняты (рис. 1) следующие обозначения: J_0 - момент инерции, m_0- масса промежуточного тела (может превращаться в m_1 и m_2, соединенных рычагом); m - масса объекта; k, k_1, k_0, k_2- упругие элементы, промежуточного тела, опирающегося на основание; $z \div z_3$- кинематические возмущения. Координаты точек A_1 и A_2, определяются следующим образом:

$$y_{A1} = y_1 \text{ и } y_{A2} = y \ . \tag{11}$$

Для получения сочленений между элементами необходимо выполнение условий

$$y_1 - y = 0, y_{10} = 0, \tag{12}$$

где исходные значения $y_{10} = y_0 - z_2$.

Определим для исследований координаты y_0, φ и запишем ряд соотношений

$$y_0 = ay_1 + by_2; \varphi = c(y_2 - y_1), \ a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \tag{13}$$

При движении объекта защиты в системе координат y_0, y_2 и y_1 выражение для кинетической энергии можно привести к виду:

$$T = \frac{1}{2} m_0 (a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} J_0 c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2. \tag{14}$$

Соответственно для потенциальная энергия в данном случае определится

$$\begin{aligned} П = &\frac{1}{2} k(y - z)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_0 (ay_1 + by_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2} k_{01} (y - z_1)^2 \end{aligned} \ . \tag{15}$$

В табл. 2 приведены значения коэффициентов уравнений в координатах, y_1, y_2 и y, полученных обычным образом [2].

Значения коэффициентов уравнений движения системы (рис.1) в координатах y_1, y_2 и y

Табл. 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\left(m_0 a^2 + J_0 c^2\right) p^2 + k_1 + k_0 c$	$\left(m_0 ab - J_0 c^2\right) p^2 + k_0 ab$	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\left(m_0 ab - J_0 c^2\right) p^2 + k_0 ab$	$\left(m_0 b^2 + J_0 c^2\right) p^2 + k_0 b^2 + k_2$	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}
0	0	$mp^2 + k + k_{01}$

Обобщенные силы по координатам y_0, y_2 и y_1 имеют вид

$$Q_{y_1} = k_1 z_1 + k_0 a z_2; Q_{y_2} = k_0 b z_2 + k_2 z_3; Q_y = k\ z\ + k_{01} z_1. \quad (16)$$

Полученные уравнения описывают движение в системе координат, отражающих вертикальные перемещения массоинерционных элементов ВЗС. Такую математическую модель можно назвать базовой. Особенность матрицы заключается в том, что $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 0$; это зависит от характера динамических взаимодействий, определяемых структурой ВЗС (рис.1) и выбором системы обобщенных координат.

Перейдем к системе координат $x = y - y_1$, y_0 и φ; запишем ряд соотношений $y = x + y_1 = x + y_0 - l_1\varphi$ и получим выражение для кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left(\dot{y}_0\right)^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x} + \dot{y}_0 - l_1 \dot{\varphi}\right)^2, \quad (17)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k \left(x + y_0 - l_1 \phi - z\right)^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(y_0 - l_1 \phi - z_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_0 \left(y_0 - z_2\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(y_0 + l_2 \phi - z_3\right)^2 + \frac{1}{2} k_{01} \left(x\right)^2. \quad (18)$$

Значения коэффициентов уравнений в координатах φ, y_0 и x соответственно представлены в табл.3.

Значения коэффициентов уравнений в координатах φ, y_0 и x

Табл. 3

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\left(ml_1^2 + J_0\right)p^2 + kl_1^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$	$\left(-ml_1\right)p^2 - kl_1 + k_1 l_1 + k_2 l_2$	$\left(-ml_1\right)p^2 - kl_1$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\left(-ml_1\right)p^2 - kl_1 + k_1 l_1 + k_2 l_2$	$\left(m_0 + m\right)p^2 + k + k_1 + k_0 + k_2$	$\left(m\right)p^2 + k$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$\left(-ml_1\right)p^2 - k_1 l_1$	$\left(m\right)p^2 + k$	$\left(m\right)p^2 + k + k_{01}$

Обобщенные силы по координатам φ, y_0 и x имеют вид

$$Q_\varphi = -kl_1 z + k_1 l_1 z_1 + k_2 l_2 z_3; Q_{y_0} = kz + k_1 z_1 + k_0 z_2 - k_2 z_3; Q_x = kz. \quad (19)$$

Математическая модель в системе координат φ, y_0 и x отличается от предыдущей модели (координаты y_1, y_2 и y) тем, что «нулевые» клетки в матрице коэффициентов отсутствуют. Что касается координаты $x = y - y_1$, то она может быть «обнулена» предположением, что $k_{01} \to \infty$ и образуется сочленение, которое можно рассматривать

как кинематическую пару. Физически это означает, что масса m присоединяется к элементу ВЗС в т. А с массоинерционными параметрами m_0, J_0 и изменяет их (и общую массу и момент инерции). Движение системы будет описываться в этом случае координатами y_0 и φ. Необходимые данные для получения передаточных функций можно получить, исключая столбец и строку, содержащие x (фактически переменная устраняется, а порядок матрицы уменьшается на единицу).

Для дальнейших расчетов введем систему координат y_0, y_1 и x. Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергий в координатах y_0, y_1 и x преобразуются к виду:

$$T = \frac{1}{2}m_0\left(\dot{y}_0\right)^2 + \frac{1}{2}J_0 a_0^{\,2}\left(\dot{y}_0 - \dot{y}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{y}_1 + \dot{x}\right)^2.$$

или

$$T = \frac{1}{2}m_0\left(\dot{y}_0\right)^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{y}\right)^2, \qquad (20)$$

где $y = y_1 + x$; $x = y - y_1$, тогда $\varphi = c\left(y_2 - y_1\right)$; $y_0 = ay_1 + by_2$; $y_2 = \dfrac{y_0 - ay_1}{b}$. (21)

Запишем $\varphi = cy_2 - cy_1 = \dfrac{c\cdot(y_0 - ay_1)}{b} - cy_1 = \dfrac{cy_0 - cay_1 - bcy_1}{b} = \dfrac{c}{b}(y_0 - y_1)$

и найдем $\varphi = a_0\left(y_0 - y_1\right)$,

где $a_0 = \dfrac{c}{b}$; $y_0 = ay_1 + by_2$; $y_2 = \dfrac{y_0 - ay_1}{b} = \dfrac{1}{2}y_0 - \dfrac{a}{b}y_1 = a_{10}y_0 - a_{01}y_1$.

В этом случае выражение для потенциальной энергии в развернутой форме в координатах y_0, y_1 и x определится

$$\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{1}{2}k\left(y_1 + x - z\right)^2 + \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_0\left(y_0 - z_2\right)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_2\left(a_{10}y_0 - a_{01}y_1 - z_3\right)^2 + \frac{1}{2}k_{01}\left(x\right)^2, \end{aligned} \qquad (22)$$

где $a_{10} = \dfrac{1}{b}$ и $a_{01} = \dfrac{a}{b}$.

В таблице 4 представлены значения коэффициентов уравнений системы (рис.1) в координатах y_1, y_0 и x

Значения коэффициентов уравнений в координатах y_1, y_0 и x

Табл. 4

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\left(m + J_0a_0^2\right)p^2 + k + k_1 + k_2la_{01}^2$	$\left(-J_0a_0^2\right)p^2 - k_2a_{01}a_{10}$	$\left(-m\right)p^2 + k$

a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\left(-J_0a_0^2\right)p^2-k_2a_{01}a_{10}$	$\left(m+J_0a_0^2\right)p^2+k+k_2a_{10}^2$	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$\left(-m\right)p^2+k$	0	$\left(m\right)p^2+k+k_{01}$

Обобщенные силы по координатам x, y_0 y_1и имеют вид

$$Q_x=-kz;Q_{y_0}=k_0z_2+k_2a_{01}z_3;Q_{y_1}=kz-k_2a_{01}z_3+k_1z_1. \qquad (23)$$

В этой системе координат y_1, y_0 и x возможно также введение сочленения и по координате x. Для получения передаточной функции системы, которая имеет две степени свободы y_0 и y_1, необходимо исключить соответствующие столбцы и строку. Отметим, что, если $x=0$, то $y_1=y$ и движение системы при одном шарнире в точке *A*, будет описываться координатами y_0 и y_1. В данном случае рычаг имеет упругое опирание для своего центра вращения. Наибольший интерес представляет все же случай с двумя сочленениями.

III. Введение двух сочленений. Рассмотрим систему координат y_{10}, y и x. Вводя ряд соотношений ($y_{10}=y-z_2$), запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$T=\frac{1}{2}m_0\left(\dot{y}_{10}+\dot{z}_2\right)^2+\frac{1}{2}J_0a_0{}^2\left(\dot{y}_{10}+\dot{z}_2-\dot{y}+\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{y}\right)^2, \qquad (24)$$

где $a_0=\frac{c}{b}$.

а также запишем выражение для потенциальной энергии системы

$$П=П_1+П_2+П_3+П_4+П_5, \qquad (25)$$

где

$$П_1=\frac{1}{2}k\left(y-z\right)^2=\frac{1}{2}k\left(y^2-2yz+z^2\right);П_2=\frac{1}{2}k_1\left(y-x-z_1\right)^2=\frac{1}{2}k_1(y^2-2yx+x^2-2z_1y+2z_1x+z_1^2);$$

$$П_3=\frac{1}{2}k_0\left(y_{10}\right)^2;П_4=\frac{1}{2}k_2\left(a_{10}y_{10}-a_{01}y+a_{01}x+z_0\right)^2=\frac{1}{2}k_2(a^2{}_{10}y_{10}^2-2a_{10}a_{01}y_{10}y+$$

$$+a_{01}^2y^2+2a_{01}^2x+2a_{01}xz_0+z_0^2+2a_{01}a_{10}xy_{10}-2a_{01}^2xy+2a_{10}z_0y_{10}-2a_{01}z_0y);П_5=\frac{1}{2}k_{01}x^2.$$

где $z_0=a_{10}z_2-z_3$.

В табл. 5 приведены коэффициенты уравнений в координатах y_{10}, y **и** *x*.

Значения коэффициентов уравнений в координатах y_{10}, y и x

Табл.5

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\left(m_0 + J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 + k_0 + k_2 a_{10}^2$	$\left(- J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 - k_2 a_{10} a_{01}$	$\left(J_0 a^2\right)p^2 + k_2 a_{10} a_{01}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\left(- J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 - k_2 a_{10} a_{01}$	$\left(m + J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 + k + k_2 a^2{}_{01} + + k_1$	$\left(- J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 - k_1 - k_2 a^2{}_{01}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$\left(J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 + k_2 a_{10} a_{01}$	$\left(- J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 - k_1 - k_2 a^2{}_{01}$	$\left(J_0 a_0^{\ 2}\right)p^2 + k_1 + k_2 a^2{}_{01} + k_{01}$

Обобщенные силы по координатами y_{10}, y и x имеют вид

$$Q_{y_{10}} = -\left(m_0 + J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 - k_2 a_{10} z_0; \quad Q_y = \left(J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 + kz + k_1 z_1 + k_2 a_{01} z_0;$$

$$Qx = -\left(J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 - k_1 z_1 - k_2 a_{01} z_0. \tag{26}$$

При $z_0 = a_{10} z_2 - z_3$ получим следующие выражении для обобщенных сил:

$$Q_{y_{10}} = -\left(m_0 + J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 - k_2 a_{10} z_0 = -(m_0 + J_0 a_0^2)\, p^2 - k_2 a_{10}^2 z_2 - k_2 a_{10} z_3; \tag{27}$$

$$\begin{aligned} Q_y &= -\left(J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 + kz + k_1 z_1 + k_2 a_{01} z_0 = \\ &= J_0 a_0^2 p^2 + kz + k_1 z_1 + k_2 a_{10} a_{01} z_2 - k_2 a_{01} z_3 \end{aligned}; \tag{28}$$

$$Q_x = -\left(J_0 a_0^{\ 2}\right)\ddot{z}_2 - k_1 z_1 - k_2 a_{10} z_0 = -J_0 a_0^2 p^2 - k_1 z_1 - k_2 a_{10} a_{01} z_2 + k_2 a_{10} z_3. \tag{29}$$

В данной системе координат имеется возможность выхода на два сочленения: по координате y_{10} и по координате x. Используя матрицу (Табл. 5) и, исключая соответствующие строки и столбцы, получим уравнение движения для системы с двумя сочленениями.

$$(m_0 + J_0 a_0^2)\, p^2 + k + k_2 a_{01}^2 + k_1 = J_0 a^2{}_0 \ddot{z}_2 + kz + k_1 z_1 + k_2 a_{01} z_0 \ . \tag{30}$$

Для упрощения принимаем, что $k_2 = 0$, $k_1 = 0$, $z_1 = 0$, $z_3 = 0$; при этом $z = z_2$, тогда уравнение (30) преобразуется к виду

$$\bar{y}(m_0 + J_0 a_0^2)\, p^2 + k = (J_0 a^2{}_0 p^2 + k)\bar{z}, \tag{31}$$

откуда передаточная функция системы принимает вид

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{J_0 a_0^2 + k}{m + J_0 a_0^2 + k}. \tag{32}$$

Сравнение (32) и (8) показывает, что структура передаточных функций является общей и предлагаемый подход позволяет построить необходимые математические модели.

Для получения полного совпадения результатов необходимо представить расчетную схему более детализированной. Для вывода (8) использовалась схема, показанная на (рис.2). Особенность этой расчетной схемы заключается в учете массоинерционных свойств рычажных связей. Рассмотрим, в связи с этим расчетную схему системы на рис.3.4, которая отражает массоинерционные свойства системы. На расчетной схеме (рис.5) показаны массы m_1 и m_2; учет особенностей их движения является существенным фактором для совпадения выражений (8) и (32).

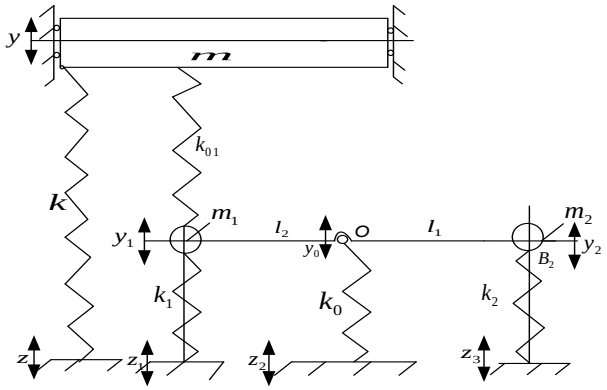


Рис. 5. Расчетная схема ВЗС на рис.1, но с разнесенными массами m_1 и m_2

Выберем для дальнейших расчетов систему координат y, y_{10} и x, полагая при этом, что $y_{10} = y_0 + z$, $x = y - y_1$ где $y_0 = ay_1 + by_2$. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_{01}(y - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_0 - z_2)^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Произведем ряд преобразований:

$$y_2 = y_0 - ay_1 = a_0y_0 - iy_1, i = \frac{a}{b} = \frac{l_2}{l_1};\ a_0 = \frac{1}{b};$$

$$y_2 = a_0y_{10} + a_0z_2 - iy + ix.y_0 = y_{10} + x, \tag{35}$$

тогда получим (33), (34) в виде

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(a_0\dot{y}_{10} + a_0\dot{z}_2 - i\dot{y} + i\dot{x})^2, \tag{36}$$

$$П = \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y-x-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_0y_{10} - iy + ix + z_0)^2 + \frac{1}{2}k_{01}(x)^2 + \frac{1}{2}k_0\left(y_{10}\right)^2, \quad (37)$$

где $z_0 = a_0z_2 - z_3$. Сделав ряд вспомогательных выкладок, аналогичных выше приведенным при выводе уравнений движения, получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(m_1 + m_2i^2 + m) + y(k + k_1 + k_2i^2) + \ddot{x}\left(-m_1 - m_2i^2\right) + x(-k_1 - k_2i^2) + \\ &+ \ddot{y}_{10}\left(-m_2ia_0\right) + y_{10}\left(-k_2a_0i\right) = m_2a_0iz_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i;\end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(-m_1 - m_2i^2) + y(-k_1 - k_2i^2) + \ddot{x}\left(m_1 + m_2i^2\right) + x(k_1 + k_{01} + k_2i^2) + \\ &+ \ddot{y}_{10}\left(m_2ia_0\right) + y_{10}\left(k_2a_0i\right) = -m_2a_0i\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2z_0i;\end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(-m_2ia_0) + y(-k_2i^2a_0) + \ddot{x}\left(m_2ia_0\right) + x(k_2ia_0) + \\ &+ \ddot{y}_{10}\left(m_2a_0^2\right) + y_{10}\left(k_2a_0^2 + k_0\right) = -m_2a_0^2\ddot{z}_2 - k_2a_0z_0.\end{aligned} \quad (40)$$

В табл.3.5 приведены коэффициенты уравнений (38) ÷ (40).

Значения коэффициентов уравнений в координатах y, x и y_{10}

Табл.6

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$(m_1 + m + m_2i^2)p^2 + k + k_1 + k_2i^2$	$(-m_1 - m_2i^2)p^2 - k_1 - k_2i^2$	$-m_2ia_0p^2 - k_2a_9i$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$(-m_1 - m_2i^2)p^2 - k_1 - k_2i^2$	$(m_1 + m_2i^2)p^2 + k_1 + k_{01} + k_2i^2$	$m_2ia_0p^2 + k_2a_0i$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$-m_2ia_0p^2 - k_2a_0i$	$m_2ia_0p^2 + k_2a_0i$	$m_2a_0^2p^2 + k_2a_0^2 + k_0$

Обобщенные силы в данном случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned}Q_y &= m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i,\\ Q_x &= -a_0im_2\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2iz_0,\\ Q_{y_{10}} &= -m_2a_0^2\ddot{z}_2 - k_2a_0z_0.\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Исключая из матрицы столбцы и строки по координатам x и y_{10}, получим уравнение движения для системы с координатой y

$$\ddot{y}\left(m_1 + m + m_2i^2\right) + y\left(k + k_1 + k_2i^2\right) = m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i\,. \quad (42)$$

Для построение передаточной функции «смещение y по входу z_2» примем, что $z = z_2$, $z_1 = 0$, $z_3 = z_2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. В этом случае при $k_{01} \to \infty$, $k_0 \to \infty$, тогда

$$W = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{m_2 a_0 i p^2 + k}{\left(m + m_1 + m_2 i^2\right) p^2 + k}, \tag{43}$$

Отметим, что $\frac{1}{b} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} = 1 + i$; в этом случае

$$W = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{m_2 i (i+1) p^2 + k}{\left(m + m_1 + m_2 i^2\right) p^2 + k}. \tag{44}$$

Выражения (8) и (44) полностью совпадают, что собственно и требовалось доказать.

Заключение. 1. Таким образом, выбирая систему обобщенных координат соответствующим образом, можно построить математическую модель механической системы с сочленениями. В этом случае система с сочленениями обладает меньшим числом степеней свободы, чем у исходной системы. Сочленение возможно между двумя телами при соединении двух тел в кинематическую пару вращательного вида (V класса). Однако, возможны и соединения твердого тела и с другим телом с потерей возможности относительного движения.

2. Предлагаемый метод получения математических моделей обладает возможностями реализации посковых технологий в разработке новых способов и средств защиты объектов от вибрационных воздействий.

3. Особенности метода таковы, что при выборе систем координат исходной системы и числа сочленений, их форм и мест расположения, что позволяют получать семейства технических решений, из которых могут быть выделены схемы, представляющие интерес для решения конкретных задач динамики машин.

Библиографический список

1. Упырь Р.Ю. Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм сочленений элементарных звеньев.: автореф. … канд. техн. наук / Р.Ю. Упырь 0 Иркутск.: ИрГУПС. – 2009. 19 с.

2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в задачах динамики колебательных систем. – Новосибирск.: Наука. 2011. – 394 с.

3. Лурье А.И. Аналитическая механика. – Москва.: Наука. 1986. – 560 с.

4. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Сочленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы движения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Вып. № 4(28) – Иркутск.: ИрГУПС. 2010. – с. 8-15

5. Трофимов А.Н. Об оценке свойств вычажных динамических гасителей колебаний // Системы. Методы. Технологии. Вып. № 3(11) – Братск.: БрГУ. 2011. – с. 45-60

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Change of dynamical properties of mechanical oscillation systems on the base of introduction of link connection

77-30569/377653

04, April 2012

Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Loncih P.A.

Science educational center of Modern technologies, system analys and modeling,
Irkutsk State Transport University, Irkutsk
eliseev_s@inbox.ru

The authors consider questions of creating mathematical models of mechanical systems with couplings. Usually the couplings are simple rotational kinematical ties. The authors propose a method of model creation – this method consists of implementation of a certain sequence of actions based on selection of points of possible coupling of two bodies and a system of corresponding coordinates. If the elements of the planned coupling are identified as points of possible contact and are interconnected with an elastic or dissipative coupling, the difference between the coordinates of two selected points defines the relative coordinate. This coordinate can be removed out of the coefficient matrix of the system of motion equations with an appropriate column and line delineation. Coupling introduction is accompanied with a decrease in the number of degrees of freedom. Several examples, including one for two couplings, are considered in the article.

Publications with keywords: coupling of rigid bodies, mathematical models of mechanical oscillation systems, regimes of dynamical absorbtion of oscillation
Publications with words: coupling of rigid bodies, mathematical models of mechanical oscillation systems, regimes of dynamical absorbtion of oscillation

References

1. Upyr' R.Iu. *Dinamika mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem s uchetom prostranstvennykh form sochlenenii elementarnykh zven'ev. Avtoreferat kand. diss.* [Dynamics of mechanical oscillating systems, taking into account the spatial forms of joints of elementary units. Abstract of cand. diss.]. Irkutsk, IrGUPS, 2009. 19 p.

2. Eliseev S.V., Reznik Iu.N., Khomenko A.P. *Mekhatronnye podkhody v zadachakh dinamiki kolebatel'nykh sistem* [Mechatronic approaches in problems of the dynamics of oscillating systems]. Novosibirsk, Nauka, 2011. 394 p.

3. Lur'e A.I. *Analiticheskaia mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Nauka, 1986. 560 p.

4. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Sochleneniia v vibrozashchitnykh sistemakh kak protsess umen'sheniia chisla stepenei svobody dvizheniia [The articulation in vibration systems as the process of reducing the number of degrees of freedom of movement]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*. IrGUPS Publ., 2010, no. 4(28), pp. 8-15.

5. Trofimov A.N. Ob otsenke svoistv rychazhnykh dinamicheskikh gasitelei kolebanii [An assessment of the properties of lever dynamic oscillation dampers]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. BrGU Publ., 2011, no. 3 (11), pp. 45-60