

Анализ фазовой автоподстройки при наличии гармонической помехи.**77-30569/297921**

01, январь 2012

Шахтарин Б. И.

УДК 621.37

МГТУ им. Н.Э. Баумана

shakhtarin@mail.ru**Постановка задачи**

Воздействие гармонических помех на фазовую автоподстройку (ФАП) много лет привлекает внимание исследователей [1-12]. Первой работой в этом направлении является статья Журавлева А.Г. [1], посвященная экспериментальному исследованию воздействия гармонических помех на ФАП. Им выявлены условия захвата за сигнал и за помеху. В работе [2] предпринята попытка аналитического исследования, но лишь при нулевой начальной расстройке сигнала и управляемого генератора на основе метода гармонического баланса. С использованием этого метода в [3, 4] получен ряд динамических характеристик ФАП. В статье [5] приводится анализ ФАП при гармонической помехе на входе численным методом с использованием метода фазовой плоскости, и с учетом начальной расстройки по частоте двух колебаний. В [6] исследование проводится методом усреднения. В работах [7-9] с учетом начальной расстройки между частотами сигнала и управляемого генератора приближенным методом получен ряд динамических характеристик ФАП в зависимости от интенсивности помехи и параметров ФАП первого и второго порядков.

В книге автора [7] ФАП исследовалась методом гармонического баланса, когда предполагаемое решение дифференциального уравнения (ДУ) ФАП [7]

$$p x = \beta - F(p) [\sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta)], \quad (1)$$

принималось в виде

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(dt + \Delta\theta + \psi) = x_0 + x_1 \cos \Phi. \quad (2)$$

В (1) $p = d/dt$ - оператор дифференцирования; $t = \Omega t_1; t_{1,c}$ - время; Ω - полоса синхронизации ФАП; $\beta = \Omega_0/\Omega$; $\Omega_0 = \omega_c - \omega_0$ - расстройка по частоте между частотой сигнала ω_c и частотой управляемого генератора ω_0 ; $\Delta\theta = \theta_n - \theta_c$ - расстройка по фазе помехи и сигнала; $d = \Delta\Omega/\Omega$; $\Delta\Omega = \omega_n - \omega_c$ - соответствующая расстройка по частоте; $\varepsilon = A_n/A_c$ - отношение амплитуд помехи и сигнала; $F(p)$ - передаточная функция фильтра в кольце ФАП.

Параметры предполагаемого решения (2): постоянная составляющая x_0 , амплитуда первой гармоники x_1 и фазовый угол ψ в [7] находились в процессе гармонического баланса при условии малого значения амплитуды x_1 и при условии $d > 1$, что обусловило использование приближенных соотношений [7].

$$\begin{aligned}\sin x &\approx \sin x_0 + x_1 \cos x_0 \cos(dt + \Delta\theta + \psi), \\ \cos x &\approx \cos x_0 - x_1 \sin x_0 \cos(dt + \Delta\theta + \psi).\end{aligned}\tag{3}$$

В данной статье при использовании ДУ (1) и предполагаемого решения в форме (2) используется более строгий подход, когда вместо (3) используются приближения более высокого порядка, в связи с чем повышается точность получаемых результатов: динамических характеристик и критических значений параметров ФАП и помехи. Кроме того, производится сравнение критических значений параметров ФАП, получаемых методом гармонического баланса и методом фазовой плоскости [5, 8].

1. Основные соотношения

При использовании предполагаемого решения ДУ в виде (2) в правой части ДУ (1) получим

$$\sin x = \sin(x_0 + x_1 \cos \Phi) = \sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi).$$

Воспользуемся известными разложениями

$$\begin{aligned}\cos(z \cos \Phi) &= J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z) \cos 2k\Phi, \\ \sin(z \cos \Phi) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(z) \cos(2k+1)\Phi.\end{aligned}$$

где $J_n(z)$ - функция Бесселя n-го порядка.

Используем приближенные равенства, вытекающие отсюда при сохранении лишь первых слагаемых,

$$\begin{aligned}\cos(x_1 \cos \Phi) &\approx J_0(x_1) + \dots; \\ \sin(x_1 \cos \Phi) &\approx 2J_1(x_1) \cos \Phi + \dots;\end{aligned}$$

Тогда получим,

$$\sin x = J_0(x_1) \sin x_0 + 2J_1(x_1) \cos \Phi \cos x_0. \quad (4)$$

Далее используем разложение второго слагаемого в квадратных скобках (1),

$$\sin(x + dt + \Delta\theta) = \sin x \cos(dt + \Delta\theta) + \cos x \sin(dt + \Delta\theta).$$

где $\sin x$ по (4), а

$$\cos x = \cos(x_0 + x_1 \cos \Phi) = J_0(x_1) \cos x_0 - 2J_1(x_1) \sin x_0 \cos \Phi. \quad (5)$$

Подставляя приближенные значения слагаемых в квадратных скобках в правой части ДУ (1), после дифференцирования процесса в левой части ДУ (1), получим приближенное соотношение, из которого в дальнейшем находятся постоянная составляющая x_0 , амплитуда первой гармоники x_1 и фазовый угол ψ .

Предварительно положим

$$F(s) = |F(s)| \exp(iP) = M \exp(iP); \quad P = \arg F(s), \quad (6)$$

причем $|F(0)| = M(0) = M_0$

Тогда подставляя (2) в ДУ (1) с учетом (4), (5), (6) получим соотношение

$$\begin{aligned}-dx_1 \sin \Phi &= \beta - M_0 J_0(x_1) \sin x_0 - \cos x_0 2J_1(x_1) M \cos(\Phi + P) - \\ - \varepsilon \sin x_0 M J_0(x_1) \cos(dt + \Delta\theta + P) &- \varepsilon \cos x_0 J_0(x_1) M \sin(dt + \Delta\theta + P) - F(p)(A + B),\end{aligned} \quad (7)$$

где $A = \varepsilon \cos x_0 2J_1(x_1) \cos \Phi \cos(dt + \Delta\theta) = \varepsilon \cos x_0 2J_1(x_1) * \\ * [\cos(dt + \Delta\theta) \cos \psi - \sin(dt + \Delta\theta) \sin \psi] \cos(dt + \Delta\theta) \approx \varepsilon J_1(x_1) \cos x_0 \cos \psi$

так как при этом отброшены вторые гармоники $\cos[2(dt + \Delta\theta)]$ и $\sin[2(dt + \Delta\theta)]$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}B &= -\varepsilon \sin x_0 2J_1(x_1) \cos \Phi \sin(dt + \Delta\theta) = -\varepsilon \sin x_0 2J_1(x_1) * \\ * [\cos(dt + \Delta\theta) \cos \psi - \sin(dt + \Delta\theta) \sin \psi] \sin(dt + \Delta\theta) &\approx \varepsilon J_1(x_1) \sin x_0 \sin \psi.\end{aligned}$$

В сумме находим

$$A + B = \varepsilon J_1(x_1) \cos(x_0 - \psi).$$

Таким образом,

$$F(p)(A+B) = M_0 \varepsilon J_1(x_1) \cos(x_0 - \psi).$$

Следовательно, баланс по постоянным составляющим приводит к соотношению

$$\beta = M_0 [J_0(x_1) \sin x_0 + \varepsilon J_1(x_1) \cos(x_0 - \psi)]. \quad (8)$$

Отсюда, используя приближенные равенства

$$J_0(x_1) \approx 1; \quad J_1(x_1) \approx \frac{x_1}{2}, \quad (9)$$

получим [7, ф-ла (12.20)].

Далее осуществим гармонический баланс оставшихся слагаемых в (7).

Слева в (7) находим

$$-dx_1 \sin(dt + \Delta\theta + \psi) = -dx_1 \sin(dt + \Delta\theta) \cos \psi - dx_1 \cos(dt + \Delta\theta) \sin \psi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin(dt + \Delta\theta)$ и $\cos(dt + \Delta\theta)$ слева и справа в (7), получим соотношения, определяющие искомые значения x_0 , x_1 , ψ .

$$\begin{aligned} \varepsilon M J_0(x_1) \cos(x_0 + P) &= [\cos x_0 M 2 J_1(x_1) \sin P + dx_1] \cos \psi + \\ &+ [\cos x_0 M 2 J_1(x_1) \cos P] \sin \psi; \\ \varepsilon M J_0(x_1) \sin(x_0 + P) &= [\cos x_0 M 2 J_1(x_1) \sin P + dx_1] \sin \psi - \\ &- [\cos x_0 M 2 J_1(x_1) \cos P] \cos \psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда при условиях (9) приходим к приближенным соотношениям [7, ф-ла (12.20)].

Решим полученную систему уравнений (10) относительно функций $\sin \psi$ и $\cos \psi$.

Предварительно запишем уравнения (10) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11} \sin \psi + a_{12} \cos \psi &= F_1; \\ a_{21} \sin \psi + a_{22} \cos \psi &= F_2. \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_{11} = D \cos P$; $a_{12} = D \sin P + dx_1$; $a_{21} = D \sin P + dx_1 = a_{12}$; $a_{22} = -D \cos P$;

где $D = \cos x_0 M 2 J_1(x_1)$; $F_1 = \varepsilon M J_0(x_1) \cos(x_0 + P)$; $F_2 = \varepsilon M J_0(x_1) \sin(x_0 + P)$.

Определитель системы уравнений (11) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta &= -d^2 x_1^2 \left\{ \left[\frac{M \cos x_0}{dx_1} 2J_1(x_1) \right]^2 + 1 + 2 \left[\frac{M \cos x_0}{dx_1} 2J_1(x_1) \right] \sin P \right\} = \\ &= -d^2 x_1^2 \left\{ \left[\frac{M \cos x_0}{dx_1} 2J_1(x_1) + \sin P \right]^2 + \cos^2 P \right\} = -x_1^2 \Delta_0\end{aligned}\quad (12)$$

Отсюда при условиях (9) приходим к [7, ф-ле (12.23)] с точностью до коэффициента $(-x_1^2)$

В результате находим

$$\sin \psi = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \cos \psi = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_1 & a_{12} \\ F_2 & a_{22} \end{vmatrix} = F_1 a_{22} - F_2 a_{12}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & F_1 \\ a_{21} & F_2 \end{vmatrix} = F_2 a_{11} - F_1 a_{21};$

После преобразований Δ_1 и Δ_2 принимает вид

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\varepsilon M J_0(x_1) x_1 \left[d \sin(x_0 + P) + M \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) \cos^2 x_0 \right], \\ \Delta_2 &= -\varepsilon M J_0(x_1) x_1 \left[d \cos(x_0 + P) - 0.5 \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) M \sin 2x_0 \right].\end{aligned}$$

Таким образом, находим искомые решения системы уравнений (11)

$$\begin{aligned}x_1 \cos \psi &= \varepsilon M \Delta_0^{-1} J_0(x_1) \left[d \cos(x_0 + P) - 0.5 M \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) \sin 2x_0 \right], \\ x_1 \sin \psi &= \varepsilon M \Delta_0^{-1} J_0(x_1) \left[d \sin(x_0 + P) + M \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) \cos^2 x_0 \right].\end{aligned}\quad (13)$$

где $\Delta_0 = -\Delta/x_1^2$

Отсюда при условиях (9) приходим к [7, ф-ла (12.21)].

По (13) находим выражения для квадрата амплитуды первой гармоники (x_1^2) .

$$x_1^2 = \varepsilon^2 M^2 J_0^2(x_1) / \Delta_0. \quad (14)$$

Отсюда при условиях (9) приходим к [7, ф-ла (12.22)].

Раскрывая в (14) значение величины Δ_0 , получим

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2 J_0^2(x_1)}{d^2 \left\{ \left[\frac{\cos x_0}{d} \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) + \frac{\sin P}{M} \right]^2 + \left(\frac{\cos P}{M} \right)^2 \right\}} \quad (15)$$

или при выполненных условиях (9)

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{d^2 \left[\left(\frac{\cos x_0}{d} + \frac{\sin P}{M} \right)^2 + \left(\frac{\cos P}{M} \right)^2 \right]} \quad (16)$$

Отсюда следует [4]

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2 + 2\delta \sin P \cos x_0 + \cos^2 x_0},$$

где $\delta = d/M$.

В [4] показано, что это значение x_1 при $x_1^2 \ll \sqrt{2}$ можно аппроксимировать величиной

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2 + 2\delta \sin P + 1}, \quad (17)$$

В случае системы первого порядка, когда $P=0$, $M=1$, полагая $\cos x_0 = \sqrt{1-\beta^2}$, получим

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{d^2 + 1 - \beta^2}.$$

Таким образом, формула (17) здесь справедлива при $\beta=0$ и в том случае, если выполнено условие (9)

Кривые $x_1 = f(d, \beta)$ при $\varepsilon = \text{const}$, приведены на рис. 1. Кривые 1,4 – получены при $\varepsilon=0.9$; 2,5 при $\varepsilon=0.6$; 3,6 при $\varepsilon=0.3$. При $d \gg 1$ получим асимптотическую формулу $x_1 \approx \varepsilon/d$ (на рис. 1 штриховые линии)

Нетрудно убедиться, что формула (17) здесь справедлива при любом фильтре (при $P \neq 0$; $M \neq 1$), если положить $\cos x_0 = \sqrt{1-\beta^2}$ и взять $\beta=0$.

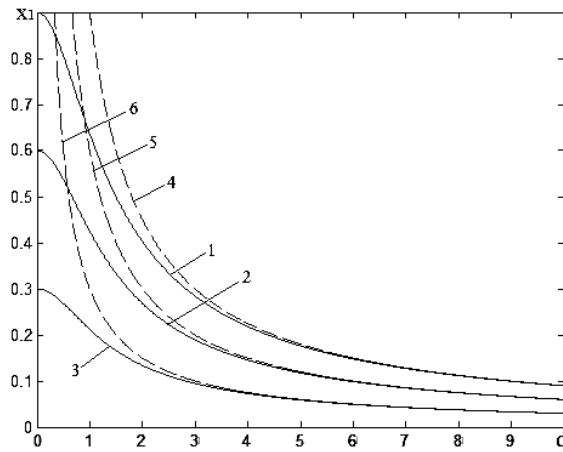


Рисунок 1

При использовании в качестве фильтра низкой частоты (ФНЧ) интегрирующей цепи, имеем

$$M^{-1} = \left(1 + d^2 / \alpha_0^4\right)^{1/2}; \quad P = -\arctg(d\alpha_0^{-2}); \quad \sin P = -d\alpha_0^{-2}M,$$

где $\alpha_0^{-2} = \Omega \tau_\phi$, τ_ϕ - постоянная времени ФНЧ.

В таком случае по (17) находим $\delta^2 = d^2(1 + d^2\alpha_0^{-4})$,

$$\frac{\varepsilon^2}{x_1^2} = d^2 \left(1 + d^2\alpha_0^{-4} - 2\alpha_0^{-2} + \frac{1}{d^2}\right).$$

При $d \gg 1$, $\alpha \ll 1$ $x_1 \approx \left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \left(\frac{\alpha_0^2}{d}\right)$ Следовательно, при этом графики зависимости

$x_1 = f(d)$ располагаются ниже кривых системы первого порядка. Заметим, что полоса захвата ФАП при отсутствии помехи при малых α_0 имеет вид $\beta_k = (4/\pi)\alpha_0$

Для дальнейших исследований необходимо найти выражения для функции $\sin P$ и $\cos P$.

По (13) получим

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + P) &= \frac{\Delta_0 x_1}{\varepsilon d M J_0(x_1)} \sin \psi - \frac{M}{d} \left[\frac{2}{x_1} J_1(x_1) \right] \cos^2 x_0 = B_1; \\ \cos(x_0 + P) &= \frac{\Delta_0 x_1}{\varepsilon d M J_0(x_1)} \cos \psi + 0,5 \frac{M}{d} \left[\frac{2}{x_1} J_1(x_1) \right] \sin 2x_0 = A_1. \end{aligned}$$

Полагая $\cos x_0 = a$; $\sin x_0 = b$; $\cos P = x$; $\sin P = y$, решим систему уравнений

$$ax - by = A_1; \quad bx + ay = B_1.$$

В результате получим

$$\cos P = x = aA_1 + B_1b = \frac{\Delta_0 x_1}{\varepsilon d M J_0(x_1)} \cos(\psi - x_0). \quad (18)$$

$$\sin P = (ax + A_1)/\sin x_0 = \frac{\Delta_0 x_1}{\varepsilon d M J_0(x_1)} \sin(\psi - x_0) - \frac{M}{d} \left(\frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) \cos x_0 \quad (19)$$

Подставим значения $\cos P$ и $\sin P$ в формулу для Δ_0 . В результате находим:

$$\begin{aligned} \Delta_0 = d^2 \left[\frac{M \cos x_0}{d} \frac{2}{x_1} J_1(x_1) + \frac{\Delta_0 x_1}{\varepsilon d M J_0(x_1)} \sin(\psi - x_0) - \frac{M}{d} \frac{2}{x_1} J_1(x_1) \cos x_0 \right]^2 + \\ + d^2 \frac{\Delta_0^2 x_1^2}{(\varepsilon d M)^2 J_0^2(x_1)} \cos^2(\psi - x_0) = d^2 \frac{\Delta_0^2 x_1^2}{(\varepsilon d M)^2 J_0^2(x_1)} = \Delta_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta_0 = \frac{(\varepsilon M)^2 J_0^2(x_1)}{x_1^2}. \quad (20)$$

Подставляя это значение Δ_0 в (18) и (19), окончательно приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} dx_1 \cos P &= \varepsilon M J_0(x_1) \cos(\psi - x_0), \\ dx_1 \sin P &= \varepsilon M J_0(x_1) \sin(\psi - x_0) - 2 M J_1(x_1) \cos x_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Найдем значение $\sin x_0$, используя (8) и выражая $\cos(x_0 - \psi)$ из (20). В результате получим

$$\sin x_0 = \frac{\beta}{M_0 J_0(x_1)} - \frac{dx_1 J_1(x_1)}{M J_0^2(x_1)} \cos P \quad (22)$$

Отсюда при условиях (9) приходим к [7, ф-ла (12.24)]

$$\sin x_0 = \frac{\beta}{M_0} - \frac{dx_1^2}{2M} \cos P \quad (23)$$

На рис. 2а изображены зависимости $x_0 = f(d)$, при $\varepsilon=0.6$, $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$, где кривые 1,4 получены при $\beta=0.8$; 2,5 – $\beta=0.5$; 3,6 – $\beta=0.2$; Кривые 1, 2, 3 – при невырожденном фильтре, 4, 5, 6 – при вырожденном. На рис. 2б изображены зависимости $x_0 = f(d)$, при $\beta=0.5$, $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$, где кривые 1,2 получены при $\varepsilon=0.9$; 3,4 – $\varepsilon=0.6$; 5,6 – $\varepsilon=0.3$; Кривые 1, 3, 5 – при невырожденном фильтре, 2, 4, 6 – при вырожденном. На рис. 3а изображены зависимости $x_1 = f(d)$, при $\varepsilon=0.6$, $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$, где кривые 1,2

получены при $\beta=0.8$; 3,4 – $\beta=0.5$; 5,6 – $\beta=0.2$. На рис. 3б изображены зависимости $x_1 = f(d)$, при $\beta=0.5$, $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$, где кривые 1,2 получены при $\varepsilon=0.9$; 3,4 – $\varepsilon=0.6$; 5,6 – $\varepsilon=0.3$. На рисунках 3а,б кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре, 2, 4, 6 – при вырожденном.

По (21) находим

$$\sin(\psi - x_0) = \frac{dx_1 \sin P}{\varepsilon M J_0(x_1)} + \frac{2J_1(x_1)}{\varepsilon J_0(x_1)} \cos x_0 = \frac{1}{\varepsilon J_0(x_1)} \left(\frac{dx_1}{M} \sin P + 2J_1(x_1) \cos x_0 \right) = G \quad (24)$$

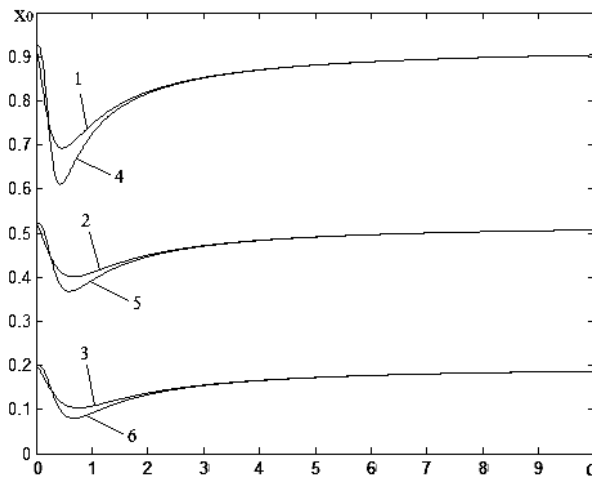


Рисунок 2а

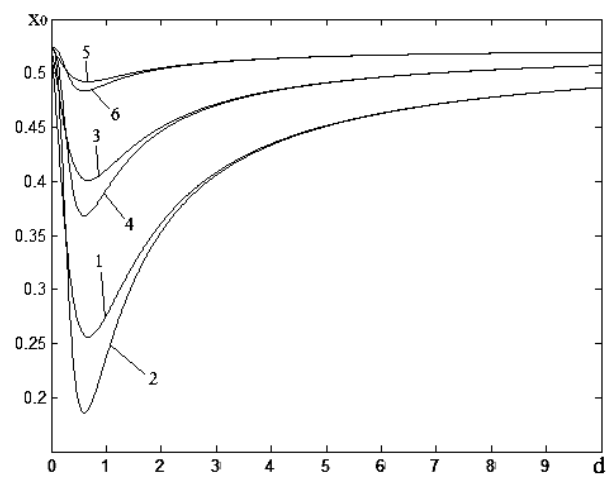


Рисунок 2б

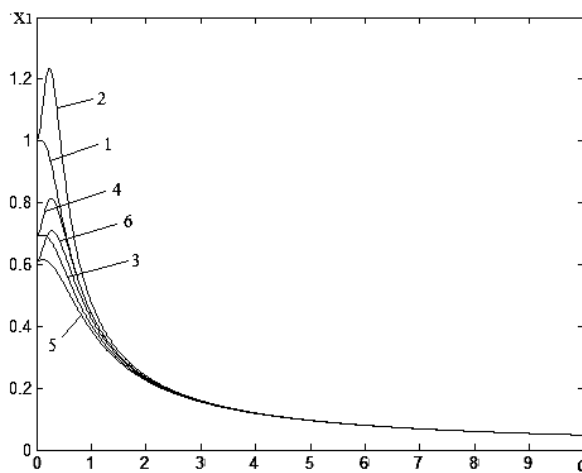


Рисунок 3а

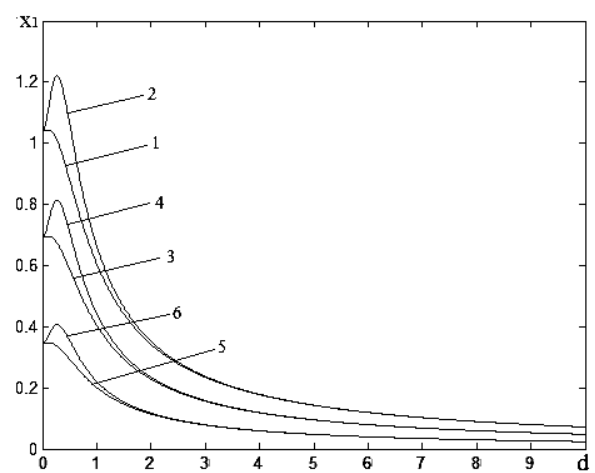


Рисунок 3б

Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 = x_0 + \varphi & \text{при } d > 0; \\ \psi &= \psi_2 = x_0 + \varphi - \pi & \text{при } d < 0; \end{aligned} \quad (25)$$

где $\varphi = \arcsin G$

Действительно, $\cos(\psi - x_0) = \pm \cos \varphi$, причем плюс при $d > 0$, минус при $d < 0$, так как $\cos P > 0$ и $\cos \varphi = \sqrt{1 - G^2}$

Зависимости $\psi = f(d)$ изображены на рис. 4, при $\varepsilon = 0.6$ $a = 0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$, где кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре; 2, 4, 6 – при вырожденном. Кривые 1, 2 получены при $\beta = 0.8$; 3, 4 – $\beta = 0.5$; 5, 6 – $\beta = 0.2$.

Поэтому по (20) находим

$$(dx_1, \cos P)^2 = \varepsilon^2 M^2 J_0^2(x_1) \cos^2 \varphi = \varepsilon^2 M^2 J_0^2(x_1) (1 - G^2),$$

Отсюда получим

$$A^2 = \left[\frac{dx_1 \cos P}{MJ_0(x_1)} \right]^2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^2 G^2 = \varepsilon^2 - \frac{1}{J_0^2(x_1)} \left(\frac{dx_1 \sin P}{M} + 2J_1(x_1) \cos x_0 \right)^2 = \varepsilon^2 - B^2.$$

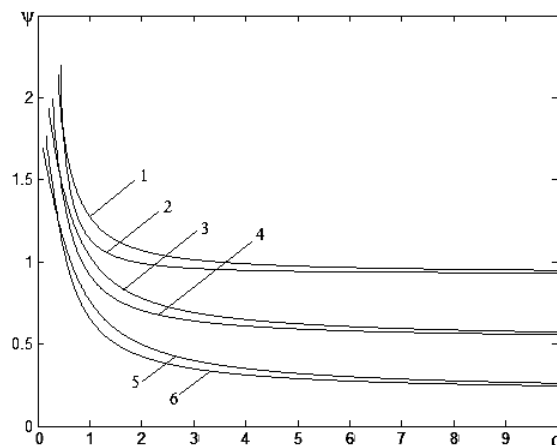


Рисунок 4

Тогда

$$\varepsilon^2 = A^2 + B^2. \quad (26)$$

Тогда используя равенство (20), по (13) находим

$$\cos \psi = \gamma F_1; \quad \sin \psi = \gamma F_2; \quad (27)$$

где $\gamma = \frac{x_1}{\varepsilon M J_0(x_1)}$;

$$F_1 = d \cos(P + x_0) + \frac{M}{x_1} J_1(x_1) \sin 2x_0; \quad F_2 = d \sin(P + x_0) + \frac{2M}{x_1} J_1(x_1) \cos^2 x_0;$$

Найдем приближенные значения параметров колебаний x_0 , x_1 , ψ

По (16) при $d \gg 1$ следует

$$x_1 \approx \frac{\varepsilon M}{|d|} J_0(x_1). \quad (28)$$

Отсюда при $J_0(x_1)=1$ получим [7, ф-ле (12.25)]

Поскольку $x_1 J_1(x_1) \sim x_1^2 \sim 1/d^2$, то по (21) находим приближенную формулу

$$\sin x_0 = \frac{\beta}{M_0}. \quad (29)$$

При малых x_1 (при больших помеховых расстройках $d \gg 1$), когда $J_1(x_1) \approx x_1/2$ по (24) получим $G \approx \frac{x_1}{\varepsilon} \left(\frac{d}{M} \sin P + \cos x_0 \right)$. Отсюда при $d \gg 1$ с учетом значения x_1 по (27) находим $G \approx \sin P$ и $\varphi = P$; $\psi_1 \approx x_0 + P$ [7, ф-ла (12.27)].

Таким образом, получены соотношения для всех трех параметров x_0 , x_1 , ψ , предполагаемого решения.

2. Критические значения параметров

Найдем критические значения первой гармоники $x_1 = x_{1k}$ и отношения помеха/сигнал $\varepsilon = \varepsilon_k$, которые определяют условия срыва синхронизации:

$$\sin x_0 = \pm 1; \quad \cos x_0 = 0. \quad (30)$$

При учете второго условия по (16) находим $x_{1k}^2 = \varepsilon_k^2 M^2 / d^2$. Отсюда следует

$$\varepsilon_k^2 = x_{1k}^2 d^2 / M^2. \quad (31)$$

При учете первого равенства в (29) находим

$$x_{1k}^2 = \left(\frac{\gamma}{M_0} \mp 1 \right) \frac{2M}{d \cos P}. \quad (32)$$

Подставляя это значение x_{1k}^2 в (30) окончательно получим

$$\varepsilon_k^2 = \frac{2d}{M \cos P} \left(\frac{\gamma}{M_0} \mp 1 \right) = \frac{2d}{M \cos P} \left(\frac{\gamma}{M_0} + \operatorname{sgn} d \right). \quad (33)$$

Зависимость $\varepsilon_k^2 = f(d)$ при $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$ изображена на рис. 5, где кривая 1 получена при ФАП 1-го порядка и $\beta=0$; кривая 2 при невырожденном и вырожденном фильтре и $\beta=0$; 3 – ФАП 1-го порядка $\beta=0.8$; 4 - невырожденный и вырожденный фильтр и $\beta=0.8$;

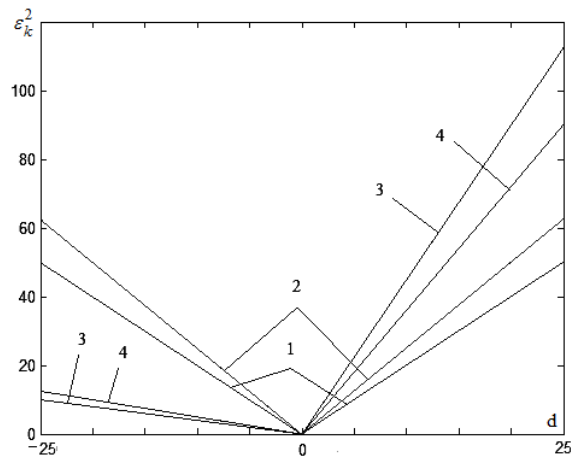


Рисунок 5

По рис. 5 замечаем что при $\beta > 0$ и $d > 0$ помехоустойчивость ФАП выше, чем $\beta > 0$, а $d < 0$.

Можно показать, что условиями захвата за сигнал при действии гармонической помехи является [5]

$$|\beta + \varepsilon| \leq 1; \quad |\varepsilon - \beta| \leq 1,$$

или

$$-(1 + \varepsilon) < \beta < 1 - \varepsilon; \quad \varepsilon - 1 < \beta < 1 + \varepsilon.$$

С другой стороны по [9] находим

$$\varepsilon \leq 1 - |\beta|; \quad \varepsilon \geq 1 + |\beta|,$$

или

$$\varepsilon - 1 \leq \beta \leq 1 - \varepsilon; \quad 1 - \varepsilon \leq \beta \leq \varepsilon - 1.$$

Причем во втором случае границы захвата по сигналу совпадают с [8] несмотря на то что получены [5,8] и [9] на основе разных критериев.

Достаточным условием захвата за помеху является условие [5]

$$\left| \frac{\beta_n}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{\beta_n}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right| \leq 1,$$

или

$$-(1 + \varepsilon) \leq \beta_n \leq \varepsilon - 1; \quad 1 - \varepsilon \leq \beta_n \leq \varepsilon + 1.$$

Причем левая граница во втором случае совпадает с [8].

Заключение

Таким образом, в более строгом приближении, чем в [7] получены динамические характеристики фазовой автоподстройки при наличии на ее входе гармонической помехи. Найдены зависимости параметров предполагаемого решения ДУ от параметров помехи и сигнала. Приведены соотношения для критических значений этих параметров.

Приложение

Амплитудночастотные и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) фильтров низкой частоты (ФНЧ) ФАП.

Пропорционально интегрирующий фильтр (ПИФ)

$$F(d) = \frac{1 + i\omega\tau_2}{1 + i\omega\tau_1} = \frac{1 + i\omega a\tau_1}{1 + i\omega\tau_1} \Big|_{d=\omega/\Omega} = \frac{1 + ida\alpha_0^{-2}}{1 + id\alpha_0^{-2}}, \quad \alpha_0^{-2} = \Omega\tau_1.$$

$$\text{АЧХ} \quad M = |F(d)| = \sqrt{\frac{1 + a^2 d^2 \alpha_0^{-4}}{1 + d^2 \alpha_0^{-4}}}$$

$$\text{ФЧХ} \quad P = \arg(1 + ida\alpha_0^{-2}) - \arg(1 + id\alpha_0^{-2}) = \arctg(da\alpha_0^{-2}) - \arctg(d\alpha_0^{-2})$$

Вырожденный ПИФ

$$F(d) = \frac{1 + ida\alpha_0^{-2}}{id\alpha_0^{-2}} = a + \frac{1}{id\alpha_0^{-2}} = a - i \frac{1}{d\alpha_0^{-2}}.$$

$$\text{АЧХ} \quad M = |F(d)| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{d\alpha_0^{-2}}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\alpha_0^2}{d}\right)^2}$$

$$\text{ФЧХ} \quad P = \arg\left(a - i \frac{1}{d\alpha_0^{-2}}\right) = \arctg\left(\frac{1}{d\alpha_0^{-2}}\right).$$

Данные характеристики используются при построении рисунков в статье.

Литература

1. Журавлев А.Г. Работа системы фазовой автоподстройки частоты при гармонических помехах // Радиотехника. 1963. т. 18, №9, С. 38-46.
2. Bruno F. Tracking performance and loss of lock of a carrier loop due to the presence of a spoofed spread spectrum signal // Proceedings of the 1973 symposium on spread spectrum communications, v.1 San Diego, California, 1973, March, pp 71-75

3. Blanchard A. Interference in phase – locked loops // IEEE Trans. On aerospace and electronic systems, 1974, v. AE S-10, N 5, p. 686-697
4. Levitt B.K. Carrier tracking loop performance in the presence of a strong CW interference// IEEE Trans. on communications, 1981, v. COM -29, N6, p 911-916
5. Nakagawa M. Effects of interfering signals in phase-locked loops // Frequenz, 1978, v. 32, №5, P. 146-153.
6. Быховский М.А. Влияние помехи на процессы захвата в системе фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника и электроника. 1987. №10 С. 2131-2141
7. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. – 488 с.
8. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации методом усреднения. – М.: Радио и связь, 1999.-496с.
9. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked performance // IEEE Trans., 2000, v. COM-48, № 5, p. 886-896
10. Шахтарин Б.И., Иванов А.А., Кобылкина П.И. и др. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации. – М.: Гелиос АРВ, 2007. – 256 с.
11. Шахтарин Б.И., Асланов Т.Г. Сравнительный анализ характеристик воздействия помех на системы синхронизации // Телекоммуникационные системы и технологии: 4-ый Межд. радиоэлек. форум. Украина, Харьков, 2011 С. 187-190.
12. Шахтарин Б.И., Асланов Т.Г. Анализ систем синхронизации численными методами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение 2011. - №4

Analysis of phase locked loop in the presence of harmonic interference

77-30569/297921

01, January 2012

Shakhtarin B.I

Bauman Moscow State Technical University

shakhtarin@mail.ru

Dynamic characteristic of phase locked loop in the presence of harmonic interference at its entrance along with desired signal were considered; this interference was out of PLL synchronization band. Critical values of parameters of system and interference were obtained with harmonic balance method.

Publications with keywords: [noise](#), [error performance](#), [method of harmonic balance](#)

Publications with words: [noise](#), [error performance](#), [method of harmonic balance](#)

Reference

1. Zhuravlev A.G., Operation of the system of phase-locked loop frequency at the harmonic interference, Radiotekhnika 18 (9) (1963) 38-46.
2. Bruno F., Tracking performance and loss of lock of a carrier loop due to the presence of a spoofed spread spectrum signal, in: Proceedings of the 1973 symposium on spread spectrum communications, V.1, San Diego, California, March, 1973, pp. 71-75.
3. Blanchard A., Interference in phase – locked loops, IEEE Trans. on aerospace and electronic systems AE S-10 (5) (1974) 686-697.
4. Levitt B.K., Carrier tracking loop performance in the presence of a strong CW interference, IEEE Trans. on communications COM -29 (6) (1981) 911-916.
5. Nakagawa M., Effects of interfering signals in phase-locked loops, Frequenz 32 (5) (1978) 146-153.
6. Bykhovskii M.A., Effect of interference on processes of capture in the system of phase automatic frequency, Radiotekhnika i elektronika 10 (1987) 2131-2141.
7. Shakhtarin B.I., Statistical dynamics of synchronization systems, Moscow, Radio i sviaz', 1998, 488 p.
8. Shakhtarin B.I., Analysis of the systems of synchronization by method of averaging, Moscow, Radio i sviaz', 1999, 496 p.

9. Karsi M.F., Lindsey W.C., Effects of CW interference on phase-locked performance, IEEE Trans. COM-48 (5) (2000) 886-896.
10. Shakhtarin B.I., Ivanov A.A., Kobylkina P.I., et al., Synchronization in the radio communication and radio navigation, Moscow, Gelios ARV, 2007, 256 p.
11. Shakhtarin B.I., Aslanov T.G., Comparative analysis of the characteristics of the impact of interference on synchronization system, in: Proc. of the 4th International radio-electronic forum on Telecommunication systems and technologies, Ukraina, Khar'kov, 201, pp. 187-190.
12. Shakhtarin B.I., Aslanov T.G., Analysis of the synchronization systems by numerical methods, Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostroenie - Bulletin of BMSTU. Ser. Instrument making 4 (2011).