электронное научно-техническое издание

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Модель оценивания результатов диагностирования учебных достижений

77-48211/286116

 # 04, апрель 2012

Власова Е.А., Ирьянов Н.Я.

УДК 378.1

МГТУ им. Н.Э. Баумана

elena.a.vlasova@yandex.ru

1. Введение

В современных образовательных технологиях используется широкий спектр методических средств и форм педагогической диагностики. Для получения диагностической информации активно применяется тестовый контроль. Тест рассматривается как совокупность специально подобранных заданий, с установленной полнотой отражающих ту область знаний, уровень достижений в которой оценивается.

В настоящее время разрабатываются в основном стохастические модели [1] оценивания результатов тестирований, проводимых в форме выбора одного из предлагаемых вариантов ответов, что предполагает оценку решений заданий теста первичными тестовыми баллами в двоичной шкале $Ш_1 = \{0, 1\}$.

В данной работе предлагается основанная на идее работы [2] простая алгебраическая модель оценивания результатов тестирований, проводимых в форме традиционного письменного экзамена или олимпиады с подробным изложением решения каждой задачи. Эта модель предполагает оценку решений каждого из заданий теста первичными тестовыми баллами в традиционной дробной шкале $Ш_\ell = \left\{0,\ \frac{1}{\ell},\ \frac{2}{\ell},\ \ldots,\ \frac{\ell-1}{\ell},\ 1\right\}$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Оценки в дробной шкале обозначают степень (долю) решенности задания теста тестируемым. Например, выбор шкалы первичного оценивания $Ш_4 = \left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\}$ означает, что решения заданий теста первоначально оцениваются в категориях «задание не решено» (первичный балл 0), «задание решено на четверть» (первичный балл $\frac{1}{4}$), «задание решено на половину» (первичный балл $\frac{1}{2}$), «задание решено на три четверти» (первичный балл $\frac{3}{4}$), и «задание решено полностью» (первичный балл 1). При этом величина выставляемого за задание тестового балла зависит также еще и от выбранного общего масштаба (сертификационной балльности) оценивания результатов тестирования.

2. Модель оценивания

Введем обозначения: n — количество тестируемых, m — количество заданий теста, a_{ij} — оценка степени (доли) решенности j-го задания теста i-м тестируемым (в дробной шкале $Ш_\ell$), $A = (a_{ij})$ — $(n{\times}m)$-матрица результатов тестирования (матрица выставленных первичных баллов), $\overline{a}_{ij} = 1 - a_{ij}$ — степень нерешенности j-го задания i-м тестируемым, $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ — двойственная $(n{\times}m)$-матрица результатов тестирования (матрица ненабранных первичных баллов), $a^0_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} = 1, \\ 0, & a_{ij} < 1 \end{cases}$, $A_0 = (a^0_{ij})$ — $(n{\times}m)$-матрица результатов тестирования в двоичной шкале $Ш_1$ (индикатор полностью решенных заданий), $\boldsymbol{q}^{\downarrow} = (q_1, \ldots, q_m)^T$ — вектор-столбец трудностей заданий теста ($q_i \geq 0$, $i = \overline{1,\, n}$), $\boldsymbol{p}^{\downarrow} = (p_1, \ldots, p_n)^T$ — вектор-столбец уровней подготовленности (сертификационных баллов) тестируемых ($p_i \geq 0$, $i = \overline{1,\, n}$).

Модель основывается на следующих принципах оценивания результатов тестирования, проводимого в форме традиционного письменного экзамена или олимпиады.

Принцип 1. Трудности заданий теста являются эмпирически определяемыми характеристиками.

Принцип 2. Итоговый сертификационный балл, начисляемый тестируемому по результатам выполнения теста, складывается в *равных долях* из основного сертификационного балла (балла за широту знаний) и призового сертификационного балла (балла за глубину знаний): $\boldsymbol{p}^{\downarrow} = \boldsymbol{p}^{\downarrow}_1 + \boldsymbol{p}^{\downarrow}_0$. При этом равенство долей основного и призового сертификационных баллов означает равенство максимально возможных значений этих баллов. Отметим, что в общем случае можно и отойти от этого принципа, назначая разные доли для основного и призового сертификационных баллов, например, $\alpha > 0$ и $\alpha_1 > 0$ такие, что $\alpha + \alpha_1 = 1$.

Принцип 3. Основной сертификационный балл тестируемого пропорционален сумме набранных им первичных тестовых баллов с учетом трудностей заданий: $\boldsymbol{p}_1^{\downarrow} = \alpha \cdot A\boldsymbol{q}^{\downarrow}$, $\alpha > 0$;

Принцип 4. Трудность задания теста пропорциональна сумме ненабранных на этом задании первичных тестовых баллов с учетом основных сертификационных баллов тестируемых: $\boldsymbol{q}^{\downarrow} = \beta \cdot \overline{A}^T \boldsymbol{p}_1^{\downarrow}$, $\beta > 0$;

Принцип 5. Призовой сертификационный балл тестируемого пропорционален количеству полностью (чисто) решенных им заданий: $\boldsymbol{p}_0^{\downarrow} = \gamma \cdot A_0 \boldsymbol{e}^{\downarrow}$, $\gamma > 0$, где $\boldsymbol{e}^{\downarrow} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m})^T$.

Исходя из сформулированных принципов 3 и 4, получаем

$$\boldsymbol{q}^{\downarrow} = \beta \cdot \overline{A}^T \boldsymbol{p}_1^{\downarrow} = \beta \cdot \overline{A}^T \left(\alpha \cdot A\boldsymbol{q}^{\downarrow}\right) = \alpha\beta\big(\overline{A}^T A\big)\boldsymbol{q}^{\downarrow}, \quad \text{или} \quad B\boldsymbol{q}^{\downarrow} = \lambda \boldsymbol{q}^{\downarrow},$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\alpha\beta} > 0$, $B = \overline{A}^T A$ — квадратная матрица m-го порядка. Таким образом, вектор трудностей заданий теста $\boldsymbol{q}^{\downarrow}$ является неотрицательным правым собственным вектором матрицы $B = \overline{A}^T A$, соответствующим положительному собственному значению λ этой матрицы.

Приведем одну алгебраическую теорему [3], которая утверждает существование такого вектора для произвольной неотрицательной матрицы $B = \{b_{ij}\}$ ($b_{ij} \geq 0$, i, $j = \overline{1,\ m}$). Напомним, что квадратную матрицу B называют приводимой в том случае, если существует ортогональная матрица U, такая, что

$$U^T B U = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

где B_{11} и B_{22} — квадратные матрицы порядка меньше m. Иначе B называют неприводимой.

Теорема 1. Для любой неотрицательной неприводимой матрицы B:

(i) существует положительное собственное значение λ, равное спектральному радиусу этой матрицы, т.е. $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i| > 0$, где λ_i — собственные значения матрицы B, а k — их количество;

(ii) для собственного значения λ существует положительный правый собственный вектор $\boldsymbol{q}^{\downarrow} = (q_1, \ldots, q_m)^T$ ($q_i > 0$, $i = \overline{1, n}$);

(iii) кратность собственного значения λ равна 1.

Отметим, что при проведении массовых тестирований (при большом количестве тестируемых $n \gg 1$) вероятность того, что матрица $B = \overline{A}^T A$ окажется приводимой, практически равна нулю.

3. Процедура реализации модели оценивания

Шаг 1. Выбираем дробную шкалу $Ш_\ell = \left\{0, \frac{1}{\ell}, \frac{2}{\ell}, \ldots, \frac{\ell-1}{\ell}, 1\right\}$ (выбираем $\ell \in \mathbb{N}$) для оценивания решений заданий теста первичными баллами, и выбираем общий масштаб (сертификационную балльность) оценивания результатов тестирования (выбираем величину N — максимально возможное значение итогового сертификационного балла тестируемых).

Шаг 2. По $(n\times m)$-матрице $A = (a_{ij})$ результатов тестирования (матрице выставленных первичных тестовых баллов) вычисляем $(m\times m)$-матрицу $B = \overline{A}^T A$, и находим максимальное по модулю положительное собственное значение $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,\, k}} |\lambda_i| > 0$ матрицы B и какой-либо ее неотрицательный правый собственный вектор $\boldsymbol{q}^{\downarrow} \neq \boldsymbol{0}^{\downarrow}$, $q_i \geq 0$, $i = \overline{1,\, n}$, соответствующий этому собственному значению:

$$B\boldsymbol{q}^{\downarrow} = \lambda \boldsymbol{q}^{\downarrow}.$$

Поскольку подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i| > 0$ с вероятностью единица одномерно (см. теорему выше), то вектор трудностей заданий теста $\boldsymbol{q}^{\downarrow}$ определен с точностью до постоянного множителя, или с точностью до нормы $\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\| = q_1 + q_2 + \ldots + q_m$. Для единообразия вектор трудностей заданий теста определяем в N–балльном масштабе

$$\boldsymbol{q}^{\downarrow}(N) = \frac{\boldsymbol{q}^{\downarrow}}{\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\|} \cdot N = \frac{\boldsymbol{q}^{\downarrow}}{q_1 + q_2 + \ldots + q_m} \cdot N,$$

при котором норма $\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}(N)\|$ вектора $\boldsymbol{q}^{\downarrow}(N)$ равна N. В частности, при выбранном 120-балльном масштабе формула принимает вид:

$$\boldsymbol{q}^{\downarrow}(120) = \frac{\boldsymbol{q}^{\downarrow}}{\sum\limits_{i=1}^{m} q_i} \cdot 120, \qquad \|\boldsymbol{q}^{\downarrow}(120)\| = 120.$$

Шаг 3. По формуле (принцип 3)

$$\boldsymbol{p}_1^{\downarrow} = \frac{1}{2}\cdot A\boldsymbol{q}^{\downarrow}(N) = \frac{N}{2\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\|}A\boldsymbol{q}^{\downarrow}$$

вычисляем вектор основных сертификационных баллов (баллов за широту знаний) тестируемых (здесь в силу принципа 2 положено $\alpha = 1/2$).

Шаг 4. По $(n\times m)$-матрице $A_0 = (a_{ij}^0)$ результатов тестирования в двоичной шкале $Ш_1$ (матрице индикаторов полностью решенных заданий) по формуле (принцип 5)

$$\boldsymbol{p}_0^{\downarrow} = \frac{1}{2}\cdot A_0\boldsymbol{e}^{\downarrow}(N) = \frac{N}{2\|\boldsymbol{e}^{\downarrow}\|}A_0\boldsymbol{e}^{\downarrow}$$

вычисляем вектор призовых сертификационных баллов (баллов за глубину знаний) тестируемых. При этом здесь в силу принципа 2 положено $\gamma = 1/2$, а m-мерный единичный вектор $\boldsymbol{e}^{\downarrow} = (1,1,\ldots,1)^T$ пронормирован так, чтобы его норма была также равной N:

$$\boldsymbol{e}^{\downarrow}(N) = \frac{\boldsymbol{e}^{\downarrow}}{\|\boldsymbol{e}^{\downarrow}\|}\cdot N = \frac{\boldsymbol{e}^{\downarrow}}{m}\cdot N, \quad \|\boldsymbol{e}^{\downarrow}(N)\| = N.$$

Шаг 5. По формуле (принцип 2)

$$\boldsymbol{p}^{\downarrow} = \boldsymbol{p}_1^{\downarrow} + \boldsymbol{p}_0^{\downarrow} = \frac{N}{2\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\|}A\boldsymbol{q}^{\downarrow} + \frac{N}{2m}A_0\boldsymbol{e}^{\downarrow}$$

вычисляем вектор-столбец итоговых сертификационных баллов тестируемых в N-балльном масштабе. В частности, для формирования итоговых сертификационых баллов в 120-балльном масштабе получаем следующую формулу:

$$\boldsymbol{p}^{\downarrow} = \frac{60}{\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\|}A\boldsymbol{q}^{\downarrow} + \frac{60}{m}A_0\boldsymbol{e}^{\downarrow},$$

где $\boldsymbol{q}^{\downarrow}$ — произвольный неотрицательный правый собственный вектор неотрицательной $(m\times m)$-матрицы $B = \overline{A}^T A$, соответствующий максимальному по модулю положительному собственному значению матрицы B, $\|\boldsymbol{q}^{\downarrow}\| = \overrightarrow{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{q}^{\downarrow} = q_1+\ldots+q_m$ — норма вектора $\boldsymbol{q}^{\downarrow}$, $\boldsymbol{e}^{\downarrow} = (1,1,\ldots,1)^T$ — единичный m-мерный вектор.

4. Пример оценивания результатов тестирования с использованием описаной модели

Рассмотрим пример применения описанной модели для оценивания результатов тестирования, проведенного в форме традиционного письменного экзамена, при следующих исходных данных:

1) число тестируемых $n = 20$;

2) количество заданий теста $m = 7$;

3) масштаб (сертификационная балльность) оценок $N = 120$;

4) шкала $Ш_4 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ для оценивания решений заданий теста первичными баллами;

5) сводная таблица первичных тестовых баллов, выставленных тестируемым в шкале $Ш_4$ (табл. 1).

Таблица 1

Фамилия тестируемого	Порядковый номер	Начисленные первичные баллы						
Алексеев	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1
Борисов	$\boxed{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0
Васильев	$\boxed{3}$	1	1	0	0	0	0	0
Гаврилов	$\boxed{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
Дмитриев	$\boxed{5}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
Евлампиев	$\boxed{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	1	0	0	0
Жоров	$\boxed{7}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	1
Романов	$\boxed{8}$	1	1	1	1	1	1	1
Захаров	$\boxed{9}$	1	1	1	1	0	0	0
Иванов	$\boxed{10}$	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
Леонидов	$\boxed{11}$	1	$\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
Михайлов	$\boxed{12}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{4}$	0
Николаев	$\boxed{13}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Петров	$\boxed{14}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
Тимофеев	$\boxed{15}$	1	$\frac{3}{4}$	1	1	1	$\frac{3}{4}$	0
Федоров	$\boxed{16}$	1	1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
Харитонов	$\boxed{17}$	1	1	1	1	1	1	0
Юрин	$\boxed{18}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Яковлев	$\boxed{19}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
Сидоров	$\boxed{20}$	0	0	0	0	0	0	0

Табл. 1 соответствует следующая матрица A первичных тестовых баллов тестируемых (ради экономии места матрица записана в транспонированной форме A^T):

$$A^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} & \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} & \boxed{13} & \boxed{14} & \boxed{15} & \boxed{16} & \boxed{17} & \boxed{18} & \boxed{19} & \boxed{20} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 1 & 0.75 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.75 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0.75 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.75 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.75 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0.75 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Для большей наглядности над столбцами матрицы A^T, содержащими первичные баллы тестируемых, указаны присвоенные тестируемым порядковые номера.

На основе этих данных с использованием вычислительного пакета Maple получены следующие результаты:

a) основная матрица B:

$$B = \overline{A}^T A = \begin{pmatrix} 1.1875 & 1.9375 & 1.50 & 0.75 & 0.50 & 1.25 & 1.75 \\ 1.4375 & 1.0625 & 1.00 & 1.00 & 0.875 & 1.50 & 2.25 \\ 2.75 & 2.75 & 0.75 & 0.75 & 1.00 & 1.25 & 2.25 \\ 3.50 & 4.25 & 2.25 & 1.00 & 1.00 & 1.25 & 2.25 \\ 6.75 & 7.625 & 6.00 & 4.50 & 1.625 & 1.375 & 2.00 \\ 10.00 & 10.75 & 8.75 & 7.25 & 3.875 & 1.50 & 1.50 \\ 12.50 & 13.50 & 11.75 & 10.25 & 6.50 & 3.50 & 0.50 \end{pmatrix};$$

b) собственные значения матрицы B:

$$\lambda_1 = 19.607, \quad \lambda_2 = -6.221, \quad \lambda_3 = -2.961, \quad \lambda_4 = -1.340,$$
$$\lambda_5 = -0.377, \quad \lambda_6 = -0.894, \quad \lambda_7 = -0.186.$$

Кратность всех собственных значений равна единице;

c) максимальное по модулю положительное собственное значение

$$\lambda = \lambda_1 = 19.607,$$

которому соответствует положительный собственный вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = (0.198,\ 0.232,\ 0.249,\ 0.297,\ 0.474,\ 0.677,\ 0.971).$$

Этот вектор является эмпирически определенным вектором трудностей заданий теста (он определяется с точностью до постоянного множителя). В частности, если трудность первого задания теста принять равной единице, а соответствующие относительные трудности других заданий округлить до целых значений, то получаем следующий вектор приведенных трудностей заданий теста, определенных эмпирическим путем:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{q}}_{\text{привед}} = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 5).$$

Этот вектор показывает, что первые три задания теста оказались для тестируемых примерно одинаковыми по трудности, а остальные задания в соответствующее число раз более трудными.

Наконец, вектор трудностей заданий теста $\overrightarrow{\boldsymbol{q}}$, пронормированный так, чтобы его норма (сумма координат) стала равной $N = 120$, принимает вид:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{q}}(N) = (7.662,\ 8.994,\ 9.668,\ 11.503,\ 18.377,\ 26.193,\ 37.593);$$

d) вектор основных сертификационных баллов (баллов за проявленную широту знаний) вычислен в соответствии с формулой $\boldsymbol{p}_1^{\downarrow} = \frac{1}{2} \cdot A\boldsymbol{q}^{\downarrow}(N)$ и равен:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1 = (&20.712,\ 11.247,\ 8.328,\ 14.123,\ 18.216,\ 16.832,\ 34.193,\\ &60.000,\ 18.915,\ 26.784,\ 25.660,\ 31.378,\ 30.000,\ 2.248,\\ &36.804,\ 32.356,\ 41.203,\ 44.052,\ 18.216,\ 0.000);\end{aligned}$$

e) вектор призовых сертификационных баллов (баллов за проявленную глубину знаний) вычислен в соответствии с формулой $\boldsymbol{p}_0^{\downarrow} = \frac{1}{2} \cdot A_0\boldsymbol{e}^{\downarrow}(N)$ и равен:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = (&8.571,\ 17.142,\ 17.142,\ 17.142,\ 17.142,\ 17.142,\ 17.142,\\ &60.000,\ 34.285,\ 34.285,\ 25.714,\ 42.857,\ 0.000,\ 0.000,\\ &34.285,\ 34.285,\ 51.428,\ 42.857,\ 17.142,\ 0.000);\end{aligned}$$

f) вектор итоговых сертификационных баллов (оценок уровней подготовленности) тестируемых вычислен по формуле $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ и равен:

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (&29.283,\ 28.390,\ 25.471,\ 31.266,\ 35.359,\ 33.975,\ 51.336,\\ &120.000,\ 53.200,\ 61.070,\ 51.374,\ 74.236,\ 30.000,\ 2.248,\\ &71.089,\ 66.642,\ 92.631,\ 86.909,\ 35.359,\ 0.000);\end{aligned}}$$

g) наконец, итоговый ранжированный (в соответствии с начисленными итоговыми сертификационными баллами) список участников тестирования выглядит следующим образом (табл. 2).

Таблица 2

Итоги тестирования

Ранг	Номер и фамилия тестируемого	Первичные баллы	Сертификационный балл
1	$\boxed{8}$ Романов	1 1 1 1 1 1 1	120.000
2	$\boxed{17}$ Харитонов	1 1 1 1 1 1 0	92.631
3	$\boxed{18}$ Юрин	1 1 1 1 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	86.909
4	$\boxed{12}$ Михайлов	1 1 1 1 1 $\frac{1}{4}$ 0	74.236
5	$\boxed{15}$ Тимофеев	1 $\frac{3}{4}$ 1 1 1 $\frac{3}{4}$ 0	71.089
6	$\boxed{16}$ Федоров	1 1 1 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ 0	66.642
7	$\boxed{10}$ Иванов	1 1 1 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0	61.070
8	$\boxed{9}$ Захаров	1 1 1 1 0 0 0	53.200
9	$\boxed{11}$ Леонидов	1 $\frac{3}{4}$ 1 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0	51.374
10	$\boxed{7}$ Жоров	0 0 0 0 $\frac{1}{4}$ 1 1	51.336
11–12	$\boxed{5}$ Дмитриев	1 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 0	35.359
11–12	$\boxed{19}$ Яковлев	1 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 0	35.359
13	$\boxed{6}$ Евлампиев	$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1 1 0 0 0	33.975
14	$\boxed{4}$ Гаврилов	$\frac{1}{2}$ 1 1 $\frac{1}{2}$ 0 0 0	31.266
15	$\boxed{13}$ Николаев	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	30.000
16	$\boxed{1}$ Алексеев	$\frac{1}{2}$ 0 0 0 0 0 1	29.283
17	$\boxed{2}$ Борисов	$\frac{1}{2}$ 1 1 0 0 0 0	28.390
18	$\boxed{3}$ Васильев	1 1 0 0 0 0 0	25.471
19	$\boxed{14}$ Петров	0 $\frac{1}{2}$ 0 0 0 0 0	2.248
20	$\boxed{20}$ Сидоров	0 0 0 0 0 0 0	0.000

5. Заключение

Достоинствами предложенной модели оценивания результатов тестирований, проводимых в форме традиционного письменного экзамена или олимпиады, являются ее простота, объективность оценки трудностей заданий теста, измерение уровней подготовленности учащихся как по широте знаний, так и по их глубине, а также возможность объективного ранжирования по уровню подготовленности тех участников тестирования, которые показывают трудно соизмеримые результаты. Так, в приведенном примере такие трудно соизмеримые результаты показали, например, Гаврилов (порядковый номер $\boxed{4}$), чисто решивший относительно простые вторую и третью задачи, но не решивший самые сложные последние три задачи; Алексеев (порядковый номер $\boxed{1}$), напротив безошибочно решивший самую сложную последнюю задачу, но не решивший остальные более простые задачи; и Николаев (порядковый номер $\boxed{13}$), решивший все задачи, но лишь наполовину. Применение описанной модели позволило оценить уровени подготовленности в том числе и этих участников тестирования (оценки оказались очень близкими и низкими, что следует признать правильным), и ранжировать их (см. итоговую таблицу).

Список литературы

1. Нейман Ю.М., Хлебников В.А. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. М.: Прометей, 2000. 169 с.
2. Янченко С.И. Математическая модель оценки результатов тестирования//Развитие системы тестирования в России: Тез. докл. 2-й Всерос. конф. Часть 4. М.: Прометей, 2000. С. 54 – 56
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421100025. ISSN 1994-0408

Model of estimation of the results of diagnosing learning outcomes

77-48211/286116

04, April 2012
E.A. Vlasova, N.J. Iryanov

Bauman Moscow State Technical University
elena.a.vlasova@yandex.ru

We suggest the algebraic model of estimation of results of testing conducted in the form of the traditional written examination or contest with the complete solution of each task required. In this model the solutions of the test tasks are evaluated by primary scores according to the traditional fractional scale. The advantages of the model are its' simplicity, objectivity in measurement of the task complexity, estimation of students' preparation level by breadth and depth of their knowledge, opportunity of the objective ranking of the level of those participants, who perform hardly comparable results.

References

1. Neiman Iu.M., Khlebnikov V.A., Introduction to the theory of modelling and parameterization of pedagogical tests, Moscow, Prometei, 2000, 169 p.
2. Ianchenko S.I., in: Proc. of the 2nd All-Russia Conference on Development of the system of testing in Russia, Moscow, Prometei, Part 4, 2000, pp. 54 56.
3. Lankaster P., The theory of matrices, Moscow, Nauka, 1978, 280 p.