

Обеспечение траекторной безопасности в задаче облета динамической круговой зоны

77-30569/280873

12, декабрь 2011

авторы: Воронов Е. М., Карпунин А. А.

УДК 517.977

МГТУ им. Н.Э. Баумана

emvoronov@mail.ruksans@yandex.ru

Пусть движение динамического управляемого объекта (ДУО) в мгновенной плоскости наведения описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -\frac{n_z \cdot u}{V}, \\ \dot{x}_g = V \cdot \cos \Psi, \\ \dot{z}_g = -V \cdot \sin \Psi, \end{cases} \quad (1)$$

где $V = \text{const} > 0$ — скорость ДУО,

x_g, z_g — координаты ДУО в нормальной земной системе координат $Ox_g Z_g$,

Ψ — угол поворота траектории (см. рис. 1),

n_z — максимальное значение нормальной перегрузки,

$u = u(t, \square)$ — управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$.

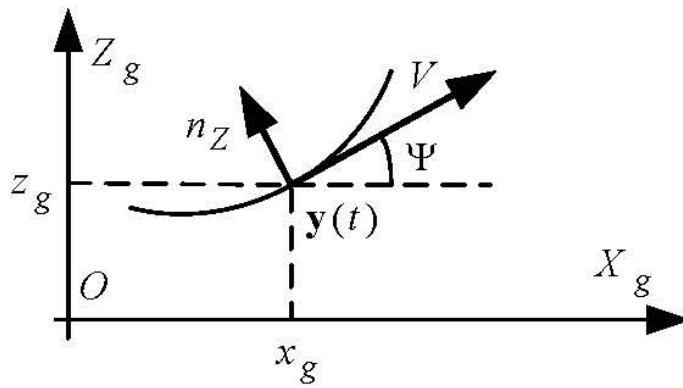


Рис. 1. Система координат

Система (1) часто используется при описании движения транспортного средства или самолета в горизонтальной плоскости.

На рис. 1 обозначено $\mathbf{y}(t) = (x_g, z_g)$ – вектор позиции системы (1), $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ — произвольное состояние системы (1) в момент времени t_0 .

Интегрированием системы дифференциальных уравнений (1) может быть найдено аналитическое решение при использовании следующих типов программных управлений:

$$1) \quad u(t) = \text{const} \neq 0.$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$t_0 = 0, x(t_0) = z(t_0) = \Psi(t_0) = 0. \quad (2)$$

Тогда аналитическое решение системы (1) при начальных условиях (2) имеет вид

$$\begin{cases} \Psi(t) = \int_0^t -\frac{n_z u}{V} dt = -\frac{n_z u}{V} t, \\ x_g(t) = \int_0^t V \cos \Psi(t) dt = \frac{V^2}{n_z u} \sin\left(\frac{n_z u}{V} t\right), \\ z_g(t) = \int_0^t -V \sin \Psi(t) dt = \frac{V^2}{n_z u} \left(1 - \cos\left(\frac{n_z u}{V} t\right)\right). \end{cases}$$

Последние два уравнения соответствуют следующей системе:

$$\begin{cases} x_g(t) = R \sin(at), \\ z_g(t) = R - R \cos(at), \end{cases} \quad (3)$$

$$R = \frac{V^2}{n_z u}, \quad a = \frac{n_z u}{V}. \quad (4)$$

Угол $\alpha = a \cdot \tau$, описываемый при движении по окружности разворота в течение времени τ , далее будем называть центральным углом разворота.

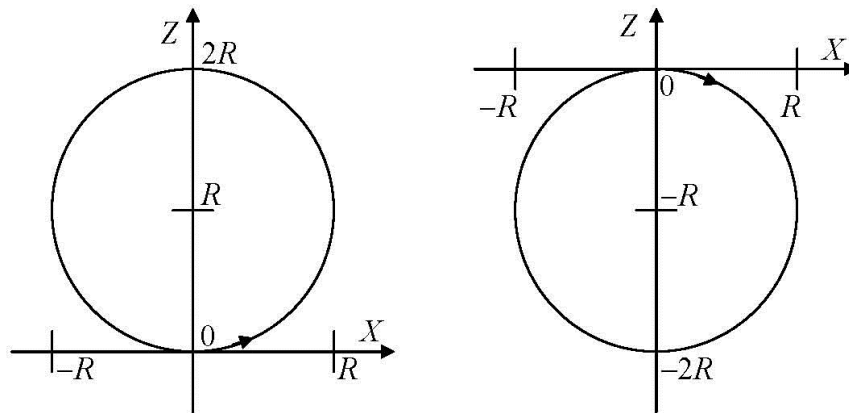


Рис. 2. Движение системы (1) при управлении $u = \text{const} \neq 0$.

2) $u(t) = \text{const} = 0$.

Пусть начальные условия имеют вид

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = z(t_0) = 0, \quad \Psi(t_0) = \Psi_0.$$

Тогда аналитическое решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \Psi(t) = \int_0^t -\frac{n_z u}{V} dt = \int_0^t 0 dt = \Psi_0 = \text{const}, \\ x_g(t) = \int_0^t V \cos \Psi dt = V \cdot t \cdot \cos \Psi_0, \\ z_g(t) = \int_0^t -V \sin \Psi_0 dt = -V \cdot t \cdot \sin \Psi_0 \end{cases}$$

Система уравнений (1) при управлении $u(t) = \text{const} = 0$ описывает прямолинейное движение с начальным углом к оси OX_g , равным Ψ_0 .

Таким образом, движение ДУО с динамикой (1) в классе кусочно-постоянных управлений представляет собой комбинацию прямолинейных участков и участков движения (3) по окружности, радиус которой R определяется уравнением (4).

Для описанного класса движений рассматривается задача обеспечения траекторной безопасности при наличии в плоскости, в которой движется ДУО, запрещенной зоны (ЗЗ), имеющей вид круга известного радиуса r .

При определении направлений движения, опасных с точки зрения возможности попадания в ЗЗ возможны следующие 2 варианта.

1) Радиус запрещенной зоны $r = 0$, тогда ЗЗ вырождается в запрещенную точку B . Необходимо определить центральный угол α , на который должен развернуться ДУО для того, чтобы вектор его скорости был ориентирован на эту точку.

Траектория движения ДУО будет состоять из двух участков: участка разворота по траектории максимальной кривизны до направления на точку B и прямолинейного участка движения. На рис. 3 представлена иллюстрация данной задачи. Траектория движения состоит из отрезка дуги OA траектории разворота максимальной кривизны, представляющей собой окружность радиуса R с центром в точке O_1 и прямолинейного участка движения AB , являющегося отрезком касательной к данной окружности, проходящей через точку B .

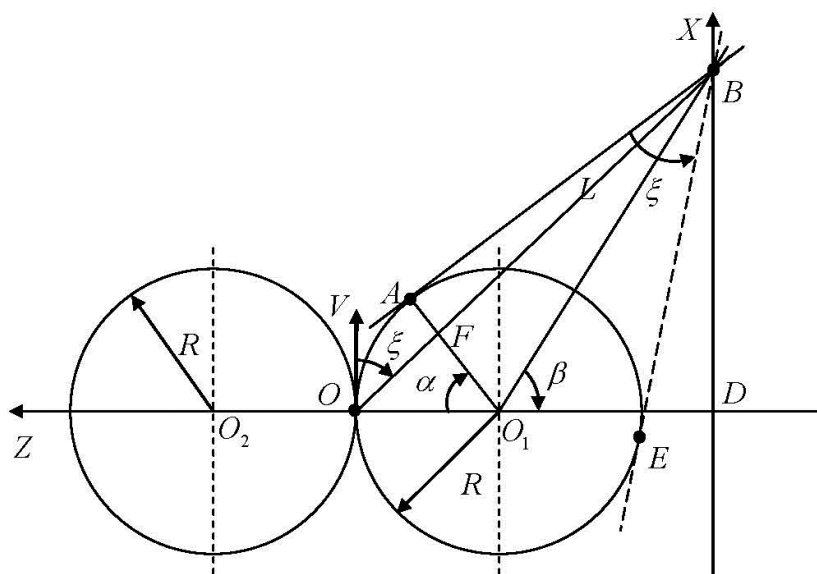


Рис. 3. Построение траектории движения ДУО

На рис. 3 введены следующие обозначения:

$\xi = \angle VOB$ — угол пеленга на точку B ;

$\alpha = \angle OO_1A$ — центральный угол разворота;

$\beta = \angle BO_1D$ — угол направления на точку B из центра O_1 окружности разворота;

L — расстояние от точки O до точки B .

Необходимо отметить, что для одной окружности можно провести две различные касательные, проходящие через заданную точку вне окружности. На рис. 3 это прямые AB и BE . Однако только касательная AB удовлетворяет направлению обхода траектории разворота максимальной кривизны – окружности радиуса R с центром в точке O_1 , поэтому касательная BE не рассматривается (на рис. 3 показана пунктиром).

Из рис. 3 величины углов соответственно равны

$$\beta = \arccos \frac{\|O_1D\|}{\|O_1B\|} = \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}, \quad (5)$$

$$\alpha = \pi - \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}} - \arccos \frac{R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}. \quad (6)$$

Утверждение 1. Центральный угол разворота до направления на произвольную запрещенную точку B определяется выражением (6).

2) Случай статичной круговой ЗЗ ненулевого радиуса $r > 0$.

Между двумя окружностями можно провести 4 различных касательных. Обозначим их через $l_1, \dots, l_4$ в направлении обхода по окружности. Лишь две из них будут удовлетворять направлению поворота ДУО по траектории предельной кривизны радиуса R . Иллюстрация данного утверждения приведена на рис. 4, где касательные l_1 и l_2 удовлетворяют направлению движения по траектории разворота (окружность с центром в точке O_1), а касательные l_3 и l_4 являются в данном случае траекториями, приводящими ДУО на круговую траекторию с центром в точке O_1 , а не уводящими с нее, таким образом, их можно не рассматривать.

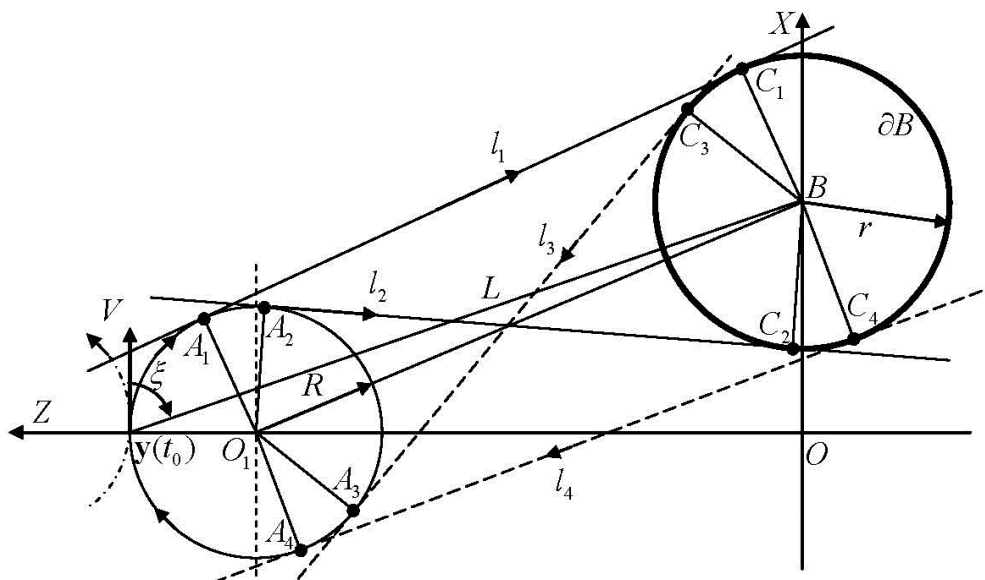


Рис. 4. Касательные к траектории предельной кривизны ДУО и ЗЗ

Таким образом, имеется две касательные, проходящие через окружность траекторию разворота максимальной кривизны. Точки касания этой окружности A_1 и A_2 будут задавать центральные углы α_1 и α_2 , на которые должен повернуть ДУО, чтобы вектор его скорости был ориентирован в направлении точек C_1 и C_2 соответственно. Данные два угла будут определять диапазон опасных направлений $\alpha_{on} \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Рассматривается движение ДУО в стартовой системе координат OX_cZ_c .

На рис. 5 введены следующие обозначения: $\alpha_1 = \angle OO_1A_1$, $\alpha_2 = \angle OO_1A_2$, $\alpha = \angle OO_1A$, $\beta = \angle BO_1D$.

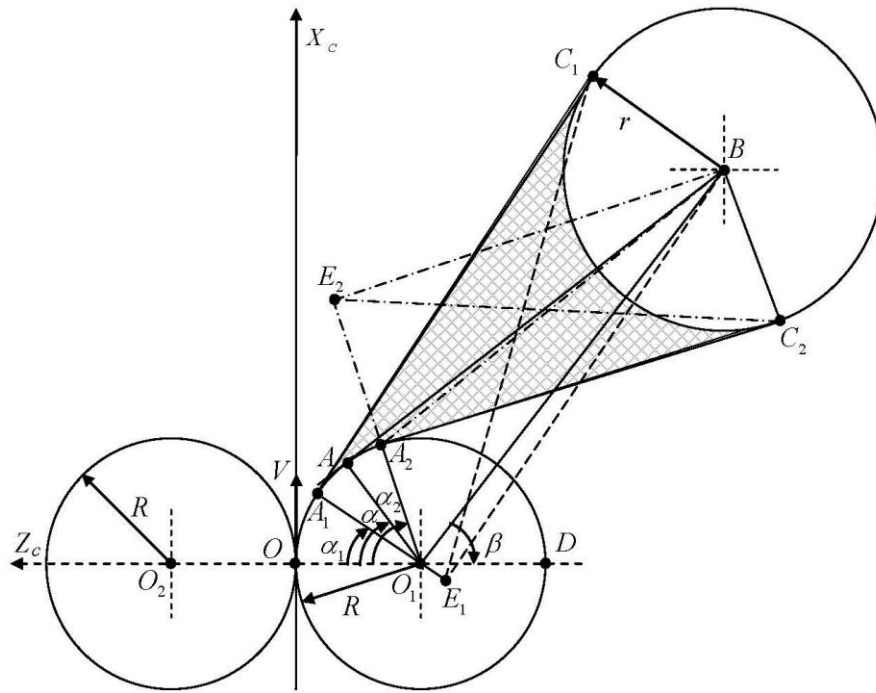


Рис. 5. Построение граничных углов диапазона опасных направлений

Искомый угол $\alpha_2 = \pi - \beta - \angle BO_1E_2$ может быть найден из следующего выражения

$$\alpha_2 = \pi - \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}} - \arccos \frac{R + r}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}. \quad (7)$$

Длина $\|A_2C_2\| = \|BE_2\|$ из треугольника $\square BO_1E_2$

$$l_2 = \|A_2C_2\| = \|BE_2\| = \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi + r)}. \quad (8)$$

Координаты точки A_2

$$A_2 : (R \sin \alpha_2, -R + R \cos \alpha_2). \quad (9)$$

Координаты точки C_2 :

$$C_2 : \begin{pmatrix} R \sin \alpha_2 + \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi + r)} \cdot \cos \alpha_2 \\ -R + R \sin \alpha_2 - \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi + r)} \cdot \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^T \quad (10)$$

Далее необходимо определить угол α_1 .

Можно выделить 3 варианта расположения точки E_1 как следствия соотношения радиуса окружности разворота максимальной кривизны R и радиуса запрещенной зоны r

$$\|A_1E_1\| = \|BC_1\| = r.$$

- 1) $R < r$. Данный случай иллюстрирует рис. 5. Точка E_1 лежит вне пределов отрезка O_1A_1 .

В этом случае искомый угол α_1 можно определить из выражения

$$\alpha_1 = \arccos \frac{r - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}} - \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}. \quad (11)$$

- 2) $r = R$. В этом случае для расчета угла α_1 можно воспользоваться формулой (6), полученной для случая запрещенной точки, считая запрещенной точку C_1

$$\alpha_1 = \pi - \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}} - \arccos \frac{R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}. \quad (12)$$

Данный случай представлен на рис. 6.

- 3) $R > r$. В этом случае точка E_1 будет принадлежать отрезку O_1A_1 . Рис. 7 иллюстрирует данный случай.

Тогда искомый угол $\alpha_1 = \pi - \angle A_1O_1B - \beta$ может быть найден из уравнения

$$\alpha_1 = \pi - \arccos \frac{R - r}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}} - \arccos \frac{L \sin \xi - R}{\sqrt{L^2 - 2R \cdot L \sin \xi + R^2}}. \quad (13)$$

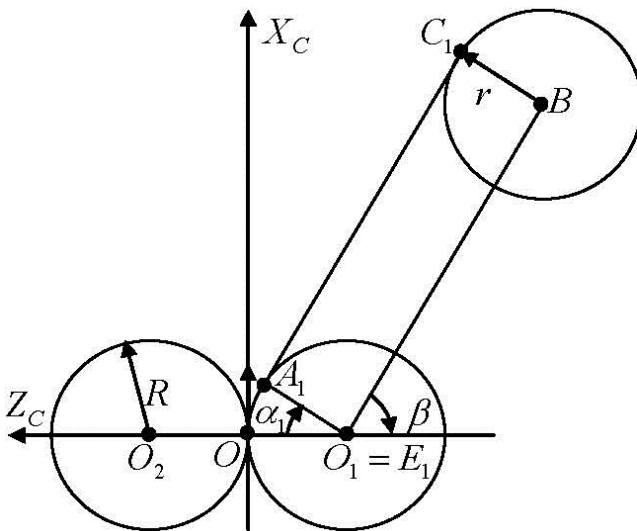


Рис. 6. Угол α_1 ($R = r$)

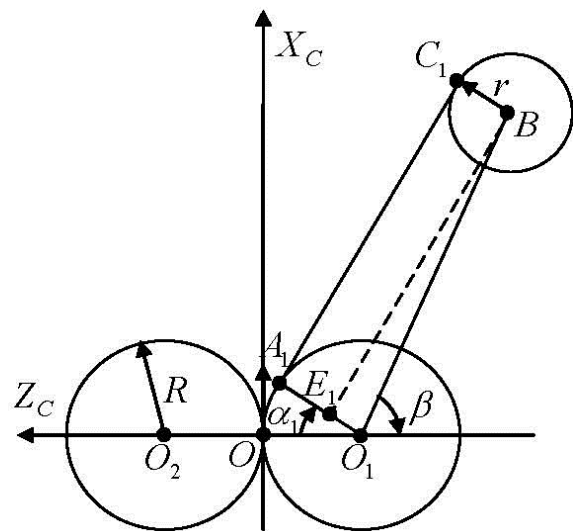


Рис. 7. Угол α_1 ($R > r$)

Утверждение 2. Зона опасных траекторий (ЗОТ) для ЗЗ радиуса r определяется двумя общими касательными ЗЗ и окружности радиуса R – траектории разворота ДУО максимальной

кривизны с центральными углами разворота α_1 и α_2 , где угол α_2 определяется выражением (7), а угол α_1 для $R < r$ выражением (11), для $R = r$ — выражением (12), а для $R > r$ — выражением (13).

$$l_1 = \|A_1 C_1\| = \|BE_1\| = \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi - r)}.$$

Координаты точки A_1 :

$$A_1 : (R \sin \alpha_1, -R + R \cos \alpha_1). \quad (14)$$

Координаты точки C_1 :

$$C_1 : \begin{pmatrix} R \sin \alpha_2 + \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi - r)} \cdot \cos \alpha_2, \\ -R + R \sin \alpha_2 - \sqrt{L^2 - r^2 - 2R \cdot (L \sin \xi - r)} \cdot \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^T. \quad (15)$$

Если угол разворота на необходимое направление полета ДУО принадлежит диапазону опасных углов $\alpha_{on} \in (\alpha_1, \alpha_2)$, то следует выполнить построение границы ЗЗ ∂B для того, чтобы вычислить предельное время движения в выбранном направлении до начала выполнения отворота от запрещенной зоны.

Рассмотрим далее случай, когда ЗЗ подвижна, $r(t) \neq const$.

Пусть известно положение центра ЗЗ $B(t)$ в каждый момент времени t , т.е. известен закон движения зоны. Пусть также известен закон изменения радиуса ЗЗ $r(t)$ во времени. Известны начальное положение центра ЗЗ $B(t_0)$, начальный радиус зоны $r(t_0)$, а также ориентация и величина начального вектора скорости $V(t_0)$.

Необходимо найти диапазон центральных углов разворота, опасных для движения ДУО с точки зрения попадания с течением времени в динамическую круговую ЗЗ.

Поскольку ЗЗ движется на плоскости, необходимо определить момент времени, в который ДУО, двигаясь по касательной к траектории разворота максимальной кривизны и запрещенной зоне, достигнет точки касания. Для этого предлагается использовать решение оптимизационной задачи вида

$$J_i = \min_t \|C_i(t) - \tilde{C}_i(t)\|^2. \quad (16)$$

Т.е. необходимо минимизировать по времени расстояние, от точки касания запрещенной зоны C_i касательной до точки $\tilde{C}_i$, в которую объект попадает, двигаясь по касательной к ЗЗ. Данная задача демонстрируется на примере, изображенном на рис. 8.

На рис. 8 рассматривается положение ДУО и запрещенной зоны в моменты времени t_1, t_2, t_3 : $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$

Утверждение 3. Определение ЗОТ при динамическом перемещении ЗЗ с известным законом движения $B(t)$ и $r(t)$ сводится к итерационному по времени $\tau = t_1, t_2, \dots$ алгоритму минимизации разности расстояний по общим касательным с углами α_1 и α_2 (см. утверждение 2) за время τ и расстояний до точки касания с ЗЗ с параметрами $B(\tau)$ и $r(\tau)$.

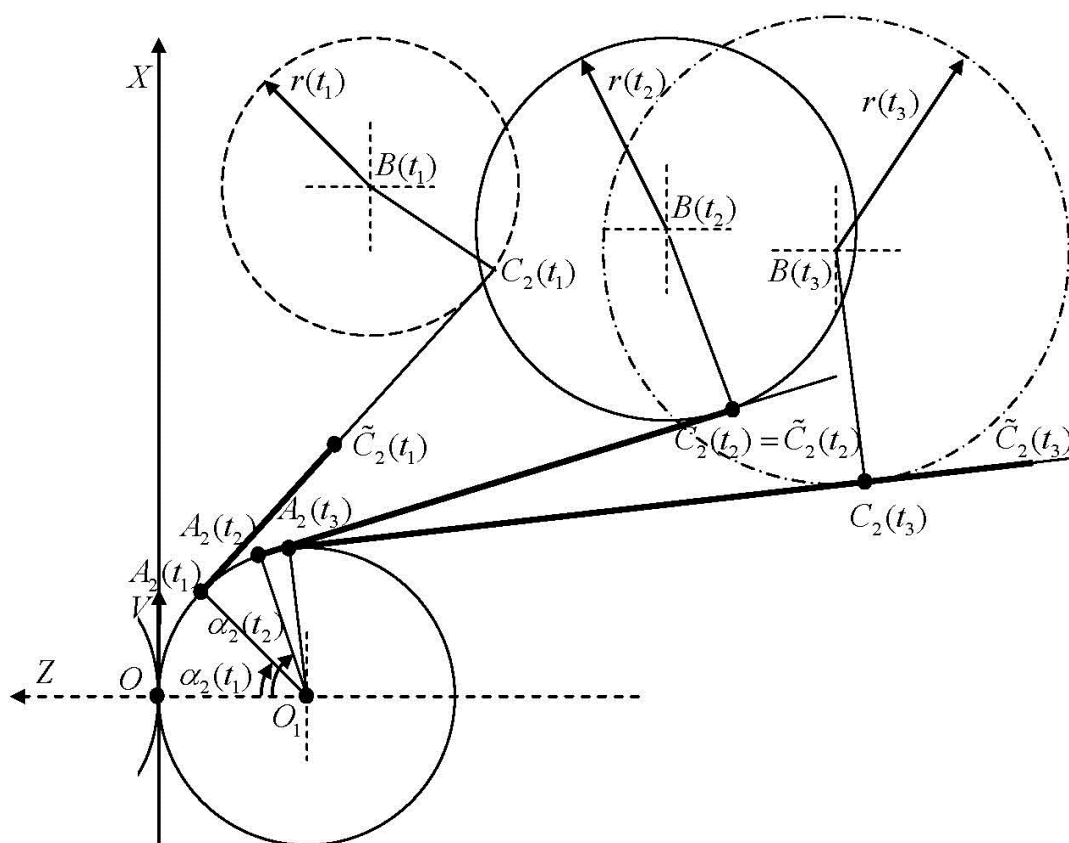


Рис. 8. Получение траектории облета динамической ЗЗ

Замечание. В общем случае время τ_1 прохождения точки $C_1(\tau_1)$ облета зоны с одной стороны не будет равно времени τ_2 прохождения точки $C_2(\tau_2)$ облета зоны с другой стороны.

Итерационный алгоритм определения ЗОТ.

- 1) В момент времени τ определяются положение центра $B(\tau)$ и радиус $r(\tau)$ запрещенной зоны и фиксируются их мгновенные значения.

- 2) Определяется ЗОТ в виде диапазона $(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau))$ центральных углов разворота, опасных для движения ДУО, используя Утверждение 3.
- 3) Определяется положение ДУО $\tilde{C}_i(\tau)$ в момент времени τ .
- 4) Вычисляются расстояния $\|C_i(\tau) - \tilde{C}_i(\tau)\|, i = 1, 2$.
- а) Если $\|C_i(\tau) - \tilde{C}_i(\tau)\| < \varepsilon, i = 1, 2$, то время τ соответствует времени прохождения ДУО точки касания $C_i(\tau)$ динамической ЗЗ.
- б) В противном случае решается задача численной оптимизации (16). Значение времени τ , которому соответствует $\min$ функционала (16) является временем прохождения точки касания динамической запрещенной для движения зоны.

Таким образом, сформирована методика оценки зоны опасных траекторий для обеспечения траекторной безопасности ДУО при движении в плоскости, содержащей динамическую круговую запрещенную зону.

Список использованных источников

1. Алгоритмическое обеспечение траекторной безопасности ЛА / Е.М. Воронов [и др.] // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXII академических чтений по космонавтике. — М., 2008. — С. 426.
2. Воронов Е.М., Карпунин А.А. Алгоритм оценки границ области достижимости летательного аппарата с учетом тяги // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приборостроение. — 2007. — № 4. — С. 81 – 99.
3. Воронов Е.М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

Trajectory safety ensuring for the problem of fly-around of dynamic circle zone
77-30569/280873

Bauman Moscow State Technical University
emvoronov@mail.ru
ksans@yandex.ru

The problem of trajectory safety ensuring for the dynamic controlled object (DCO) that moves on a plane in which circle forbidden zone exists is considered. Mathematical model of DCO motion is described. At first the case of static circle forbidden zone is considered for the formalization of the fly-around problem, intervals of non-safety courses of motion which form a zone of dangerous trajectories for the class of piecewise path segments of motion consisting of trajectory of sharp turn of the maximum curvature and linear path segment after it. Problem of evaluation of the zone of dangerous trajectories in the case of dynamic circle forbidden zone is considered on the basis of the obtained description. As a result iteration algorithm of the zone of dangerous trajectories evaluation is formed.

Publications with keywords: [structural synthesis](#), [trajectory safety](#), [forbidden zone](#), [fly-around](#)

Publications with words: [structural synthesis](#), [trajectory safety](#), [forbidden zone](#), [fly-around](#)

Reference

1. E.M. Voronov et al., in: Proc. of the XXXII academic readings on astronautics on Actual problems of Russian cosmonautics, Moscow, 2008, 426 p.
2. Voronov E.M., Karpunin A.A., Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Priborostroenie - Bulletin of BMSTU. Ser. Instrumentation 4 (2007) 81-99.
3. Voronov E.M., Methods for multi-object multi-criteria optimization of control systems based on the steady-effective gaming solutions, Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana - BMSTU Press, 2001.