электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Об аторических относительных копредставлениях

77-30569/251232

11, ноябрь 2011

О. В. Куликова

УДК 512.543

МГТУ им. Н.Э. Баумана
olga.kulikova@mail.ru

Введение

В статье [1] В.А.Богли и С.Дж.Прайд рассматривают асферические относительные копредставления. В книге [2] А.Ю. Ольшанским вводится понятие аторического градуированного копредставления и доказывается, что элементы, перестановочные в группе, обладающей некоторым градуированным аторическим копредставлением, принадлежат одной циклической подгруппе этой группы. Цель настоящей работы — рассмотреть относительные копредставления с точки зрения аторичности и исследовать свойства коммутирующих элементов в группе, представленной аторическим относительным копредставлением.

В первой части данной работы приводятся определения и утверждения из [1], которые понадобятся в данной работе, также дается определение аторического относительного копредставления. При этом сохраняются обозначения из [1]. Во второй части выводятся утверждения о сопряженных и коммутирующих элементах в группе, представленной относительным копредставлением, на которое наложены некоторые условия. В третьей части доказывается утверждение о достаточном условии для аторичности, подобное одному из условий асферичности в [1].

1. Аторичность

Относительные копредставления. Пусть H — группа. К H добавляется множество порождающих $\mathbf{x}$. Новая группа G получается при факторизации полученного свободного произведения $H * \langle\mathbf{x}\rangle$ по нормальному замыканию N множества $\mathbf{r}$ циклически приведенных элементов из $H * \langle\mathbf{x}\rangle \setminus H$. Каждый элемент из $\mathbf{r}$ записан в виде

$$x_1^{\epsilon_1}h_1x_2^{\epsilon_2}h_2\dots x_n^{\epsilon_n}h_n, \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbf{x}, \epsilon_\mathbf{i} = \pm\mathbf{1}$ и $h_i \in H$, и является циклически приведенным в том смысле, что если $h_i = 1$ и $x_i = x_{i+1}$ (индексы рассматриваются по модулю n), тогда $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$. Элементы из $\mathbf{x}\cup\mathbf{x}^{-\mathbf{1}}$ будем называть $\mathbf{x}$-символами. А элементы из H будем иногда называть *коэффициентами*. Говорят, что G определяется *относительным копредставлением* $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r}\rangle$.

Если $\mathbf{s}$ - некоторое подмножество множества $\mathbf{r}$, обозначим через $\mathbf{s}^*$ множество всех циклических перестановок элементов из $\mathbf{s} \cup \mathbf{s}^{-\mathbf{1}}$ вида (1), т.е. все циклические перестановки, которые начинаются с $\mathbf{x}$-символа.

Определим оператор $\bar{\ }$ на $\mathbf{r}^*$ следующим образом. Для $R \in \mathbf{r}$ запишим $R = Sh$, где $h \in H$, а S начинается и кончается $\mathbf{x}$-символом. Положим

$$\bar{R} = S^{-1}h^{-1}.$$

Отметим, что $\bar{\bar{R}} = R$ и $\bar{R} \in \mathbf{r}^*$. Нетрудно показать, что R остается неподвижным при действии оператора $\bar{\ }$ тогда и только тогда, когда R имеет вид

$$Xh_1X^{-1}h_2, \tag{2}$$

где X начинается и кончается $\mathbf{x}$-символом, а h_1, h_2 — элементы группы H порядка 2.

Если R — элемент множества $\mathbf{r}^*$, то R можно записать в виде $\dot{R}^{p(R)}$, где $\dot{R}$ не является собственной степенью и $p(R)$ — положительное целое число. Назовем $\dot{R}$ *корнем* элемента R, а $p(R)$ *периодом*.

Назовем $\mathbf{P}$ *тонким*, если $\{R\}^* \cap \mathbf{r} = \{R\}$ для каждого $R \in \mathbf{r}$. Будем говорить, что $\mathbf{P}$ является *ориентированным*, если $\mathbf{P}$ является тонким и никакой элемент из $\mathbf{r}$ не является циклической перестановкой себе обратного. Отметим, что элемент $R \in \mathbf{r}$ является циклической перестановкой себе обратного тогда и только тогда, когда некоторая циклическая перестановка элемента R имеем вид (2).

Картинки над относительными копредставлениями. *Картинкой* $\mathbb{P}$ называется конечный набор взаимно непересекающихся дисков $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$ внутри диска D_2 (кольца Ω, тора T) вместе с конечным набором взаимно непересекающихся простых дуг $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, вложенных в замыкание $D^2 - \cup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$ (соотв., $\Omega - \cup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}, T - \cup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$).

Под словами *диски* картинки $\mathbb{P}$ мы будем понимать диски $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$, а не диск D_2. Граница $\partial\mathbb{P}$ картинки $\mathbb{P}$ на D_2 (на Ω)– это цикл ∂D^2 (два цикла $\partial\Omega$). В остальных случаях $\partial\mathbb{P} = \emptyset$. Для $j \in \{1, \ldots, m\}$ *углы* диска Δ_j — это замыкания связных компонент множества $\partial\Delta_j - \cup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\partial\Delta_j$ — это граница диска Δ_j.

Области картинки $\mathbb{P}$ — это замыкания связных компонент множества

$$D^2 - (\bigcup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\} \cup \bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$$

и соответственно,

$$\Omega - (\bigcup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\} \cup \bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}),$$

$$T - (\bigcup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\} \cup \bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}).$$

Внутренняя область картинки $\mathbb{P}$ — это односвязная область, которая не имеет общих точек с $\partial\mathbb{P}$. Картинка $\mathbb{P}$ называется *нетривиальной*, если $m \geqq 1$, *связной*, если $\bigcup\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\} \cup \bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ связно.

Картинка $\mathbb{P}$ на D^2 называется *дисковой*, если она не является тривиальной и $(\bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \cap \partial\mathbb{P} = \emptyset$. Дисковая картинка называется *сферической*.

Картинка $\mathbb{P}$ на Ω называется *кольцевой*, если она не является тривиальной и $(\bigcup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \cap \partial\mathbb{P} = \emptyset$. Нетривиальная картинка $\mathbb{P}$ на торе T называется *торической*.

Зафиксируем относительное копредставление $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r}\rangle$, и предположим, что картинка $\mathbb{P}$ *размечена* в следующем смысле. Каждая дуга снабжена нормальной ориентацией, обозначенной короткой стрелкой, пересекающей дугу трансверсально, и помечена элементом из $\mathbf{x} \cup \mathbf{x^{-1}}$. Также каждый угол картинки $\mathbb{P}$ ориентирован против часовой стрелки и помечен элементом из H.

Если c — угол диска Δ размеченной картинки $\mathbb{P}$, то обозначим через $W(c)$ слово, полученное при чтении против часовой стрелки меток дуг и углов, встречающихся на $\partial\Delta$, начиная с метки дуги в начале (в концевой точке) угла c, ориентированного против часовой стрелки. При этом если мы проходим дугу с меткой t в направлении ее нормальной ориентации, мы читаем t, а если мы проходим ее в противоположном направлении, мы читаем t^{-1}.

Будем говорить, что размеченная картинка $\mathbb{P}$ является картинкой над копредставлением $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$, если выполняются следующие два условия:

(C_1) $W(c) \in \mathbf{r}^*$ для каждого угла c картинки $\mathbb{P}$.

(C_2) Если $h_1, \ldots, h_m$ — последовательность меток углов, встречающихся при прохождении по часовой стрелке границы внутренней области картинки $\mathbb{P}$, то $h_1 \ldots h_m = 1$ в H.

Картинка над $\mathbf{P}$ с базой — это картинка над $\mathbf{P}$ с дополнительными условиями:

(C_3) Если Δ — произвольный диск картинки, тогда найдутся выделенные точки (базовые точки) $O_1, \ldots, O_p$ внутри некоторых углов $c_1, \ldots, c_p$ диска Δ. Слова $W(c_1), \ldots, W(c_p)$ равны некоторому элементу R из $\mathbf{r} \cup \bar{\mathbf{r}}$. Более того p является периодом элемента R. Будем называть R *меткой диска* Δ и обозначать его через $W(\Delta)$.

(C_4) Для дисковой картинки на границе $\partial\mathbb{P}$ выделена точка (базовая точка) O, не принадлежащая никакой дуге картинки. Если мы проходим вокруг $\partial\mathbb{P}$ против часовой стрелки, начиная с O, мы встречаем последовательность дуг. Читая метки этих дуг, мы получим слово $W(\mathbb{P})$, которое будем называть меткой картинки $\mathbb{P}$. (Заметим, что $W(\mathbb{P})$ включает в себя только $\mathbf{x}$-символы.)

Если $\mathbb{P}$ — картинка над копредставлением $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ и $\mathbf{x_0}$ — подмножество $\mathbf{x}$, тогда дуги, которые помечены элементами из $\mathbf{x_0} \cup \mathbf{x_0}^{-1}$, будут называться $\mathbf{x_0}$-дугами. Аналогично если $\mathbf{r_0}$ — подмножество $\mathbf{r}$, тогда диски, для которых $W(c) \in \mathbf{r_0}^*$ (c — некоторый угол диска) будут называться $\mathbf{r_0}$-дисками.

Картинки над обычными копредставлениями. Обычное копредставление $\mathbf{Q} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ ($\mathbf{r}$ — циклически приведенные слова в алфавите $\mathbf{x}$) может рассматриваться как частный случай относительного копредставления

$\mathbf{Q_1} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ (с $H = \{1\}$). При этом метки углов картинки над $\mathbf{Q_1}$ равны 1 и поэтому их можно проигнорировать, тем самым получив картинку над обычным копредставлением $\mathbf{Q}$. В общем случае мы не будем различать $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q_1}$, и картинки над $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q_1}$.

Следующий результат (лемма 1.1 из [1]) хорошо известен:

Лемма 1. Слово W, записанное в алфавите $\mathbf{x}$, представляет единицу в группе, заданной копредставлением $\mathbf{Q}$, тогда и только тогда, когда существует дисковая картинка с базой над $\mathbf{Q}$ с граничной меткой W.

Диполи, аторичность и асферичность. Пусть $\mathbf{P}$ — относительное копредставление. *Диполь* в картинке над $\mathbf{P}$ состоит из пары углов c, c' картинки вместе с дугой α, соединяющей начало одного из углов с концом другого так, что выполняются следующие условия:

(*i*) c и c' находятся в одной области картинки;

(*ii*) $W(c) = \overline{W(c')}$.

Если $\mathbf{r_0}$ — подмножество множества $\mathbf{r}$, тогда диполь называется $\mathbf{r_0}$-диполем, если $W(c) \in \mathbf{r_0}^*$. Диски, на которых находятся углы c и c' диполя, называются *дисками диполя*. Важное наблюдение состоит в том, что если $\mathbf{P}$ является ориентированным, то эти диски различны. (Ибо иначе из (ii) будет следовать, что некоторая циклическая перестановка элемента из $\mathbf{r}^*$ будет равняться своему образу при действии $\bar{\ }$.)

Картинка над $\mathbf{P}$ является *приведенной*, если она не содержит диполи.

Определение 1. Относительное копредставление $\mathbf{P}$ является *асферическим*, если любая связная сферическая картинка над $\mathbf{P}$ содержит диполь.

Определение 2. Относительное копредставление $\mathbf{P}$ является *аторическим*, если любая связная торическая картинка над $\mathbf{P}$ содержит диполь.

Замечание 1. Технически удобно определить асферичность и аторичность в терминах связных картинок. Заметим однако, что если $\mathbf{P}$ является асферическим (соотв., аторическим), то любая сферическая (соотв., торическая) картинка над $\mathbf{P}$ будет содержать диполь. Это замечание будет часто использоваться.

Поднятие относительного копредставления. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — относительное копредставление. Получим обычное копредставление $\tilde{\mathbf{P}}$, определяющее ту же самую группу G.

Пусть $\mathbf{Q} = \langle \mathbf{a}; \mathbf{s} \rangle$ — обычное копредставление группы H. Тогда существует гомомоморфизм φ из свободной группы с алфавитом $\mathbf{a}$ на H с ядром, равным нормальному замыканию множества $\mathbf{s}$. Для каждого $h \in H$ выберем элемент $\varphi^{-1}(h)$, представленный приведенным словом в алфавите $\mathbf{a}$. Далее распространим φ до гомоморфизма из свободной группы с алфавитом $\mathbf{a} \cup \mathbf{x}$ в $H * \langle \mathbf{x} \rangle$ очевидным образом. Поднятие элементов из H, описанное выше, индуцирует поднятие элементов из $H * \langle \mathbf{x} \rangle$. В частности, для каждого $R \in \mathbf{r}$ получаем его поднятие $\tilde{R}$ (циклически приведенное слово в алфавите $\mathbf{a} \cup \mathbf{x}$). Положим

$$\tilde{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}; \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle,$$

где $\tilde{\mathbf{r}} = \{\tilde{R} : R \in \mathbf{r}\}$.

Тривиальным образом обобщая лемму 1.5 из [1], получаем следующее утверждение.

Лемма 2. Если любая связная торическая (соотв., сферическая, кольцевая) картинка над ориентированным относительным копредставлением $\mathbf{P}$ не является приведенной, тогда каждая картинка на торе (соотв., на диске, на кольце) над $\tilde{\mathbf{P}}$, имеющая хотя бы один $\tilde{\mathbf{r}}$-диск (соотв., имеющая хотя бы один $\tilde{\mathbf{r}}$-диск и не имеющая $\mathbf{x}$-дуг, идущих к границе картинки), содержит $\tilde{\mathbf{r}}$-диполь.

2. Некоторые результаты о сопряженных и коммутирующих элементах.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное относительное копредставление, которое определяет группу G, такое, что не существует связных приведенных кольцевых картинок над $\mathbf{P}$. Тогда элементы $h_1, h_2 \in H$ сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе H.

Доказательство. Пусть элементы $h_1, h_2 \in H$ сопряжены в группе G элементом $w \in G$. Пусть $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ — такие приведенные поднятия элементов h_1, h_2 в свободную группу в алфавите $\mathbf{a} \cup \mathbf{x}$, что $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ не содержат букв $\mathbf{x}$. И пусть $\tilde{w}$ — приведенное поднятие w в алфавите $\mathbf{a} \cup \mathbf{x}$.

Можно считать, что $\tilde{w}$ содержит буквы $\mathbf{x}$, иначе все доказано. Так как $\tilde{h}_1 \tilde{w} \tilde{h}_2^{-1} \tilde{w}^{-1}$ представляет единичный элемент группы G, по лемме 1 существует дисковая картинка $\mathbb{P}$ над обычным копредставлением $\tilde{\mathbf{P}}$ группы G с граничной меткой, равной $\tilde{h}_1 \tilde{w} \tilde{h}_2^{-1} \tilde{w}^{-1}$.

При этом границу $\partial\mathbb{P}$ можно разбить четырьмя точками a, b, c, d на 4 связные части $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, $[d, a]$, вдоль которых написано $\tilde{h}_1$, $\tilde{w}$, $\tilde{h}_2^{-1}$, $\tilde{w}^{-1}$ соответственно. Склеим $[b, c]$ и $[d, a]$ друг с другом и получим картинку $\tilde{\mathbb{P}}$ на кольце Ω над $\tilde{\mathbf{P}}$.

При этом $[a, b]$ и $[c, d]$ образуют границы σ_1 и σ_2 кольца Ω, на которых фиксированы точки (базовые точки) $o_1 \in \sigma_1$ и $o_2 \in \sigma_2$. При обходе вокруг σ_1 (соотв., σ_2) против часовой стрелки, начиная с o_1 (соотв., o_2), встречается последовательность дуг. Метки этих дуг образуют слово $\tilde{h}_1$ (соотв., $\tilde{h}_2^{-1}$). При этом $\mathbf{x}$-дуги не пересекают σ_1 и σ_2.

Обозначим через ξ простой путь внутри Ω, соединяющий o_1 и o_2. Для любого такого ξ верно, что проходя вдоль ξ от o_1 к o_2 и читая метки встречающихся дуг, мы получим слово, представляющее сопрягающий элемент для h_1 и h_2 в G. Изначально будем считать, что ξ совпадает со склеенными $[b, c]$ и $[d, a]$.

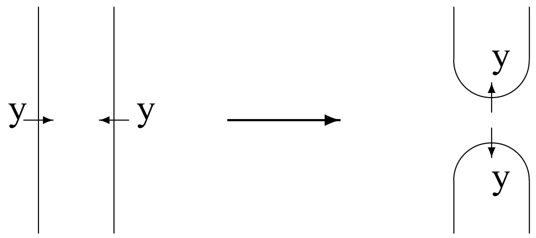

Рис. 1

Если в $\tilde{\mathbb{P}}$ есть $\tilde{\mathbf{r}}$-диски, то по условию теоремы, учитывая лемму 2, в $\tilde{\mathbb{P}}$ найдется $\tilde{\mathbf{r}}$-диполь. С помощью преобразования "мост" (смотри рис. 1) добиваемся того, чтобы все дуги шли от одного диска этого диполя к другому диску параллельно друг другу.

Получившаяся конфигурация (оба диска диполя и дуги между ними) в дальнейшем будет называться *полным диполем*. Удаляем этот полный диполь и получаем картинку на кольце $\tilde{\mathbb{P}}_1$ над $\tilde{\mathbf{P}}$ с меньшим количеством $\tilde{\mathbf{r}}$-дисков, чем в $\tilde{\mathbb{P}}$, и с теми же граничными метками на σ_1 и σ_2.

Применяем аналогичное преобразование к $\tilde{\mathbb{P}}_1$ и т.д. В конце концов получим кольцевую картинку без $\tilde{\mathbf{r}}$-дисков с теми же граничными метками на σ_1 и σ_2. Причем любая $\mathbf{x}$-дуга в картинке образует цикл.

Удаляя из этой картинки $\mathbf{x}$-дуги, получаем картинку на кольце над $\mathbf{Q}$. Тем самым получаем, что h_1 и h_2 сопряжены в H. (Заметим, что если найдется $\mathbf{x}$-дуга являющаяся не стягиваемым в точку циклом, то h_1 и h_2 сопряжены с единичным элементом в H, т.е. сами являются единичными в H.)

Обратное утверждение тривиально. ■

Теорема 2. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное относительное копредставление, которое определяет группу G, такое, что не существует связных приведенных кольцевых картинок над $\mathbf{P}$. Тогда элементы $h \in H$ и $w \in G$ перестановочны в группе G тогда и только тогда, когда либо $h = 1$ в H, либо существует элемент $w_H \in H$ такой, что $w_H = w$ в G и w_H коммутирует с h в H.

Доказательство. Пусть элементы $h \in H$ и $w \in G$ перестановочны в группе G. Как и в доказательстве теореме 1, используя те же обозначения, только полагая, что $h_1 = h_2 = h$, строим картинку $\tilde{\mathbb{P}}$ на кольце над $\tilde{\mathbf{P}}$. Далее приводим $\tilde{\mathbb{P}}$ к картинке $\tilde{\mathbb{P}}'$ на кольце без $\tilde{\mathbf{r}}$-дисков. При этом используются преобразование "мост" и удаление полных диполей, которые изменяют один представитель $\tilde{w}$ элемента w группы G на другой.

Пусть k — количество пересечений стягиваемых в точку $\mathbf{x}$-дуг и ξ. Если $k > 0$, найдется такая $\mathbf{x}$-дуга α, у которой есть два последовательных пересечения p_1 и p_2 с ξ такие, что связная часть ς дуги α между p_1 и p_2 не пересекается с ξ и одна из связных частей τ пути ξ между p_1 и p_2 и ς ограничивают на торе дисковую картинку над $\tilde{\mathbf{P}}$. По лемме 1 вдоль τ написано слово, представляющее единицу в G. Перенаправление ξ вдоль ς уменьшает количество пересечений α и ξ на два и изменяет представитель $\tilde{w}$ элемента w в группе G. Далее применяем индукцию по k.

Если $k = 0$, то удаляем все стягиваемые в точку $\mathbf{x}$-дуги из $\tilde{\mathbb{P}}'$, это не изменяет представитель $\tilde{w}$ элемента w.

Если в $\tilde{\mathbb{P}}'$ существуют не стягиваемые в точку $\mathbf{x}$-дуги, то $h = 1$ в H. Иначе $\tilde{\mathbb{P}}'$ — картинка над $\mathbf{Q}$ и представитель $\tilde{w}$ не содержит букв из $\mathbf{x}$ и дает искомое w_H.

Обратное утверждение тривиально. ■

В [1] доказано следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное асферическое относительное копредставление, которое определяет группу G. Тогда естественный гомоморфизм $H \to G$ инъективен (таким образом можно рассматривать H как подгруппу группы G).

Следствие 1. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное асферическое относительное копредставление, которое определяет группу G, такое, что не существует связных приведенных кольцевых картинок над $\mathbf{P}$. Тогда элементы $h \in H$ и $w \in G$ перестановочны в группе G тогда и только тогда, когда либо $h = 1$ в H, либо w принадлежит H (рассматриваемой как подгруппа группы G).

Следствие 2. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное асферическое относительное копредставление, которое определяет группу G, такое, что не существует связных приведенных кольцевых картинок над $\mathbf{P}$, $G \neq H$, $H \neq \{1\}$. Тогда центр группы G тривиален.

В [2] вводится понятие аторического градуированного копредставления и доказывается, что два элемента, перестановочные в группе, обладающей некоторым градуированным аторическим копредставлением, принадлежат одной циклической подгруппе этой группы (теорема 13.5 [2]). В случае аторического относительного копредставления можно получить следующий аналог этого свойства.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное аторическое относительное копредставление, которое определяет группу G. Тогда элементы U и V перестановочны в группе G тогда и только тогда, когда найдутся их прообразы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$, перестановочные в группе $H * \langle \mathbf{x} \rangle$.

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству отметим, что доказательство теоремы 4 практически тождественно доказательству теоремы 13.5 из [2]. Отличие лишь в том, что в теореме 13.5 из [2] используются градуированные диаграммы над градуированным копредставлением, а здесь используются картинки, которые можно рассматривать как двойственный объект к диаграммам.

Пусть U и V — перестановочные элементы группы G, а $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ — приведенные поднятия элементов U и V в свободную группу в алфавите $\mathbf{a} \cup \mathbf{x}$. Так как слово $\tilde{U}\tilde{V}\tilde{U}^{-1}\tilde{V}^{-1}$ представляет единицу в G, по лемме 1 существует дисковая картинка над обычным копредставлением $\tilde{\mathbf{P}}$ группы G с граничной меткой, равной тождественно $\tilde{U}\tilde{V}\tilde{U}^{-1}\tilde{V}^{-1}$. При этом границу диска можно разбить на четыре части $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, метки которых равны $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{U}^{-1}, \tilde{V}^{-1}$ соответственно.

Склеиваем β с β', γ с γ' и получаем картинку $\mathbb{P}$ на торе над $\tilde{\mathbf{P}}$ с двумя замкнутыми путями, образованными β $(= \beta')$ и γ $(= \gamma')$. Их общую точку обозначим через O. В силу построения, совершая один обход вокруг β (соотв., γ) от точки O, мы встречаем последовательность дуг. Читая метки этих дуг, получаем слово $\tilde{U}$ (соотв., $\tilde{V}$) или $\tilde{U}^{-1}$ (соотв., $\tilde{V}^{-1}$) в зависимости от того, как выбрано направление движения вдоль β (соотв., γ).

Зафиксируем направление движения на β (соотв., γ) такое, при котором получаем слово $\tilde{U}$ (соотв., $\tilde{V}$) и назовем его *прямым*. Назовем *меткой* β (соотв., γ) слово, читаемое по меткам дуг, пересекающих β (соотв., γ), при движение по прямому направлению.

Через n обозначим количество $\mathbf{r}$-дисков в $\mathbb{P}$. Теорему 4 будем доказывать индукцией по n. Если $\mathbf{r}$-вершин нет в $\mathbb{P}$, то все доказано. Иначе $n > 0$.

Так как $\mathbf{P}$ является аторическим, то в силу леммы 2 в картинке $\mathbb{P}$ на торе найдется $\mathbf{r}$-диполь Υ. Рассмотрим открытую область D на торе, гомеоморфную диску, содержащую только $\mathbf{r}$-диски Δ_1, Δ_2 диполя Υ и дугу α между ними, такую, что $O \nsubseteq D \cup \partial D$. С помощью преобразования "мост" (см. рис. 1), совершаемого внутри D добиваемся того, чтобы все дуги из Δ_1 шли в Δ_2 параллельно α. (При этом метки β и γ не меняются, как элементы свободной группы.)

Теперь $\mathbf{r}$-диполь с дисками Δ_1, Δ_2 стал полным. Рассмотрим открытую область $\tilde{D} \subseteq D$, содержащую диски Δ_1, Δ_2 и все дуги между ними, такую что $\partial\tilde{D}$ пересекает β и γ трансверсально в конечном числе точек, количество которых минимально возможное для данных Δ_1, Δ_2, α.

Обозначим через m количество связный пересечений $\partial\tilde{D}$ с путями β и γ. Если $m > 0$, рассмотрим такой связный подпуть $\tau \subset (\tilde{D} \cap \beta) \cup (\tilde{D} \cap \gamma)$, что τ делит $\tilde{D} \cup \partial\tilde{D}$ на две части Γ_1 и Γ_2, одна из которых (Γ_1) не пересекается с β и γ. Через δ обозначим $\partial\tilde{D} \cap \Gamma_1$.

Γ_1 содержит дисковую картинку над $\tilde{\mathbf{P}}$. По лемме 1 граничная метка этой картинки представляет единицу в G. Значит, при обходе против часовой стрелки вдоль $\tau \cup \delta$ слово на τ и слово на δ взаимообратны в G. Если $\tau \subset \beta$, заменяем β на $(\beta \backslash \tau) \cup \delta$. Если $\tau \subset \gamma$, заменяем γ на $(\gamma \backslash \tau) \cup \delta$. Это меняет представителей $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ для U, V в группе G и уменьшает m на единицу. Далее применяем индукцию по m.

Теперь можно считать, что $\tilde{D}$ не пересекается с β и γ. Удаляем диски Δ_1, Δ_2 и все дуги между ними. При этом метки β и γ не изменятся, а количество $\mathbf{r}$-дисков в $\mathbb{P}$ уменьшится на два. Далее применяем индукцию по n.

Обратное утверждение тривиально. ∎

В силу следствия 4.1.6 из [3] получаем

Следствие 3. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное аторическое относительное копредставление, которое определяет группу G. Тогда элементы U и V перестановочны в группе G тогда и только тогда, когда либо U и V принадлежат одной циклической подгруппе группы G, либо найдутся такие перестановочные элементы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ в H, что для некоторого элемента $W \in H * \langle \mathbf{x} \rangle$ элементы U и V являются образами элементов $W^{-1}\tilde{U}W$ и $W^{-1}\tilde{V}W$ соответственно.

Следствие 4. Пусть $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ — ориентированное аторическое и асферическое относительное копредставление, которое определяет группу G. Тогда элементы U и V перестановочны в группе G тогда и только тогда, когда либо U и V принадлежат одной циклической подгруппе группы G, либо найдутся такие перестановочные элементы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ в H (рассматриваемой как подгруппа группы G), что $U = W^{-1}\tilde{U}W$ и $V = W^{-1}\tilde{V}W$ в G для некоторого элемента $W \in G$.

3. "Условия малых сокращений" для относительных копредставлений

Звездный комплекс. Всюду ниже будем считать, что относительное копредставление $\mathbf{P} = \langle H, \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$ является ориентированным.

Звездный комплекс $\mathbf{P}^{\mathrm{st}}$ копредставления $\mathbf{P}$ — это граф (в смысле Серра [4]), чьи ребра помечены коэффициентами группы H. Он определяется следующим образом.

Множество вершин — это $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$, множество ребер – это $\mathbf{r}^*$. Для $R \in \mathbf{r}^*$ запишем $R = Sh$, где $h \in H$ и S начинается и заканчивается $\mathbf{x}$-символами. Начальное и конечное отображение задается так: $\iota(R)$ — это первый символ элемента S, $\tau(R)$ — обратный к последнему символу элемента S. Обратное отображение на ребрах задается оператором $\bar{\ }$ из раздела 1. По замечанию в разделе 1 $\bar{R} \neq R$ для любого $R \in \mathbf{r}$, так как $\mathbf{P}$ является ориентированным. Функция разметки определяется по правилу $\lambda(R) = h^{-1}$, и распространяется на пути очевидным образом. Отметим, что $\lambda(\bar{R}) = \lambda(R)^{-1}$.

В [1] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $c_1, \dots c_k$ — последовательность углов, встречающихся при обходе внутренней области Σ картинки $\mathbb{P}$ над $\mathbf{P}$ против часовой стрелки. Тогда

(i) последовательность ребер $W(c_1), \dots, W(c_k)$ является циклом в $\mathbf{P}^{\mathbf{st}}$;

(ii) ребра $W(c_i), W(c_{i+1})$ (индексы по модулю k) взаимно возвратные тогда и только тогда, когда существует дуга α, соединяющая c_1 и c_{i+1} на границе области Σ, так что α, c_1 и c_{i+1} образуют диполь.

Цикл из (i) будем называть *циклом, обеспеченным внутренней областью* Σ. По условию (C_2) из определения картинок, этот цикл имеет тривиальную метку в H. Непустой циклически приведенный цикл в $\mathbf{P}^{\mathbf{st}}$ будет называться *допустимым*, если он имеет тривиальную метку в H. Каждая внутренняя область приведенной картинки над $\mathbf{P}$ обеспечивает допустимый цикл в $\mathbf{P}^{\mathbf{st}}$.

Проверка аторичности. Пусть k — положительное целое число. Назовем *k-колесом* (нетривиальную) связную дисковую картинку $\mathbb{W}$ над $\mathbf{P}$, которая содержит диски $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$ и удовлетворяет следующим условиям:

(*i*) каждая дуга в $\mathbb{W}$ идет от Δ_0 или от $\partial\mathbb{W}$;

(*ii*) каждая дуга в $\mathbb{W}$ либо идет от Δ_j для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$, либо соединяет Δ_0 и $\partial\mathbb{W}$;

(*iii*) каждый диск картинки $\mathbb{W}$ имеет угол, который лежит в области, имеющей общие точки с $\partial\mathbb{W}$. Диск Δ_0 является центром (*ступицей*) k-колеса;

(*iv*) количество дисков $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, удовлетворяющих свойствам $(i) - (iii)$ максимально возможное для данного Δ_0.

Заметим, что для данного диска Δ_0 имеется конечное множество k-колес со ступицей Δ_0, причем все эти k-колеса будут содержать одно и тоже множество дисков $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$. Назовем это множество k-колес *классом k-колес со ступицей* Δ_0. Назовем класс k-колес *приведенным*, если любое k-колесо из этого класса приведено.

Определение 3. Пусть p — некоторое положительное целое число. Скажем, что копредставление $\mathbf{P}$ удовлетворяет $C(p)$, если не существует приведенных классов k-колес над $\mathbf{P}$ при $k < p$.

Определение 4. Пусть q — некоторое положительное целое число. Скажем, что $\mathbf{P}$ удовлетворяет $T(q)$, если нет допустимых циклов в $\mathbf{P}^{\mathrm{st}}$ длины l для $3 \leqslant l < q$.

В [1] доказан следующий результат.

Теорема 5. Если $\mathbf{P}$ удовлетворяет $C(p), T(q)$, где $1/p + 1/q = 1/2$, тогда $\mathbf{P}$ является асферическим.

Получим аналог этого результата для аторичности.

Теорема 6. Если $\mathbf{P}$ удовлетворяет $C(p), T(q)$, где $1/p + 1/q < 1/2$, тогда $\mathbf{P}$ является аторическим, в частности, не существует связных приведенных кольцевых картинок над $\mathbf{P}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}$ — приведенная связная торическая картинка над $\mathbf{P}$. В силу связности картинки $\mathbb{P}$ и циклической приведенности определяющих соотношений относительного копредставления $\mathbf{P}$, каждая внутренняя область картинки $\mathbb{P}$ имеет как минимум два угла. Избавляемся от всех внутренних областей картинки $\mathbb{P}$, которые содержат ровно два угла, путем отождествления двух граничных дуг области. Обозначим модифицированную картинку через $\mathbb{P}^*$. Процесс отождествления изображен на рис. 2. (Отметим, что диски Δ и Δ' не обязательно различны.)

Рис. 2

Метки на дугах и углах картинки $\mathbb{P}$, участвующих в отождествлении, удаляются при переходе к $\mathbb{P}^*$. Однако оставшиеся углы в $\mathbb{P}^*$ помечены коэффициентами. По лемме 3 (i), каждая внутренняя область в $\mathbb{P}^*$ обеспечивает допустимый цикл длины как минимум 3, и следовательно длины как минимум q в силу свойства $T(q)$. Если из диска $\Delta \in \mathbb{P}^*$ исходят k дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{P}^*$, то используя строение картинки $\mathbf{P}$ около Δ можно определить приведенный класс k-колес со ступицей Δ. По свойству $C(p)$ имеем, что из каждого диска $\Delta \in \mathbb{P}^*$ исходят как минимум p дуг.

Возможны три случая:

(а) найдется открытое подмножество U_1 тора, которое содержит все дуги и диски в $\mathbb{P}^*$ и гомеоморфно диску, тогда можно считать $\mathbb{P}$ сферической картинкой на диске D^2, равном замыканию U_1;

(б) подмножества U_1 из (а) не существует, но найдется открытое подмножество U_2 тора, которое содержит все дуги и диски в $\mathbb{P}^*$ и гомеоморфно кольцу, тогда можно считать $\mathbb{P}$ кольцевой картинкой на кольце Ω, равном замыканию U_2;

(в) подмножеств U_1 и U_2 из (а) и (б) не существует.

Рассмотрим для начала случаи (а) и (б). Стянем каждый диск из $\mathbb{P}^*$ в точку и отождествим границу ∂D^2 с точкой (соотв., границы кольца Ω с двумя точками), чтобы получить разбиение Θ двумерной сферы с n_0 вершинами, n_1 ребрами и n_2 клетками. Условие $C(p)$ говорит о том, что из каждой вершины разбиения Θ исходит как минимум p ребер, из чего следует, что

$$pn_0 \leqslant 2n_1.$$

Условие $T(q)$ влечет, что все клетки разбиения Θ, кроме одной в случае (а) и двух в случае (б), имеет как минимум q граничных ребер, из чего следует, что

$$q(n_2 - l) \leqslant 2n_1,$$

где $l = 1$ в случае (а) и $l = 2$ в случае (б).

Из этого получаем следующее противоречие:

$$2 = n_0 - n_1 + n_2 \leqslant \frac{2n_1}{p} - n_1 + \frac{2n_1}{q} + l = 2n_1(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - n_1 + l < l.$$

Рассмотрим случай (в). Стянем каждый диск из $\mathbb{P}^*$ в точку и получим разбиение $\hat{\Theta}$ тора с $\hat{n}_0$ вершинами, $\hat{n}_1$ ребрами и $\hat{n}_2$ клетками. Как выше, получаем, что

$$p\hat{n}_0 \leqslant 2\hat{n}_1$$

и

$$q\hat{n}_2 \leqslant 2\hat{n}_1.$$

Из чего также следует противоречие:

$$0 = \hat{n}_0 - \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \leqslant \frac{2\hat{n}_1}{p} - \hat{n}_1 + \frac{2\hat{n}_1}{q} = 2\hat{n}_1(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \hat{n}_1 < 0. \quad \blacksquare$$

Пример 1. Рассмотрим относительное копредставление из [1]

$$\mathbf{P} = \langle H, x; xa_1xa_2 \ldots xa_n \rangle,$$

где $a_1, \ldots, a_n \in H$. Как отмечено в [1], $\mathbf{P}$ является ориентированным и удовлетворяет $T(4)$. Если $n \geqslant 5$ и все a_i различны, то $\mathbf{P}$ удовлетворяет также и $C(5)$, следовательно, $\mathbf{P}$ является аторическим по теореме 6.

Список литературы

1. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations// Proc. Edinburgh Math. Soc. 1992. vol. **35** (ser. II), part 1. P. 1-40.
2. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 448 с.
3. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 456 с.
4. Serre J.-P. Trees. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980. 142 p.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

On atorical relative presentations

77-30569/251232

11, November 2011

O. V. Kulikova

Bauman Moscow State Technical University
olga.kulikova@mail.ru

W.A. Bogley and S.J. Pride researched aspherical relative presentations. In the present paper relative presentations are considered with respect to atoricity. Similar to one of the conditions of W.A. Bogley and S.J. Pride for asphericity, a sufficient condition for atoricity is given. For the group, defined by orientable atorical relative presentation, some properties of commutative elements are obtained. In addition, for the group, defined by orientable relative presentation, over which there is no connected reduced annulus picture, some properties of conjugated elements and commutative elements are obtained.

References

1. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations// Proc. Edinburgh Math. Soc. 1992. vol. **35** (ser. II), part 1. P. 1-40.
2. A. Ol'shanskii. Geometry of defining relations in groups. Moscow: Nauka. Main Edit. Board for Phys. and Math. Lit., 1989. 448 p.
3. W.Magnus, A. Karrass, D.Solitar. Combinatorial group theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. Interscience Publishers, NewYork-London-Sydney, 1966. 444 p.
4. Serre J.-P. Trees, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980. 142 p.