электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

М-оценки коэффициентов $2D$-авторегрессии с необязательно выпуклой функцией потерь

77-30569/246206

10, октябрь 2011

В. Б. Горяинов*, **Е. Р. Горяинова****

УДК 519.234.3

*МГТУ им. Н.Э. Баумана
**Высшая школа экономики
mathmod@bmstu.ru

1. Введение

Во многих областях науки и техники, в частности в теории распознавания образов и обработки изображений [1] и в эконометрике [2] для решения ряда задач фильтрации и прогноза используется модель 2D-авторегрессии

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \epsilon_{ij}, \qquad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

в которой неизвестные авторегрессионные коэффициенты $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})^T$ подлежат оцениванию по наблюдениям авторегрессионного поля X_{ij} на прямоугольной решетке $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$. Если обновляющее (инновационное) поле ϵ_{ij} не является гауссовским и/или поле X_{ij} наблюдается с ошибками, то наиболее популярные оценки наименьших квадратов параметра a [3] теряют свою эффективность. В этом случае целесообразно использовать более робастные процедуры [4–6]. В частности, М-оценка с функцией потерь Хьюбера частично наследует преимущества как оценок наименьших квадратов, так и оценок наименьших модулей [7]. В [7] для М-оценок с выпуклой функцией потерь (к которым относится функция Хьюбера) найдено асимптотическое распределение, оказавшееся нормальным, что позволило строить доверительные интервалы для коэффициентов a уравнения (1) и проверять различные статистические гипотезы об a. Более робастные оценки получаются, если вместо неограниченной функции Хьюбера взять подходящую ограниченную функцию, например, бивес Тьюки. Однако эта функция не является выпуклой.

В настоящей работе доказана асимптотическая нормальность М-оценок коэффициентов a уравнения (1) с необязательно выпуклой функцией потерь. Методом Монте-Карло проведено сравнение М-оценок с функциями потерь Хьюбера и Тьюки с оценками наименьших квадратов в предположении о наблюдении поля X_{ij} со случайными аддитивными ошибками.

2. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим поле (1), где $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров, а ϵ_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Будем предполагать поле (1) стационарным. Как показано в [3], достаточным условием этого является отсутствие корней уравнения

$$1 - a_{10}z_1 - a_{01}z_2 - a_{11}z_1z_2 = 0$$

внутри единичного полидиска

$$|z_1| \leq 1, \quad |z_2| \leq 1,$$

что равносильно выполнению условий (см. [8])

$$|a_{pq}| < 1 \text{ для любых } (p,q) \in \mathcal{I} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\},$$

$$(1 + a_{10}^2 - a_{01}^2 - a_{11}^2)^2 - 4(a_{10} + a_{01}a_{11})^2 > 0,$$

$$1 - a_{01}^2 > |a_{10} + a_{01}a_{11}|.$$

Обозначим через $\hat{a} = (\hat{a}_{10}, \hat{a}_{01}, \hat{a}_{11})^T$ М-оценку параметра a, построенную по наблюдениям $X = \{X_{ij}\}$, $i = 0,\ldots,m, j = 0,\ldots,n$. А именно, $\hat{a}$ — точка минимума функции

$$\mathcal{L}(a) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\rho(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}). \qquad (2)$$

В формуле (2) функция ρ может быть достаточно произвольной. Так, если $\rho(x) = x^2$, то М-оценки превращаются в оценки наименьших квадратов, если

$\rho(x) = |x|$, то М-оценки совпадают с оценками наименьших модулей, а если $\rho(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, то М-оценки становятся оценками максимального правдоподобия. В [7] рассматривалась функция Хьюбера [9, 10]

$$\rho_k(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } |x| \le k, \\ 2k|x| - k^2, \text{если } |x| > k, \end{cases}$$

где k — неотрицательный параметр. Эта функция является квадратичной в окрестности $(-k, k)$ начала координат и растет линейно на бесконечности. Интуитивно ясно, что М-оценки с такой функцией должны наследовать лучшие свойства оценок наименьших квадратов и наименьших модулей. При $k \to \infty$ М-оценки с ρ-функцией Хьюбера переходят в оценки наименьших квадратов, а при $k \to 0$ — в оценки наименьших модулей.

Теорема. Пусть $\hat{a}$ — минимум функции (2), где X_{ij} — стационарное поле, описываемое уравнением (1). Пусть также для $\psi(x) = \rho'(x)$

$$\mathsf{E}[\psi(\epsilon_{11})] = 0, \tag{3}$$

$$\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{11})] < \infty, \tag{4}$$

$$\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})] > 0, \tag{5}$$

а $\psi''(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Тогда при $m, n \to \infty$ случайный вектор $\sqrt{mn}(\hat{a} - a^0)$ асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\frac{\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{11})]}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]^2} B^{-1},$$

где B — ковариационная матрица вектора $Z_{11} = (X_{01}, X_{10}, X_{00})$.

Доказательство. Если a — минимум функции $\mathcal{L}(a)$ в (2), то a является решением системы уравнений

$$L(a) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi\left(X_{ij} - Z_{ij}^T a\right) Z_{ij}, \tag{6}$$

где $Z_{ij} = (X_{i-1,j}, X_{i,j-1}, X_{i-1,j-1})^T$, а T — символ операции транспонирования.

Идея доказательства теоремы состоит в приближении функции $L(a)$ ее линейной частью $\tilde{L}(a)$, доказательства близости $\hat{a}$ и корня $\tilde{a}$ уравнения $\tilde{L}(a) = 0$ и установлении асимптотической нормальности $\tilde{a}$.

Установим на парах индексов (i, j) отношение порядка, полагая $(i, j) < (k, l)$, если: 1) $j < l$ или 2) $j = l$ и $i < k$. Упорядочим массивы ϵ_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ только что введенным отношением порядка на парах (i, j) их индексов. Обозначим через $\mathfrak{A}_{ij}$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{\epsilon_{kl}, (k, l) < (i, j)\}$. Массив σ-алгебр $\mathfrak{A}_{ij}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ упорядочим так же как массивы ϵ_{ij}, X_{ij} и Z_{ij}.

Заметим, что ковариационная матрица $\mathsf{E}(Z_{ij} Z_{ij}^T)$ вектора Z_{ij} в силу стационарности поля X_{ij} не зависит от i и j и совпадает с матрицей B.

Так как ϵ_{ij} не зависит от $\mathfrak{A}_{ij}$, а Z_{ij} измерим относительно $\mathfrak{A}_{ij}$, то

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij} Z_{ij}^T] = \mathsf{E}(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij} Z_{ij}^T | \mathfrak{A}_{ij}]) = \\ = \mathsf{E}(Z_{ij} Z_{ij}^T \mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{ij}) | \mathfrak{A}_{ij}]) = B\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]).\end{aligned}$$

Случайное поле $\psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij} Z_{ij}^T$ является стационарным и эргодическим как функция эргодических полей ϵ_{ij} и X_{ij} [11, с. 170] и по закону больших чисел для эргодических полей [11, с. 181]

$$\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij} Z_{ij}^T \to \mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11}) Z_{ij} Z_{ij}^T] = B\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]. \tag{7}$$

Так как B — ковариационная матрица, то она положительно определена. Поэтому существует невырожденная симметричная положительно определенная матрица V размера 3×3 такая, что $B = V^2$. Сделаем замену переменных

$$\alpha = \sqrt{mn} V (a - a^0), \qquad a = a^0 + \frac{V^{-1}\alpha}{\sqrt{mn}}.$$

Тогда $\hat{\alpha} = \sqrt{mn} V(\hat{a} - a^0)$ является решением уравнения $\Phi(\alpha) = 0$, где

$$\Phi(\alpha) = -\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi\left(\epsilon_{ij} - \frac{Z_{ij}^T V^{-1}\alpha}{\sqrt{mn}}\right) Z_{ij}.$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}$ решение уравнения $\Psi(\alpha) = 0$, где

$$\Psi(\alpha) = \alpha - \frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi(\epsilon_{ij}) Z_{ij}. \tag{8}$$

По центральной предельной теореме для мартингал-разностей [12, p. 171] $\tilde{\alpha}$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием

$$\mathsf{E}\tilde{\alpha} = \frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(\mathsf{E}[\psi(\epsilon_{ij}) Z_{ij} | \mathfrak{A}_{ij}]) =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(Z_{ij} \mathsf{E}[\psi(\epsilon_{ij}) | \mathfrak{A}_{ij}]) =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(Z_{ij} \mathsf{E}[\psi(\epsilon_{ij})]) = 0$$

и ковариационной матрицей

$$\mathsf{cov}(\tilde{\alpha}) = \frac{2}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} \mathsf{E}(\mathsf{E}[\psi(\epsilon_{ij})\psi(\epsilon_{kl}) V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{kl})^T | \mathfrak{A}_{ij}]) +$$

$$+ \frac{1}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{ij}) V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{ij})^T | \mathfrak{A}_{ij}]) =$$

$$= \frac{2}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} \mathsf{E}(\psi(\epsilon_{ij}) \mathsf{E}[\psi(\epsilon_{kl}) V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{kl})^T | \mathfrak{A}_{ij}]) +$$

$$+ \frac{1}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(\psi^2(\epsilon_{ij}) \mathsf{E}[V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{ij})^T | \mathfrak{A}_{ij}]) =$$

$$= \frac{2}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} \mathsf{E}[\psi(\epsilon_{ij})] \mathsf{E}[\psi(\epsilon_{kl}) V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{kl})^T] +$$

$$+ \frac{1}{mn(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{ij})] \mathsf{E}[V^{-1} Z_{ij} (V^{-1} Z_{ij})^T] = \frac{\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{11})]}{(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} I,$$

где I — единичная матрица.

Покажем, что $\hat{\alpha} - \tilde{\alpha} = o_p(1)$ при $m, n \to \infty$, откуда будет следовать асимптотическая нормальность $\hat{\alpha}$ и, стало быть $\hat{a}$. Разлагая $\Phi(\alpha)$ по формуле Тейлора, получим

$$\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi\left(\epsilon_{ij} - \frac{Z_{ij}^T V^{-1} \alpha}{\sqrt{mn}}\right) Z_{ij} - \alpha +$$

$$+\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}}V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi(\epsilon_{ij})Z_{ij}=$$

$$=\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]mn}V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha Z_{ij}-\alpha+$$

$$+\frac{1}{2(mn)^{3/2}\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]}V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi''\left(\epsilon_{ij}-\tau_{ij}\frac{Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha}{\sqrt{mn}}\right)|Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha|^{2}Z_{ij}+$$

$$+o_p(1),\quad 0<\tau_{ij}<1.$$

Учитывая (7), получим, что

$$\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]mn}V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha Z_{ij}-\alpha=o_p(1).$$

Из ограниченности $\psi''(x)$ и положительной определенности V^{-2} следует, что

$$\mathsf{E}\left|\frac{1}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})](mn)^{3/2}}V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi''\left(\epsilon_{ij}-\tau_{ij}\frac{Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha}{\sqrt{mn}}\right)|Z_{ij}^{T}V^{-1}\alpha|^{2}Z_{ij}\right|\leq$$

$$\leq \mathrm{Const}|\alpha|^{2}\left(\max\left|\frac{Z_{ij}}{\sqrt{mn}}\right|\right)V^{-1}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}[Z_{ij}^{T}V^{-2}Z_{ij}]=o_p(1)$$

равномерно для любого α из произвольного компактного множества в $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\Phi(\alpha)-\Psi(\alpha)=o_p(1)\qquad \text{при } m,n\to\infty.$$

Из независимости ϵ_{ij} от Z_{ij} и от ϵ_{kl} и $\tilde{X}_{kl}$ при $(k,l)<(i,j)$ следует, что

$$\mathsf{E}|\Psi(\alpha)-\alpha|^{2}=\mathsf{E}[|\tilde{\alpha}|^{2}]=\mathsf{E}|V^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi(\epsilon_{ij})Z_{ij}|^{2}=$$

$$=\mathsf{E}[|\psi(\epsilon_{11}|^{2}]\mathsf{E}[Z_{11}{}^{-2}Z_{11}^{T}]<\infty.$$

Поэтому можно выбрать постоянную K таким образом, чтобы $\mathsf{P}\{|\Psi(\alpha)-\alpha|^{2}<K\}$ была сколь угодно большой. Так как

$$|\Phi(\alpha)-\alpha|\leq|\Phi(\alpha)-\Psi(\alpha)|+|\Psi(\alpha)-\alpha|\leq \mathrm{Const}_1 \text{ для всех } \alpha\in[-K,K],$$

то по теореме Брауэра [13, с. 506] существует неподвижная точка $\hat{\alpha}$ у функции $h(\alpha) = \Phi(\alpha) - \alpha$, т.е. $\Phi(\hat{\alpha}) = 0$, причем $|\hat{\alpha}| \le K$ с вероятностью сколь угодно близкой к 1. Отсюда и из (8) следует, что

$$|\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}| = |\Psi(\hat{\alpha})| = |\Phi(\hat{\alpha}) - \Psi(\hat{\alpha})| \to 0$$

по вероятности.

Таким образом $\hat{\alpha}$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием α и ковариационной матрицей $\frac{\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{11})]}{(\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})])^2} I$, а $\hat{a}$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием α и ковариационной матрицей $\frac{\mathsf{E}[\psi^2(\epsilon_{11})]}{\mathsf{E}[\psi'(\epsilon_{11})]^2} B^{-1}$. Теорема доказана.

Пример.

При помощи пакета MATLAB были смоделированы $N = 500$ матриц X_{ij}, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ размера $m = n = 30$ значений поля (1) с $a = (0.40, -0.50, 0.90)$. Случайные величины ϵ_{ij} в (1) предполагались гауссовскими с математическим ожиданием $\mathsf{E}[\epsilon_{ij}] = 0$ и дисперсией $\mathsf{D}[\epsilon_{ij}] = 1$. Каждое сотое значение X_{ij} искажалось ошибкой v_{ij} — гауссовской случайной величиной с $\mathsf{E}[v_{ij}] = 0$ и дисперсией $\mathsf{D}[v_{ij}] = 81$. Таким образом, наблюдалось поле

$$Y_{ij} = X_{ij} + \eta_{ij} v_{ij},$$

где бернуллиевская случайная величина η_{ij} принимала значения 1 и 0 с вероятностями $\gamma = 0.01$ и $1 - \gamma = 0.99$ соответственно. Случайные величины ϵ_{ij}, v_{ij} и η_{ij}, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, предполагались независимыми.

Средние арифметические по $N = 500$ реализациям оценок наименьших квадратов, М-оценок Хьюбера и М-оценок Тьюки параметра $a = (0.40, -0.50, 0.90)$ равны соответственно $(0.2619, -0.4425, 0.7144)$, $(0.3413, -0.4755, 0.8367)$ и $(0.3967, -0.4980, 0.8959)$.

Средние квадратические отклонения по $N = 500$ реализациям оценок наименьших квадратов, М-оценок Хьюбера и М-оценок Тьюки параметра $a = (0.40, -0.50, 0.90)$ равны соответственно $(0.0645, 0.0408, 0.0866)$, $(0.0342, 0.0225, 0.0351)$ и $(0.0273, 0.0234, 0.0278)$.

Таким образом, результаты моделирования свидетельствуют о преимуществе М-оценок с функцией потерь Тьюки над М-оценками с функцией потерь Хьюбера и в особенности над оценками наименьших квадратов.

3. Заключение

М-оценки параметров $2D$-авторегрессионной модели являются состоятельными и асимптотически нормальными. Они значительно превосходят в эффективности оценки наименьших квадратов и заметно превосходят в эффективности М-оценки в достаточно типичном случае, когда наблюдения авторегрессионного поля являются нормальными и измеряются с достаточно редкими ошибками.

Список литературы

1. *Mast F., Jancke L.* (Eds.) Spatial Processing in Navigation, Imagery and Perception. New York: Springer, 2007. 440 p.
2. *LeSage J. P., Pace R. K.* Introduction to Spatial Econometrics. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. 273 p.
3. *Tjostheim D.* Statistical Spatial Series Modelling //Advances in Applied Probability. 1978. V. 10. № 1. P. 130–154.
4. *Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р.* Непараметрическая идентификация пространственной модели авторегрессии в условиях априорной стохастической неопределенности //Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 31-41.
5. *Горяинов В. Б.* Идентификация пространственной авторегрессии ранговыми методами. // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 82-95.
6. *Горяинов В. Б.* Оценки наименьших модулей коэффициентов пространственной авторегрессии. // Изв.РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 58–65.
7. *Горяинов В. Б.* М-оценки коэффициентов пространственной авторегрессии. // Автоматика и телемеханика. 2012. В печати.
8. *Basu S., Reinsel G. C.* Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.

9. *Хьюбер П.Дж.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
10. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния.- М.: Мир, 1989. 512 с.
11. *Stout W. F.* Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974. 381 p.
12. *Pollard D.* Convergence of Stochastic Processes. New York: Springer-Verlag, 1984. 223 p.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. I. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

M-estimates for $2D$-autoregression coefficients with unessentially convex loss function

77-30569/246206

10, October 2011
V. B. Goryainov*, E. R. Goryainova**

*Bauman Moscow State Technical University
**Higher School of Economics
mathmod@bmstu.ru

For the process of $2D$-autoregression of order $(1,\ 1)$, M-estimates with unessentially convex loss function were found to be asymptotically normal. Using computer simulation methods, the stability of these estimations to observational overshoots was studied.

References

1. *Mast F., Jancke L.* (Eds.) Spatial Processing in Navigation, Imagery and Perception. New York: Springer, 2007. 440 p.
2. *LeSage J. P., Pace R. K.* Introduction to Spatial Econometrics. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. 273 p.
3. *Tjostheim D.* Statistical Spatial Series Modelling //Advances in Applied Probability. 1978. V. 10. № 1. P. 130–154.
4. Neparametricheskaya identifikaciya prostranstvennoy modeli avtoregressii v usloviyah apriornoy stohasticheskoy neopredelennosti. //Avtomatika I telemehanika. 2010. № 2. C.31-41.
5. *Горяинов В. Б.* Iidentifikaciya prostranstvennoy modeli avtoregressii rangovimi metodami. //Avtomatika I telemehanika //. 2011. № 5. C. 82–95.
6. *Горяинов В. Б.* Ocenki naimenshih moduley koefficientov prostranstvennoy avtoregressii // Izvestia RAN. Teoria I sistemy upravleniya. 2011. № 4. C. 58–65.
7. *Горяинов В. Б.* M-ocenki koefficientov prostranstvennoy avtoregressii // Avtomatika I telemehanika. 2012. (V pechati).
8. *Basu S., Reinsel G. C.* Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.

9. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.
10. Hampel F., Ronchetti E., Rausseu P.,Shtael V. Robastnost v statistike. Podhod na osnove funkcii vliania. M.: Mir, 1989. 512 s.
11. *Stout W. F.* Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974. 381 p.
12. *Pollard D.* Convergence of Stochastic Processes. New York: Springer-Verlag, 1984. 223 p.
13. Danford N., Schvarts G. Lineynie operatori. Obchshaya teoria. M.: IL, 1962. 896 s.