электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Модификация алгоритма построения реализации отображения вход–выход

77-30569/245858

10, октябрь 2011
А. В. Евсеев
УДК 517.977

МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

1. Введение

В статье [1] дано теоретическое обоснование перехода от описания системы с управлением при помощи уравнений отображения вход–выход к описанию с помощью уравнений состояния. Такой переход называется реализацией отображения вход–выход в виде уравнений состояния.

В работе [2] на основе теоретического обоснования разработан алгоритм построения реализации. Недостатком алгоритма является то, что на одном из шагов проверка интегрируемости распределения производится при помощи непосредственного поиска первых интегралов, что может приводить к отрицательному результату, если первые интегралы не находятся аналитически. В данной работе предлагается модификация алгоритма, позволяющая проверять интегрируемость распределения, используя условие Фробениуса на языке дифференциальных форм.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с выходом

$$y_i^{(k_i)} = \varphi_i\left(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s)}\right), \quad i = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

где $y = (y_1, \dots, y_p)$, $y^{(k-1)} = (y_1^{(k_1-1)}, \dots, y_p^{(k_p-1)})$, $u = (u_1, \dots, u_m)$.

Представление (1) — это запись системы с управлением в виде уравнений отображения вход–выход.

Требуется найти такую замену переменных

$$x = X(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(s-1)}), \tag{2}$$

которая приводит систему (1) к виду

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ n = \sum_{i=1}^{p} k_i, \tag{3}$$

$$y = h(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}). \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) — это реализация отображения вход–выход (1) в виде уравнений состояния, не содержащих производных управления.

Теорема о необходимых и достаточных условиях существования реализации (3), (4) формулируется ниже после некоторых дополнительных определений.

Пусть $\mathcal{F}$ — множество функций, зависящих от y, u и любого конечного числа их производных. В статье [1] приводится следующее определение модуля $\mathcal{H}_1$ над $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy, \dots, dy^{(k-1)}, du, \dots, du^{(s-1)}\}. \tag{5}$$

Модули $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \dots, s+1$ вводятся по индукции:

$$\mathcal{H}_{i+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_i : \dot{\omega} \in \mathcal{H}_i\}. \tag{6}$$

Для каждого $i = \overline{1,p}$ обозначим через κ_i минимальный порядок производной в силу системы (1) переменной y_i, которая зависит от $u_q^{(s)}$ для некоторого $q = \overline{1,m}$, если такая производная существует, и положим $\kappa_i = \infty$, если такой производной нет. В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. a) Реализация вида (3), (4) локально существует для уравнений (1) отображения вход–выход тогда и только тогда, когда модуль $\mathcal{H}_{s+1}$ имеет базис из точных 1-форм.

Если такая реализация существует, то

b) $n = k_1 + \ldots + k_p$;

c) функция $y_i = h_i$ в (4) зависит только от t, x, если $\kappa_i > s$, и зависит от $t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s-\kappa_i)}$, если $\kappa_i \le s$.

Выбрав какой-либо базис $\{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$ в $\mathcal{H}_{s+1}$, условие существования в $\mathcal{H}_{s+1}$ базиса из точных 1-форм можно проверить с помощью условия Фробениуса

$$d\omega_i \wedge \omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0, \quad i = \overline{0, n}. \tag{7}$$

Для построения базисов модулей $\mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_{s+1}$ требуется также лемма 1 из [1].

Лемма 1. Для $j = 1, \ldots, s$ справедливо равенство

$$\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{j+1} \oplus \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{du_1^{(s-j)}, \ldots, du_m^{(s-j)}\}. \tag{8}$$

3. Построение разложения $\mathcal{H}_1$

Теорема 2. a) Любая 1-форма $\omega \in \mathcal{H}_1$ единственным образом может быть представлена в виде следующей суммы

$$\omega = \omega_{s+1} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{s-1} c_q^k du_q^{(k)}, \tag{9}$$

где $\omega_{s+1} \in \mathcal{H}_{s+1}$.

b) Выберем произвольную 1-форму $\omega \in \mathcal{H}_1$

$$\omega = a_0 dt + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{s-1} b_q^k du_q^{(k)}, \quad a_0, a_i^{l_i}, b_q^k \in \mathcal{F}.$$

Тогда коэффициенты c_q^k могут быть найдены согласно следующему рекуррентному соотношению

$$c_q^{s-1} = b_q^{s-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha - 1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}}, \tag{10}$$

$$c_q^j = c_q^{j+1} \left(\frac{d}{dt} \left(\omega - \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{s-1} c_q^k du^{(k)} \right) \right), \quad j = s-2, \ldots, 0, \tag{11}$$

где $c_q^j(\Omega)$ — это соответствующий коэффициент в разложении 1-формы Ω согласно выражению (9).

Доказательство. Проведём доказательство по индукции.

Пусть $j = s-1$. Из леммы 1 следует, что для любой 1-формы ω_1 из $\mathcal{H}_1$ можно найти разложение

$$\omega_1 = \omega_{s+1-(s-1)} + \sum_{q=1}^{m} c_q^{s-1} du_q^{(s-1)}, \tag{12}$$

где $\omega_{s+1-(s-1)} = \omega_2 \in \mathcal{H}_2$.

Коэффициенты разложения $c_1^{s-1}, \ldots, c_m^{s-1}$ можно найти аналитически. Действительно, выберем произвольную 1-форму $\omega_1 \in \mathcal{H}_1$

$$\omega_1 = a_0 dt + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{s-1} b_q^k du_q^{(k)}, \quad a_0, a_i^{l_i}, b_q^k \in \mathcal{F}.$$

Найдём для $\omega_1 \in \mathcal{H}_1$ производную в силу системы (1).

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \dot{a}_0 dt + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} \dot{a}_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{s-1} \dot{b}_q^k du_q^{(k)} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-2} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i+1)} + \\
&+ \sum_{i=1}^{p} a_i^{k_i-1} d\varphi_i(t, y, \ldots, y^{(k-1)}, u, \ldots, u^{(s)}) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{s-1} b_q^k du_q^{(k+1)} = \\
&= \tilde{\omega} + \sum_{q=1}^{m} \left(b_q^{s-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}} \right) du_q^{(s)},
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\tilde{\omega} \in \mathcal{H}_1$.

Продифференцируем также разложение (12).

$$\dot{\omega}_1 = \left(\dot{\omega}_2 + \sum_{q=1}^{m} \dot{c}_q^{s-1} du_q^{(s-1)} \right) + \sum_{q=1}^{m} c_q^{s-1} du_q^{(s)}, \tag{14}$$

где $\left(\dot{\omega}_2 + \sum_{q=1}^{m} \dot{c}_q^{s-1} du_q^{(s-1)} \right) \in \mathcal{H}_1$, а $\sum_{q=1}^{m} c_q^{s-1} du_q^{(s)} \notin \mathcal{H}_1$.

Сравнивая выражение (14) с выражением (13), в котором сумма

$$\sum_{q=1}^{m} \left(b_q^{s-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}} \right) du_q^{(s)}$$

также не принадлежит модулю $\mathcal{H}_1$, видим, что

$$c_q^{s-1} = b_q^{s-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}}. \tag{15}$$

Пусть утверждение теоремы верно для $j = l$, тогда верно следующее выражение

$$\omega = \omega_{s+1-l} + \sum_{q=1}^{m}\sum_{k=l}^{s-1} c_q^k du_q^{(k)}, \tag{16}$$

где $\omega_{s+1-l} \in \mathcal{H}_{s+1-l}$.

Рассмотрим случай $j = l - 1$. Согласно (8)

$$\omega_{s+1-l} = \omega_{s+2-l} + \sum_{q=1}^{m} c_q^{l-1} du_q^{(l-1)}, \tag{17}$$

где $\omega_{s+2-l} \in \mathcal{H}_{s+2-l}$.

Подставив (17) в (16), получим выражение, аналогичное (16), но для $j = l - 1$.

Продифференцируем (16)

$$\dot{\omega}_{s+1-l} = \dot{\omega}_{s+2-l} + \sum_{q=1}^{m}\left(\dot{c}_q^{l-1} du_q^{(l-1)} + c_q^{l-1} du_q^{(l)}\right), \tag{18}$$

где $\dot{\omega}_{s+2-l} + \sum_{q=1}^{m} \dot{c}_q^{l-1} du_q^{(l-1)} \in \mathcal{H}_{s+1-l}$, $\sum_{q=1}^{m} c_q^{l-1} du_q^{(l)} \notin \mathcal{H}_{s+1-l}$.

Так как согласно (6) $\dot{\omega}_{s+1-l} \in \mathcal{H}_{s-l}$, запишем разложение $\dot{\omega}_{s+1-l}$ по лемме 1 в виде

$$\dot{\omega}_{s+1-l} = \tilde{\omega}_{s+1-l} + \sum_{q=1}^{m} \tilde{c}_q^l du_q^{(l)}, \tag{19}$$

где $\tilde{\omega}_{s+1-l} \in \mathcal{H}_{s+1-l}$, а $\tilde{c}_q^l$ — коэффициенты в разложении $\dot{\omega}_{s+1-l}$ согласно (16).

Сравнивая выражения (18) и (19), с учётом (16) получим для $q = \overline{1, m}$

$$c_q^{l-1} = \tilde{c}_q^l = c_q^l\left(\dot{\omega}_{s+1-l}\right) = c_q^l\left(\frac{d}{dt}\left(\omega - \sum_{q=1}^{m}\sum_{k=l}^{s-1} c_q^k du_q^{(k)}\right)\right). \tag{20}$$

Теорема доказана.

Пример. Найдём коэффициенты c_q^{s-2}, $q = \overline{1, m}$. 1-форма $\omega_2 \in \mathcal{H}_2$ выражается из (12) следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_2 \ &= \ a_0 dt + \sum_{i=1}^{p}\sum_{l_i=0}^{k_i-2} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m}\sum_{k=0}^{s-2} b_q^k du_q^{(k)} + \\ &+ \ \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1}\left(dy_\alpha^{(k_\alpha-1)} - \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta^{(s)}} du_\beta^{(s-1)}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Продифференцируем (21) в силу системы (1)

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \tilde{\omega}_2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_\alpha^{k_\alpha-2} + \sum_{\beta=1}^{p} a_\beta^{k_\beta-1}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y_\alpha^{(k_\alpha-1)}}\right)dy_\alpha^{k_\alpha-1} + \\ &+ \sum_{q=1}^{m}\left[b_q^{s-2} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1}\left\{\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s-1)}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}}\right)\right\}\right]du_q^{s-1}, \end{aligned} \qquad (22)$$

где $\tilde{\omega}_2 \in \mathcal{H}_2$.

Тогда по теореме 2 согласно (10) и (11) получим

$$\begin{aligned}c_q^{s-2} &= b_q^{s-2} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1}\left\{\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s-1)}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}}\right)\right\} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_\alpha^{k_\alpha-2} + \sum_{\beta=1}^{p} a_\beta^{k_\beta-1}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y_\alpha^{(k_\alpha-1)}}\right)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_q^{(s)}}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Замечание. Выражение (9) определяет разложение модуля $\mathcal{H}_1$ в прямую сумму модулей над кольцом $\mathcal{F}$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{s+1} \oplus \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{du_1, \ldots, du_m\} \oplus \ldots \oplus \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{du_1^{(s-1)}, \ldots, du_m^{(s-1)}\}. \qquad (24)$$

Отметим, что коэффициенты c_q^k, $q = \overline{1,m}$, $k = \overline{0,s-1}$ находятся аналитически и могут быть получены с использованием системы символьных вычислений.

4. Построение базиса $\mathcal{H}_{s+1}$

Теорема 3. Пусть для модуля $\mathcal{H}_1$ задан некоторый базис

$$dt, dy_1, \ldots, dy_1^{(k_1-1)}, dy_2, \ldots, dy_p^{(k_p-1)}, du_1, \ldots, du_1^{(s-1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s-1)}. \qquad (25)$$

Тогда в качестве базиса модуля $\mathcal{H}_{s+1}$ можно выбрать систему 1-форм

$$dt, \omega_1^0, \ldots, \omega_1^{k_1-1}, \omega_2^0, \ldots, \omega_p^{k_p-1}, \qquad (26)$$

$$\omega_i^{l_i} = dy_i^{l_i} - \sum_{q=1}^{m}\sum_{k=0}^{s-1} c_{i,q}^{l_i,k} du_q^{(k)}, \quad i = \overline{1,p},\ l_i = \overline{0,k_i-1}, \qquad (27)$$

где $c_{i,q}^{l_i,k} = c_q^k(dy_i^{l_i})$ — коэффициенты в разложении 1-форм $dy_i^{l_i}$ согласно (9).

Доказательство. Каждую 1-форму из базиса $\mathcal{H}_1$ можно разложить согласно (9). В этом случае для каждого элемента базиса $\mathcal{H}_1$ получим 1-форму из модуля $\mathcal{H}_{s+1}$, соответствующую слагаемому ω_{s+1} в выражении (9).

Для 1-форм du_q^k, $q = \overline{1,m}$, $k = \overline{0,s-1}$ элемент, соответствующий ω_{s+1} в (9), будет равен нулю, так как каждая из 1-форм du_q^k принадлежит одной из линейных оболочек $\mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{du_1^k, \ldots, du_m^k\}$, $k = \overline{0,s-1}$ в разложении (24), а следовательно, не имеет составляющих в $\mathcal{H}_{s+1}$.

Выразив из (9) для каждой 1-формы $dy_i^{l_i}$, $i = \overline{1,p}$, $l_i = \overline{0,k_i-1}$ соответствующую 1-форму, принадлежащую $\mathcal{H}_{s+1}$, получим набор (27).

Очевидно, что система (26) является линейно независимой. Количество 1-форм в системе равно $1 + \sum_{i=1}^{p} k_i$. При этом размерность модуля $\mathcal{H}_{s+1}$, согласно выражению (24), также равна $\dim H_1 - ms = 1 + \sum_{i=1}^{p} k_i + ms - ms = 1 + \sum_{i=1}^{p} k_i$. Следовательно, система (26) является базисом H_{s+1}.

Замечание. Проверив для системы 1-форм (26) условие Фробениуса (7), можно определить, интегрируемо ли распределение, являющееся сопряжённым дополнением к модулю $\mathcal{H}_{s+1}$.

5. Заключение

Представленный способ построения базиса модуля $\mathcal{H}_{s+1}$ позволяет проверить условие существования реализации вида (3), (4), не прибегая ни к непосредственному интегрированию, ни к проверке ранга функциональных матриц. Кроме того, в случае, когда реализация вида (3), (4) не существует, базис $\mathcal{H}_{s+1}$ может быть использован для проверки условия существования реализации более общего вида, в которой уравнения состояния содержат производные управления.

Следует отметить, что полученный способ проверки интегрируемости можно связать с условием существования реализации, приведённым в работе [3], однако там оно формулируется на языке векторных полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-07-00617 Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-4144.2010.1).

Список литературы

1. *Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Преобразования описаний нелинейных систем. // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 706–715.
2. *Евсеев А.В., Четвериков В.Н.* Использование компьютерной алгебры в задаче реализации динамических систем. // Научный Вестник МГТУ ГА. 2011. № 165. С. 19–25.
3. *Delaleau E., Respondek W.* Lowering the Orders of Derivatives of Controls in Generalized State Space Systems. // Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control. 1995. Vol. 5, No. 3, pp. 1–27.

e l e c t r o n i c   s c i e n t i f i c   a n d   t e c h n i c a l   p e r i o d i c a l

SCIENCE and EDUCATION

El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Modification of Algorithm of Input-Output Map Realization

77-30569/245858

10, October 2011

A. V. Evseev

Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

State-space realization of input-output map is considered. Differential geometry methods are used. Developed in the past realization algorithm includes check of distribution integrability. Infallible method of integrability check is suggested. Frobenius theorem in terms of differential forms is used for this purpose. Decomposition of module based on differentials of system variables is made. Method of basis construction based on the decomposition is obtained. One can use results to check distribution integrability in automatic control problems. Symbolic computation systems utilization is suggested together with results.

References

1. *Krishchenko A.P., Chetverikov V.N.* Transformations of Descriptions of Nonlinear Systems // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No 5, pp. 721-730.
2. *Evseev A.V., Chetverikov V.N.* Using Computer Algebra in the Problem of Realization of Input-Output Maps // Research Herald of the MSTU CA. 2011. No. 165, pp. 19-25.
3. *Delaleau E., Respondek W.* Lowering the Orders of Derivatives of Controls in Generalized State Space Systems // Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control. 1995. Vol. 5, No. 3, pp. 1–27.