

Исследование рабочей характеристики термобиметаллического микроактюатора

77-30569/220677

08, август 2011

автор: Подкопаева А. С.

УДК.539.3

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Podkopaeva.Aнна@gmail.com

Рассмотрен микроактюатор в форме сферического купола, свободно опирающегося на плоскость внешним контуром (рис.1). Геометрические размеры купола имеют следующие значения: диаметр основания $D=5$ мм, радиус кривизны купола в недеформированном состоянии $R_m=22,2$ мм, суммарная толщина двух слоев $h=0,04$ мм. Слои имеют следующие физико-механические характеристики: для активного слоя: модуль упругости $E_1=1.35 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_1=0.3$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_1=18.0 \times 10^{-6}$ 1/С°. Для пассивного слоя: модуль упругости $E_2=1.50 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_2=0.3$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_2=1.0 \times 10^{-6}$ 1/С°. Т.о. купол считается тонкой полой оболочкой.

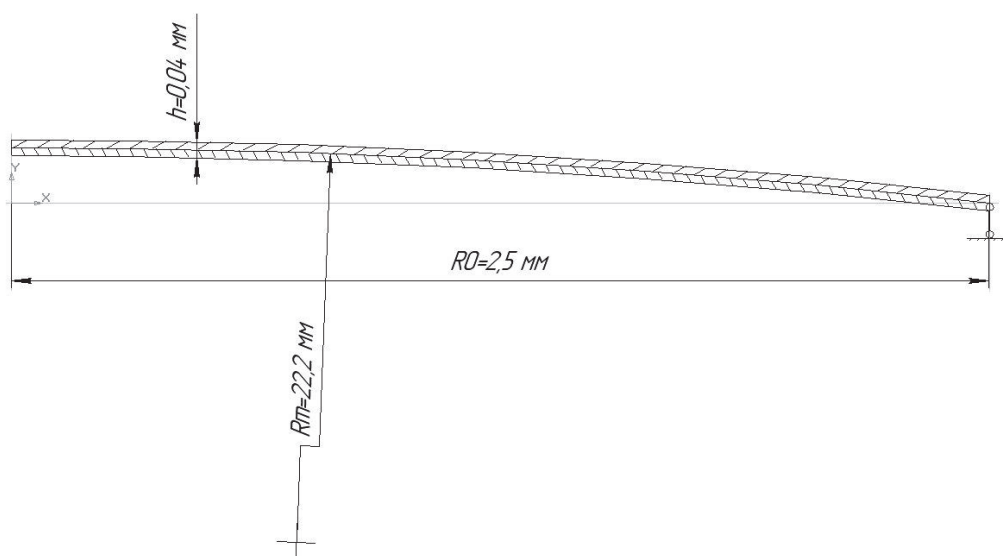


Рис. 1. Микроактюатор в форме сферического купола

С учетом геометрических соотношений и уравнений равновесия для осесимметричных оболочек получаем основную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dS_o} = (1 + \varepsilon_{mo}) \sin \theta - \sin \theta_o, \\ \frac{du}{dS_o} = (1 + \varepsilon_{mo}) \cos \theta - \cos \theta_o, \\ \frac{d\theta}{dS_o} = (1 + \varepsilon_{mo}) \kappa_{mo} + \frac{d\theta_o}{dS_o}, \\ \frac{dU}{dS_o} = -(1 + \varepsilon_{mo}) \left(\frac{\cos \theta}{X_o + u} U - \frac{N_t}{X_o + u} + q_u \right), \\ \frac{dV}{dS_o} = -(1 + \varepsilon_{mo}) \left(\frac{\cos \theta}{X_o + u} V + q_v \right), \\ \frac{dM_m}{dS_o} = -(1 + \varepsilon_{mo}) \left(\frac{\cos \theta}{X_o + u} (M_m - M_t) - U \sin \theta + V \cos \theta \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\{X\} = \{u \quad v \quad \theta \quad U \quad V \quad M_m\}^T$ - вектор неизвестных в текущем состоянии оболочки,

u, v – горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения,

θ – угол поворота нормали,

U, V - горизонтальная и вертикальная составляющие внутреннего усилия,

M_m – меридиональный момент.

В основной системе уравнений (1) приняты следующие вспомогательные обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_o = -\frac{1}{\rho_o} S_o, \\ X_o = -\rho_o \sin \theta_o, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{mo} &= \frac{1-\mu^2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} (U \cos \theta + V \sin \theta) - \mu \frac{u}{X_o} + \\ &\quad + \frac{T(1+\mu)}{E_1 h_1 + E_2 h_2} (E_1 h_1 \alpha_1 + E_2 h_2 \alpha_2), \\ \kappa_{mo} &= \frac{3(1-\mu^2)}{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3} M_m - \mu \frac{X_o + u}{X_o} \left(\frac{\sin \theta}{X_o + u} - \frac{\sin \theta_o}{X_o} \right) + \\ &\quad + \frac{3T(1+\mu)}{2(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)} (E_1 h_1^2 \alpha_1 + E_2 h_2^2 \alpha_2), \\ N_t &= \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{X_o} + \mu \varepsilon_{mo} \right) - \frac{T}{1-\mu} (E_1 h_1 \alpha_1 + E_2 h_2 \alpha_2), \\ M_t &= \frac{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}{3(1-\mu^2)} \left[\frac{X_o + u}{X_o} \left(\frac{\sin \theta}{X_o + u} - \frac{\sin \theta_o}{X_o} \right) + \mu \kappa_{mo} \right] - \\ &\quad - \frac{T}{2(1-\mu)} (E_1 h_1^2 \alpha_1 - E_2 h_2^2 \alpha_2), \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где θ_0 - угол наклона касательной к меридиану в недеформированном состоянии.

Основной задачей, возникающей при численном анализе процесса деформирования термобиметаллических элементов, является определение рабочей характеристики, т.е. зависимости между перемещением характерной точки элемента и изменением температуры окружающей среды – T . Данная задача была решена с помощью метода продолжения по параметру.

НДС купола описывается системами уравнений (1) – (3). В силу пологости оболочки горизонтальными распределенными силами инерции q_u пренебрегаем.

Для возможности реализации численного счета малая область в центре купола считается абсолютно жесткой. Граничные условия соответствуют условиям шарнирного опирания:

$$S_0 = S_{beg} \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ \theta = \theta_0 \\ V = 0 \end{cases} \quad S_0 = S_{end} \rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ U = 0 \\ M_m = 0 \end{cases} \quad (6)$$

По полученным граничным условиям на каждом шаге итерации вычисляем следующие невязки:

$$\begin{aligned} r_1 &= -v \\ r_2 &= -U \\ r_3 &= -M_m \end{aligned} \quad (7)$$

Имеем нелинейную краевую двухточечную задачу, которая решается методом Ньютона:

$$[J]\{\Delta x^{(k)}\} = \{r^{(k)}\}, \quad (8)$$

где $\{r^{(k)}\}$ - вектор невязок на k -ом шаге итерации; J – матрица Якоби, вычисляемая при помощи интегрирования системы с пробными начальными векторами:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta r_{11}}{\delta x_1} & \frac{\delta r_{12}}{\delta x_2} & \frac{\delta r_{13}}{\delta x_3} \\ \frac{\delta r_{21}}{\delta x_1} & \frac{\delta r_{22}}{\delta x_2} & \frac{\delta r_{23}}{\delta x_3} \\ \frac{\delta r_{31}}{\delta x_1} & \frac{\delta r_{32}}{\delta x_2} & \frac{\delta r_{33}}{\delta x_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Для интегрирования системы из 6-ти дифференциальных уравнений используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Для определения сходимости итерационного процесса выбрана евклидова норма невязок:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^3 r_i^2} \quad (10)$$

Решение задачи с шагом по параметру разбивается на последовательность нелинейных задач, каждая из которых решается методом Ньютона. В качестве "опорного" решения на первом шаге принимается недеформированное состояние при нулевой температуре, на втором – линейная экстраполяция решения. На всех последующих шагах по параметру начальное приближение определяется с помощью формулы Лагранжа:

$$X_{i+1}^0 = X_i \frac{(q - q_{i-1})(q - q_{i-2})}{(q_i - q_{i-1})(q_i - q_{i-2})} + X_{i-1} \frac{(q - q_i)(q - q_{i-2})}{(q_{i-1} - q_{i-2})(q_{i-1} - q_i)} + X_{i-2} \frac{(q - q_i)(q - q_{i-1})}{(q_{i-2} - q_i)(q_{i-2} - q_{i-1})} \quad (11)$$

Характеристика микроактюатора представляет собой график зависимости прогиба в центре оболочки от температуры (рис. 2). Ветвь графика BD соответствует равновесным, но неустойчивым состояниям. При шаге по температуре точки В и D являются "особыми", то есть матрица Якоби становится вырожденной. В этих условиях продолжение решения становится невозможным, поэтому за параметр продолжения принимается прогиб оболочки в центре, а температура считается зависимой переменной. Для удобства численной реализации такого приема введем расширенный вектор состояния оболочки:

$$Y = [X, T]^T \text{ или } Y = [u, v, \theta, U, V, M_m, T]^T \quad (12)$$

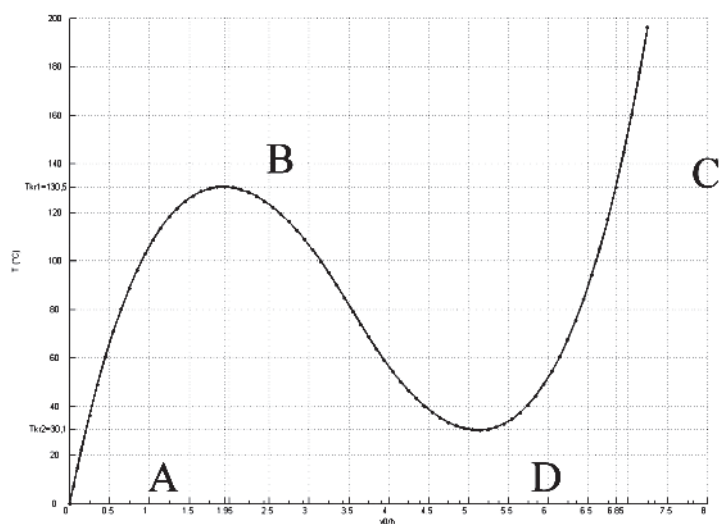


Рис. 2. Характеристика микроактюатора

Изменение формы деформированного меридиана оболочки при нагревании показано на рис. 3.

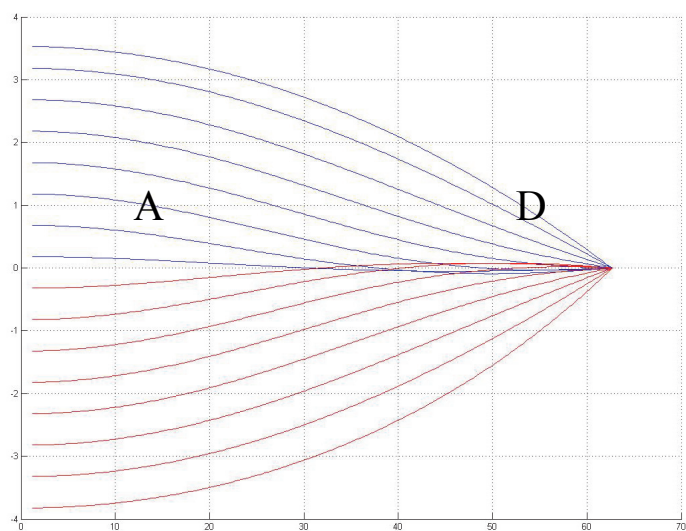


Рис. 3. Изменение формы меридиана микроактюатора

Решение было выполнено для последовательного ряда задач с различными радиусами кривизны. Результаты представлены на рис. 4. Сравнение характеристик ТБ-элементов для некоторых значений радиусов показано на рис. 5.

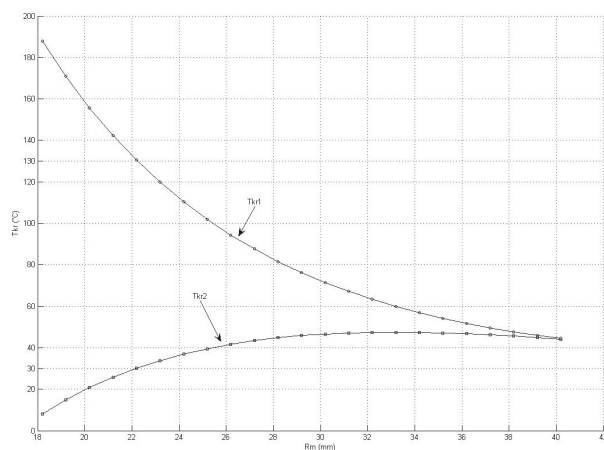


Рис. 4. Зависимость критических температур от радиуса кривизны

При решении задачи в динамической постановке предполагается, что температура линейно зависит от времени по закону:

$$T = 10 * \tau. \quad (13)$$

Вертикальная составляющая силы инерции вычисляется на основе предыдущих значений прогибов. После “прохлопывания” оболочка деформируется так же, как при статическом нагревании.

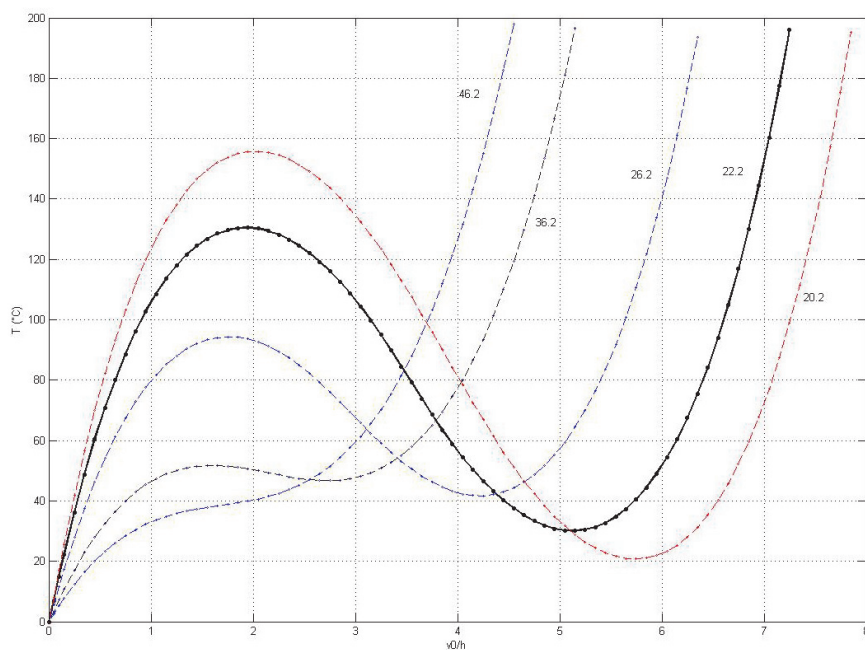


Рис. 5. Сравнение характеристик ТБ-элементов с различными радиусами

Для расчета осесимметричной деформации ТБ-элемента создана программа на языке C++, позволяющая вычислять все необходимые характеристики микроактюатора.

Послойно решается краевая задача, а также начальная задача по времени - методом конечных разностей по явной схеме. Динамическая характеристика микроактюатора представлена на рис. 6, точка С показано крупно на рис. 7.

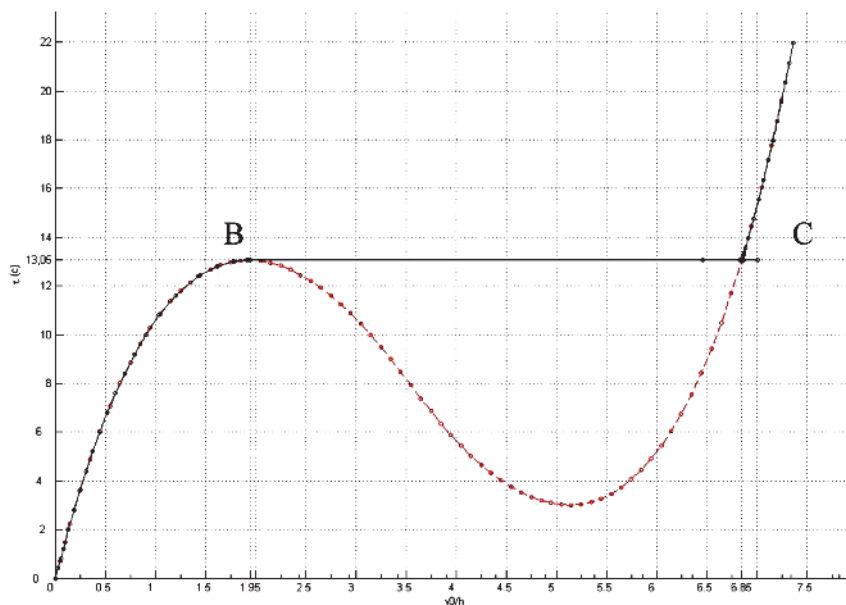


Рис. 6. Динамическая характеристика микроактюатора

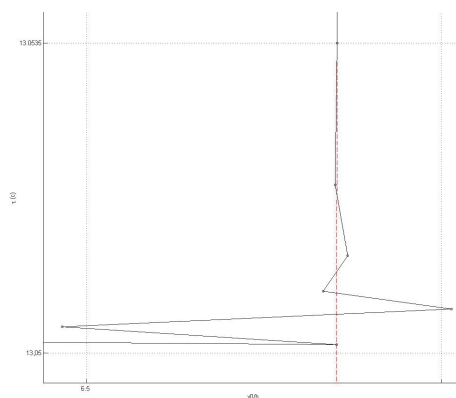


Рис. 7. Динамическая характеристика микроактюатора

Жесткостная характеристика микроактюатора для случая силового нагружения (деформированная форма показаны на рис. 8) была построена с помощью конечно-элементного комплекса ABAQUS (см. рис. 9).

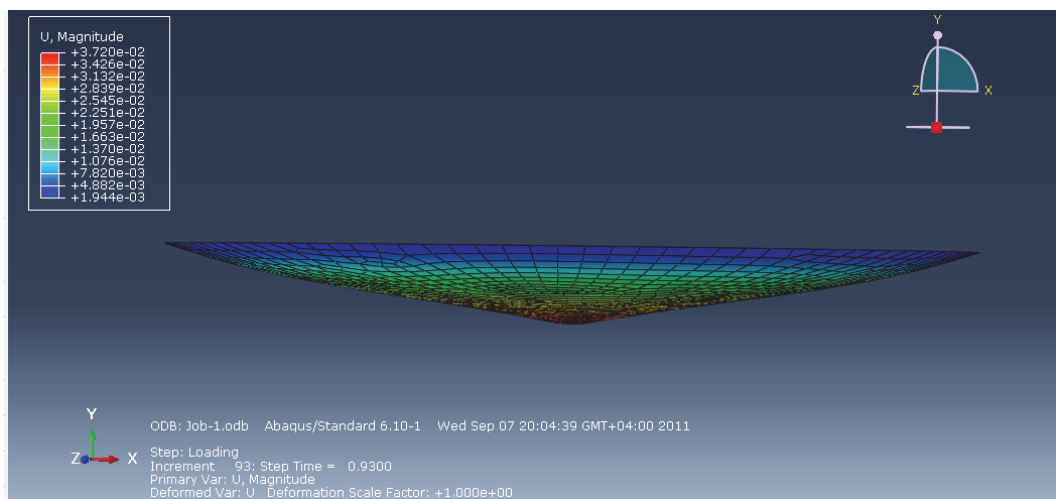


Рис. 11. Деформированная форма

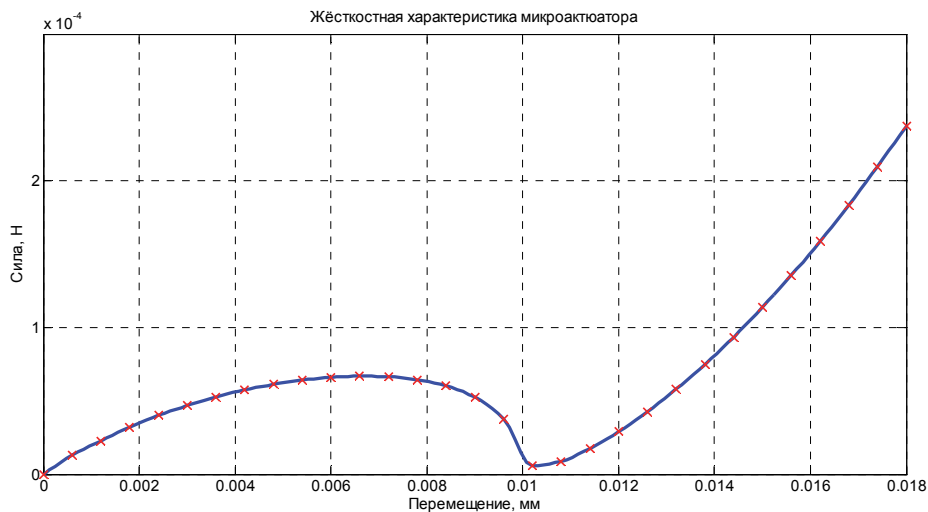


Рис. 12. Жесткостная характеристика микроактюатора, построенная с помощью ABAQUS

Автор выражает благодарность научному руководителю Гаврюшину С.С. за постановку задачи и полезные советы.

ВЫВОДЫ

В работе проведен анализ процесса деформирования микроактюатора, в ходе которого решена краевая и начальная задачи. Исследована рабочая характеристика микропереключателя и влияние на нее геометрических параметров и сил инерции.

Список литературы

1. Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В. Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. - М.: Изд-во ВЗПИ, 1991.-160с.

2. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
3. Гаврюшин С.С. Численный анализ и синтез гибких элементов конструкций с управляемой упругой деформацией. УДК 539.3:621.01
4. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численные методы в проектировании гибких упругих элементов – Калуга, 2001. – 205 с.
5. Демидов С.П. – Теория упругости. М.: «Высшая школа», 1979.
6. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.