электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

О кольцах главных идеалов с делителями нуля
77-30569/217245

10, октябрь 2011

О. Г. Стырт

УДК 512.55+512.552+512.552.37

МГТУ им. Н.Э. Баумана
oleg_styrt@mail.ru

1. Введение

В алгебре (а точнее, в теории колец) достаточно важным является понятие *кольца главных идеалов*. Одним из основных фактов в этой области является факториальность всякого кольца главных идеалов, т. е. существование и единственность разложения элементов кольца на неприводимые множители.

В стандартном определении кольца главных идеалов кольцо предполагается целостным, т. е. не имеющим делителей нуля. В настоящей работе откажемся от этого требования и установим некоторую связь колец главных идеалов в новом, более широком, смысле с кольцами главных идеалов в общепринятой интерпретации.

Все рассматриваемые в работе кольца предполагаются коммутативными, ассоциативными и содержащими единицу. Не будем накладывать на кольцо обязательного условия $0 \neq 1$, т. е. будем рассматривать наряду с остальными и тривиальное кольцо, но под *целостным кольцом* будем подразумевать *нетривиальное* кольцо без делителей нуля.

2. Постановка задачи

Цель настоящей работы — доказать, что любое кольцо главных идеалов (вообще говоря, с делителями нуля) без нильпотентных элементов разлагается в прямое произведение конечного числа колец главных идеалов без делителей нуля.

Идеал $\mathfrak{p}$ кольца A будет называться *простым*, если факторкольцо $A/\mathfrak{p}$ целостное, т. е. если подмножество $A \setminus \mathfrak{p} \subset A$ непусто и мультипликативно. В частности, само кольцо не является своим простым идеалом.

Кольцо, не содержащее ненулевых нильпотентных элементов, назовём для краткости *кольцом без нильпотентных элементов*. Наконец, будем называть кольцо *нётеровым*, если любой его идеал конечно порождён, и *кольцом главных идеалов*, если любой его идеал является главным (т. е. порождается одним элементом), *отказавшись в обоих определениях от требования целостности кольца*. Как и прежде, во-первых, кольцо является нётеровым тогда и только тогда, когда любая возрастающая цепочка его идеалов стабилизируется (что равносильно, любое непустое семейство его идеалов содержит максимальный по включению элемент), а во-вторых, всякое кольцо главных идеалов нётерово.

Как известно, разложение кольца A в прямое произведение колец $A_1, \ldots, A_k$ — это то же самое, что разложение кольца A в прямую сумму своих идеалов $A_1, \ldots, A_k$. Ясно, что все идеалы прямого произведения колец $A_1, \ldots A_k$ суть в точности всевозможные прямые суммы идеалов $I_i \lhd A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. Прямое произведение колец $A_1, \ldots, A_k$ является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда каждое из колец $A_1, \ldots, A_k$ является кольцом главных идеалов.

При взятии прямого произведения колец, однако, нарушается свойство отсутствия делителей нуля, но сохраняется свойство отсутствия нильпотентных элементов, которым, в свою очередь, обладают все целостные кольца. Из вышесказанного следует, что прямое произведение конечного числа целостных колец главных идеалов является кольцом главных идеалов без нильпотентных элементов. В настоящей работе будет доказано следующее (обратное) утверждение.

Теорема. Всякое кольцо главных идеалов A без нильпотентных элементов разлагается в прямое произведение целостных колец главных идеалов $A_1, \ldots, A_k$ и притом единственным образом с точностью до перестановки идеалов $A_i \lhd A$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Согласно утверждению 1, для доказательства этой теоремы достаточно доказать два вспомогательных факта, каждый из которых интересен и сам по себе.

Лемма 1 (тест). Всякое кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов разлагается в прямое произведение конечного числа целостных колец.

Лемма 2. Если кольцо A разлагается в прямое произведение целостных колец $A_1, \ldots, A_k$, а также в прямое произведение целостных колец $A'_1, \ldots, A'_{k'}$, то идеалы $A_1, \ldots, A_k \lhd A$ совпадают с идеалами $A'_1, \ldots, A'_{k'} \lhd A$ с точностью до перестановки (в частности, $k = k'$).

3. Доказательства результатов

Приведём доказательства лемм 1 и 2.

Пусть A — произвольное кольцо. Для элемента $x \in A$ и для идеала $\mathfrak{a} \lhd A$ положим $\mathrm{Ann}(x) := \{y \in A\colon xy = 0\} \lhd A$ и $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) := \{y \in A\colon \mathfrak{a}y = 0\} \lhd A$. Ясно, что при любом $x \in A$ идеалы $\mathrm{Ann}(Ax) \lhd A$ и $\mathrm{Ann}(x) \lhd A$ совпадают.

Фиксируем некоторое кольцо A и докажем для него лемму 2.

Для любого представления кольца A в виде прямого произведения целостных колец $A_1, \ldots, A_k$ множество всевозможных идеалов вида $\mathrm{Ann}(x) \lhd A$ ($x \in A$) состоит в точности из всех идеалов $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i \lhd A$ ($I \subset \{1, \ldots, k\}$). Таким образом, набор идеалов $A_i \lhd A$ ($i = 1, \ldots, k$) однозначно определяется внутренней структурой кольца A, что доказывает для последнего лемму 2. Поскольку кольцо A было выбрано произвольно, лемма 2 доказана полностью.

Дальнейшая часть работы будет посвящена доказательству леммы 1.

Пусть A — некоторое кольцо.

Можно видеть, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. Если кольцо A является прямой суммой своих идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то идеал $\mathfrak{b}$ относительно индуцированных операций является кольцом, изоморфным факторкольцу $A/\mathfrak{a}$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех идеалов $\mathfrak{a} \lhd A$, таких что $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) \neq 0$ (что равносильно, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$ для некоторого идеала $\mathfrak{b} \neq 0$ кольца A). Ясно, что $\mathrm{Ann}(0) = A$. Следовательно, если $A \neq 0$, то множество $\mathcal{M}$ включает в себя идеал $0 \lhd A$ и потому непусто.

У т в е р ж д е н и е 3. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный по включению элемент множества $\mathcal{M}$. Тогда $\mathfrak{p} \lhd A$ — простой идеал.

◀ Согласно условию, $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0$ для некоторого нетривиального идеала $\mathfrak{q} \lhd A$. В частности, идеал $\mathfrak{p} \lhd A$ не совпадает с A. Предположим, что он не является простым. Тогда найдутся идеалы $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \lhd A$, содержащие идеал $\mathfrak{p}$ и не совпадающие с ним, такие что $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$. В силу максимальности элемента $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}$, имеем $\mathfrak{p}_i \notin \mathcal{M}$ $(i = 1, 2)$. Значит, вместе с идеалом $\mathfrak{q} \lhd A$ нетривиальными будут идеалы $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q} \lhd A$ и $\mathfrak{p}_1(\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\mathfrak{q} \lhd A$. С другой стороны, $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0$. Получили противоречие. ▶

У т в е р ж д е н и е 4. Если идеал $\mathfrak{p} \lhd A$ является максимальным по включению элементом множества $\mathcal{M}$, то $\operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(\mathfrak{p})\big) = \mathfrak{p}$.

◀ По условию идеал $\mathfrak{q} := \operatorname{Ann}(\mathfrak{p}) \lhd A$ нетривиален. Идеал $\mathfrak{p}' := \operatorname{Ann}(\mathfrak{q}) \lhd A$ принадлежит семейству $\mathcal{M}$, поскольку $\mathfrak{p}'\mathfrak{q} = 0$ и $\mathfrak{q} \neq 0$. Кроме того, $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$, и, ввиду максимальности элемента $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. ▶

Пусть $\mathfrak{a} \lhd A$ — произвольный идеал, и $\mathfrak{b} := \operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) \lhd A$. Всякий элемент из $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ имеет нулевой квадрат. Следовательно, если A — кольцо без нильпотентных элементов, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$.

У т в е р ж д е н и е 5. Если A — кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов, а $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ — идеалы, такие что $\operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$ и $\operatorname{Ann}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, то $A = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

◀ Достаточно доказать, что идеал $\mathfrak{m} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \lhd A$ содержит единицу кольца A.

Пусть $a, b, d \in A$ — порождающие элементы идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{a} = Aa$, $\mathfrak{b} = Ab$, $\mathfrak{m} = Ad$. Кроме того, $\operatorname{Ann}(a) = \operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} = Ab$ (в частности, $ab = 0$) и $\operatorname{Ann}(b) = \operatorname{Ann}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Элементы a и b принадлежат идеалу $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{m} = Ad$, т. е. $a = a'd$ и $b = b'd$ для некоторых $a', b' \in A$. Полагая $c := a'b'd = a'b = ab'$, получаем, что $c^2 = (a'b)(ab') = (ab)(a'b') = 0$. Поскольку A — кольцо без нильпотентных элементов, имеем $c = 0$, $ab' = 0$, $b' \in \operatorname{Ann}(a) = Ab$, $b' = bd'$, где $d' \in A$. Таким образом, $b = bd'd$, $b(1 - d'd) = 0$, $1 - d'd \in \operatorname{Ann}(b) \subset \mathfrak{m}$. Наконец, $d'd \in Ad = \mathfrak{m}$, и $1 = (1 - d'd) + d'd \in \mathfrak{m}$. ▶

Следствие 1. Если A — кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов, а идеал $\mathfrak{p} \lhd A$ является максимальным по включению элементом множества $\mathcal{M}$, то $A = \mathfrak{p} \oplus \operatorname{Ann}(\mathfrak{p})$.

◀ Вытекает из утверждений 4 и 5. ▶

У т в е р ж д е н и е 6. Если кольцо A является нетривиальным кольцом главных идеалов без нильпотентных элементов, то оно допускает разложение в прямую сумму двух своих идеалов, по крайней мере один из которых прост.

◀ Кольцо главных идеалов A нётерово. Значит, семейство $\mathcal{M}$ его идеалов, будучи непустым, содержит максимальный по включению элемент — идеал $\mathfrak{p} \lhd A$. Этот идеал прост в силу утверждения 3. Далее, согласно следствию 1, $A = \mathfrak{p} \oplus \mathrm{Ann}(\mathfrak{p})$. Это разложение является искомым. ▶

Следствие 2. Всякое нетривиальное кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов разлагается в прямую сумму двух своих идеалов, по крайней мере один из которых является целостным кольцом относительно индуцированных операций.

◀ Вытекает из предложения 6 и утверждения 2. ▶

Следствие 3. Всякое нетривиальное кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов разлагается в прямое произведение двух колец, по крайней мере одно из которых целостно (а другое может быть тривиальным).

Теперь докажем лемму 1.

Фиксируем произвольное кольцо главных идеалов A без нильпотентных элементов.

Рассмотрим всевозможные разложения кольца A в прямое произведение кольца A_0 и целостных колец $A_1, \ldots, A_k$ $(k \geq 0)$. Одно из таких разложений можно получить, положив $k := 0$ и $A_0 := A$. Кольцо главных идеалов A нётерово, а семейство $\mathcal{A}$ идеалов вида $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i \lhd A$, соответствующих всем указанным разложениям, непусто и потому содержит максимальный по включению элемент — идеал $\mathfrak{a} \lhd A$. Данный идеал отвечает некоторому разложению кольца A в прямое произведение колец A_i, $i = 0, \ldots, k$ $(k \geq 0)$, целостных при $i > 0$, и равен $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i \lhd A$. Прямое произведение A колец A_i, $i = 0, \ldots, k$, является кольцом главных идеалов без нильпотентных элементовто же можно сказать и о каждом прямом сомножителе. В частности, A_0 — кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов. Предположим, что оно нетривиально. Тогда, в силу следствия 3, кольцо A_0 разлагается в прямое произведение (возможно, тривиального) кольца A'_0 и целостного (а значит, нетривиального) кольца A_{k+1}, что даёт разложение кольца A в прямое произведение кольца A'_0 и целостных колец $A_1, \ldots, A_{k+1}$. Идеал $\mathfrak{b} := \bigoplus\limits_{i=1}^{k+1} A_i = \mathfrak{a} \oplus A_{k+1} \lhd A$, соответствующий указанному разложению, принадлежит семейству $\mathcal{A}$, но в то же время содержит идеал $\mathfrak{a}$ и не совпадает с ним по причине нетривиальности кольца A_{k+1}. Это противоречит максимальности элемента $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$. Следовательно, $A_0 = 0$, а кольцо A есть прямое произведение целостных колец A_i, $i = 1, \ldots, k$. Тем самым лемма 1 доказана для кольца A и, ввиду произвольности его выбора, доказана полностью.

Таким образом, доказаны леммы 1 и 2, а вместе с ними и теорема 2.

4. Заключение

Мы доказали, что любое кольцо главных идеалов без нильпотентных элементов разлагается в прямое произведение конечного числа целостных колец главных идеалов единственным образом с точностью до перестановки. Если отказаться от требования отсутствия нильпотентных элементов, то вопрос описания и общей структуры колец главных идеалов остаётся открытым.

Список литературы

1. Варден Б.Л., ван дер. Алгебра. М: Наука. 1976. 624 с.

e l e c t r o n i c   s c i e n t i f i c   a n d   t e c h n i c a l   p e r i o d i c a l

SCIENCE and EDUCATION

El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

On principal ideal rings with divisors of zero

77-30569/217245

 # 10, October 2011

O. G. Styrt

Bauman Moscow State Technical University
oleg_styrt@mail.ru

The problem under consideration is a generalized concept of a principal ideal ring and do not suggest that the ring does not have divisors of zero. The problem of classification of principal ideal rings in the new sense and their connection with principal ideal rings in the usual sense are investigated. It is proved that each principal ideal ring (maybe with divisors of zero) without nilpotent elements can be decomposed into a direct product of finitely many principal ideal rings without divisors of zero. For principal ideal rings with nilpotent elements the classification problem is not studied.

References

1. B.L. van der Waerden. ALGEBRA. M: Nauka. 1976. 624 c.