

Томографические методы в теории вторичного квантования

09, сентябрь 2011

авторы: Федоров А. К., Юрченко С. О.

УДК 530.145.1

МГТУ имени Н.Э. Баумана

alesha.fedorov@gmail.com

st.yurchenko@mail.ru

Одним из наиболее активно развивающихся направлений в нерелятивистской квантовой механике является квантовая томография [1-3]. Квантовая томография использует для описания квантовых состояний неотрицательные функции распределения вероятностей – симплектические томограммы. В обзоре [1] рассмотрены основные соотношения, связывающие симплектическую томограмму с волновой функцией, матрицей плотности, функцией Вигнера [4]. Интересным является тот факт, что томограммы могут быть измерены в квантово-оптических экспериментах [5].

Целью настоящей работы является установление связи томографического представления квантовой механики с методами вторичного квантования. Показано, что при построении вторичного квантования в рамках квантовой томографии оператор плотности частиц является многочастичным эквивалентом одночастичного выражения для симплектической томограммы. Обобщены результаты [2] и показано, что преобразования Боголюбова не сводятся к симплектическим преобразованиям, использующимся в квантовой томографии. Предложенные методы квантовой томографии во вторичном квантовании использованы для решения задачи о квантовой цепочке осцилляторов, вычислен спектр фононов и найдена энергия нулевых колебаний.

Томографическое представление квантовой механики использует линейное каноническое преобразование фазового пространства – действие симплектической группы $SP_2(R)$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \eta' & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (1)$$

где q – координата, p – импульс, а μ, μ', η, η' – вещественные числа.

Поскольку (1) является каноническим преобразованием, сохраняется структура фазового пространства с невырожденными кососимметрическими билинейными формами: скобкой Пуассона в классическом случае и коммутатором – в квантовом. Также канонические преобразования сохраняют вид уравнений движения. Частным случаем (1) является действие матриц группы $SO_2(R)$. В таком случае (1) является поворотом фазового пространства на некоторый угол. Тогда симплектическая томограмма превращается в маргинальное распределение гомодинной переменной в квантово-оптических схемах томографии [4]. В общем случае (1) – это поворот фазового пространства с взаимным масштабированием по осям p и q .

Симплектическая томограмма $T(\varepsilon, \mu, \eta)$ наблюдаемой ε , которая является линейной комбинацией квадратурных компонент:

$$\hat{\varepsilon} = \mu \hat{q} + \eta \hat{p}$$

определяется через волновую функцию следующим образом:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = |\psi(\varepsilon)|^2 = \left| \hat{F}[\psi(x)] \right|^2 \quad (2)$$

где F – линейный унитарный оператор.

Можно показать, что этот оператор – дробное преобразования Фурье:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \psi(q) \exp \left[\frac{i\mu}{2\eta} q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q \right] dq \right|^2 \quad (3)$$

Из определения симплектической томограммы (3) следует, что она представляет собой нормированную, положительную и однородную функцию:

$$\int T(\varepsilon, \mu, \eta) d\varepsilon = 1 \quad T(\varepsilon, \mu, \eta) \geq 0 \quad T(\varepsilon, \mu, \eta) = |\lambda| T(\lambda\varepsilon, \lambda\mu, \lambda\eta)$$

В случае квантового фазового пространства (1) задает преобразование операторов координат и импульса. Хорошо известно, что системы, состоящие из большого числа частиц, удобно рассматривать при помощи методов вторичного квантования [6]. Операторы координаты и импульса связаны с операторами рождения и уничтожения следующим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix}$$

где $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ – операторы рождения и уничтожения.

Не нарушая общности, будем рассматривать случай бозе-частиц. Для операторов рождения и уничтожения справедливы коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+ \right] = \delta_{ij} \quad \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j \right] = \left[\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+ \right] = 0$$

Таким образом, можно ввести операторы поля:

$$\hat{\Psi}(\varepsilon) = \sum_i \hat{a} \psi_i(\varepsilon) \quad \hat{\Psi}^+(\varepsilon) = \sum_i \hat{a}^+ \psi_i^*(\varepsilon)$$

волновые функции образуют полную ортонормированную систему; справедливы следующие коммутационные соотношения для операторов поля:

$$\left[\hat{\Psi}(\varepsilon), \hat{\Psi}^+(\varepsilon') \right] = \delta(\varepsilon - \varepsilon') \quad \left[\hat{\Psi}(\varepsilon), \hat{\Psi}(\varepsilon') \right] = \left[\hat{\Psi}^+(\varepsilon), \hat{\Psi}^+(\varepsilon') \right] = 0$$

Вторично квантованный оператор плотности частиц:

$$\hat{\rho}(\varepsilon) = \hat{\Psi}^+(\varepsilon) \hat{\Psi}(\varepsilon)$$

является многочастичным эквивалентом одночастичного выражения для симплектической томограммы (2). Как известно, в классическом случае оператор плотности соответствует обычной плотности вероятности в координатном или импульсном представлении.

По определению интеграл от оператора плотности, взятый по всему пространству, есть оператор полного числа частиц в системе:

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^+(\varepsilon) \hat{\Psi}(\varepsilon) d^3\varepsilon$$

Мощным инструментом вторичного квантования является использование канонических преобразований. В частности семейства симплектических преобразования Боголюбова могут быть использованы для диагонализации гамильтонианов. Структура преобразований Боголюбова близка к (1): они задаются матрицами групп $SP_2(\mathbb{R})$ и $SP_2(\mathbb{C})$ и соответствуют псевдоевклидовым вращениям в

двумерном пространстве-времени (преобразования Лоренца) в случае бозе-частиц, вращению евклидова пространства для ферми-частиц.

В общем виде линейные канонические преобразования – действия группы $SP_2(C)$:

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^+ \end{pmatrix} \quad (4)$$

где u и v – комплексные числа, удовлетворяющие соотношению:

$$|u|^2 - |v|^2 = 1$$

Можно утверждать, что не существует таких комплексных чисел u и v , которые могли бы задавать преобразование вида (1). Эквивалентно утверждение, что элементы матрицы:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u+v & i(u-v) \\ v^*+u^* & i(u^*-v^*) \end{pmatrix}$$

удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} i(v^* - u^*)(u+v) - i(u-v)(u^* + v^*) = 2 \\ |u|^2 - |v|^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) не имеет решений. Поэтому преобразования Боголюбова не являются более общим случаем (1).

Теперь рассмотрим задачу о взаимодействии нескольких частиц в томографическом представлении и используем полученные методы вторичного квантования. Можно применить модель многочастичного квантового осциллятора, подразумевая, что взаимодействие N соседних частиц, описывается гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\left(\mu \hat{\sigma}_i - \eta' \hat{\varepsilon}_i \right)^2}{2m_i} + \frac{K}{2} \left[\mu' \left(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i+1} \right) - \eta \left(\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_{i+1} \right) \right] \right\}$$

где K – параметр.

Учитывая (1) перейдем к операторам рождения и уничтожения:

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{a}_i \left[\mu \sqrt{\frac{\hbar}{m_i \omega_i}} - i\eta \sqrt{\hbar m_i \omega_i} \right] + \hat{a}_i^+ \left[\mu \sqrt{\frac{\hbar}{m_i \omega_i}} + i\eta \sqrt{\hbar m_i \omega_i} \right] \right\}$$

$$\hat{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{a}_i \left[\eta' \sqrt{\frac{\hbar}{m_i \omega_i}} - i\mu' \sqrt{\hbar m_i \omega_i} \right] - \hat{a}_i^+ \left[-\eta' \sqrt{\frac{\hbar}{2m_i \omega_i}} - i\mu' \sqrt{\hbar m_i \omega_i} \right] \right\}$$

Запишем гамильтониан при помощи операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_i} \left(\hat{a}_i + \hat{a}_i^+ \right)^2 + \frac{K}{2} \left[\hat{a}_i + \hat{a}_i^+ - \hat{a}_{i+1} - \hat{a}_{i+1}^+ \right]^2 \right\}$$

Диагонализуем гамильтониан при помощи канонического преобразования (4) и приходим к виду:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \omega(q) \left(\hat{b}_i^+ \hat{b}_i + \frac{1}{2} \right)$$

где частота колебаний (рис. 1):

$$\omega(q) = 2\hbar \sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{q}{2}\right) \quad (6)$$

Найдем энергию нулевых колебаний, приходящуюся на одну частицу (рис. 2):

$$E_0 = \frac{\hbar}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(q) dq = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{q}{2}\right) dq = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (7)$$

На рис. 1 представлен график частоты как функции координаты q и отношения K/m . На рис. 2 представлен график энергии нулевых колебаний как функции параметра K/m .

Таким образом, установлена связь томографического представления квантовой механики с методами вторичного квантования. Показано, что при построении вторичного квантования в рамках томографического представления оператор плотности частиц является многочастичным эквивалентном одночастичного выражения для симплектической томограммы.

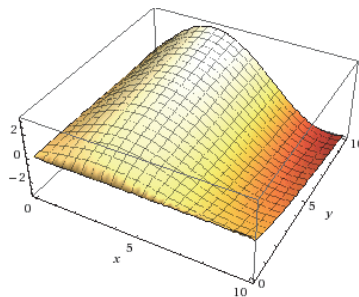


Рис. 1. Частота колебаний (6)

Обобщены результаты [2] с учетом канонического определения матриц группы $SP(R)$ и показано, что преобразования Боголюбова не обобщают симплектическое преобразование, применяемое в квантовой томографии.

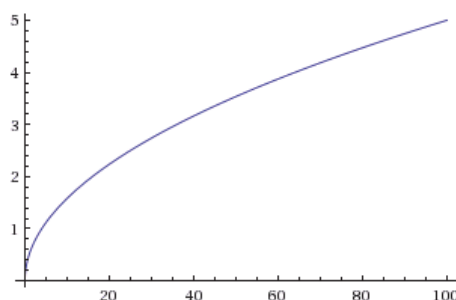


Рис. 2. Энергия нулевых колебаний (7)

Предложенные соотношения для построения вторичного квантования в томографическом представлении опробованы на задаче о квантовой цепочке осцилляторов, вычислен спектр фононов и найдена энергия нулевых колебаний (7).

Библиографический список

1. Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G., Simoni A., Ventriglia F. An Introduction to the Tomographic Picture of Quantum Mechanics // arXiv:0904.4439v1[quant-ph], (2009)
2. Федоров А.К., Юрченко С.О. Вторичное квантование и томографическое представление квантовой механики // Студенческий научный вестник, 2011, 217-218.
3. Федоров А.К., Юрченко С.О. Томографическое представление в квантовой механике // Физическое образование в вузах (приложение). Труды конференции-конкурса молодых физиков, XVII (2011), №1, 23.
4. Wigner E.P. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev., 40 (1932), 749–759.
5. Beck M., Smithey D.T., Raymer M.G. Experimental Determination of Quantum-phase Distribution Using Optical Homodyne Tomography // Phys. Rev. A., 48 (1993), 890–893
6. Левитов Л.С. Функции Грина. – М.: Физматлит. 2002 – 352 с.