электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Особенности учета эффектов наложения связей для систем с сочленениями

 # 09, сентябрь 2011

автор: Ермошенко Ю. В.

УДК 652. 72

НИИ современных технологий, системного анализа и моделирования,
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск
ermosh_emf@irgups.ru

Динамика механических систем, в которых отдельные элементы соединяются с другими через кинематические пары, традиционно рассматривается в теории механизмов и машин применительно к механизмам. Последние представляют собой механические цепи, состоящие из твердых тел, соединенных между собой кинематическими парами; механическая цепь является замкнутой и имеет, как правило, одно неподвижное звено [1, 2]. Однако сочленение может и не быть кинематической парой в общепринятом смысле, а представлять собой соединение более общего вида, в котором особенностями параметров движения обладают сопрягаемые точки двух звеньев; в частности, относительная скорость двух таких точек может быть постоянной или равна нулю (или равно нулю относительное смещение). Неудобства известных подходов к составлению математических моделей заключаются в необходимости учета переносных сил инерции, передаваемых от одного массоинерционного элемента к другому через сочленение, в том числе и через соединение в виде кинематических пар. Особенности динамических свойств таких механических систем представлены в работе [3]. Автором данной статьи рассматриваются некоторые приемы по построению математических моделей механических колебательных систем с сочленениями. Эти приемы позволяют упростить учет переносных сил инерции, возникающих, например, при кинематическом возмущении в системе, один из массоинерционных элементов которой имеет сочленение с вибрирующим основанием. Предлагаемый прием можно соотнести с приемами наложения связей в колебательных системах [4, 5].

Основная идея построения математических моделей заключается в том, чтобы получение математической модели проходило в специально выбранной системе обобщенных координат. Такая система должна содержать координаты относительного движения, которое в случае формирования сочленения «исключается», а соответствующая координата относительного движения принимается, равной нулю. В формализованном виде математическая модель системы с сочленениями может быть получена из матрицы коэффициентов дифференциальных уравнений

исходной системы путем исключения соответствующих строки и столбца, для которых соответствующая координата принимается равной нулю; исключается при этом и соответствующая обобщенная сила. Перегруппировка обобщенных сил на соответствие обобщенным координатам происходит непосредственно в процессе вывода уравнений, и как отдельная операция, может не применяться. Истоки подхода, как уже упоминалось, связаны с понятиями наложения связей, которые нашли отражение в ряде работах, в частности в [5, 6].

I. Общие положения. Сочленения, которые реализуются через соединения между собой различных звеньев (в частности, звеньев, в виде твердых тел, в том числе и неподвижное звено), можно рассматривать как наложение связей. Так, например, связь $y_2 - y_1 \to 0$, (где в свою очередь, $y_2 = y_2^{'} + z_2$, а $y_1 = y_1^{'} + z_1$), можно записать как линейное однородное уравнение относительно координат системы. Если $y_2 - y_1 = 0$ и задача заключается в выполнение этого условия при движении системы, то уравнение может принять вид

$$f(y_1, y_2) = 0. \tag{1}$$

Такая задача может рассматриваться при движении цепной механической цепи при увеличении жесткости k_2 до ∞ между элементами с массами m_1 и m_2 (**рис. 1**).

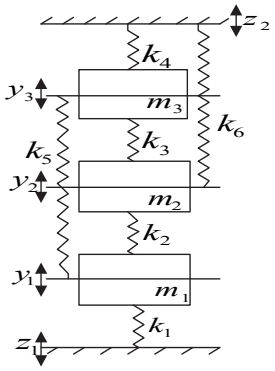

Рис. 1. Расчетная схема виброзащитной системы цепного типа с возможностями сочленения звеньев с массами m_1 и m_2

В общем случае можно полагать, что связь задана уравнением

$$f(q_1, q_2, ...q_n) = 0, \tag{2}$$

где q_1, $q_2 \ldots q_n$ – обобщенные координаты системы.

Предполагается, что налагаемая связь не должна приводить к смещению положения равновесия, в котором по предложению все $q_i=0$, то есть

$$f(0,0...0)=0, \tag{3}$$

что характерно для многих случаев виброзащитной практики.

Если разложить (3) по степеням координат y_i, начиная с членов первого порядка, и ограничиться только такими членами разложения, то уравнение связи можно представить в виде

$$A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + ...A_{1n}q_n = 0, \tag{4}$$

где A_{11}, A_{12}…A_{1n} – постоянные числа – коэффициенты, отражающие свойства механической системы.

II. Учет наложения связей. Введем новую систему координат, используем (4) и получим

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + ... + A_{1n}q_n, \\ r_2 &= q_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n &= q_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

От такой подстановки собственные частоты не изменятся (по существу одна система обобщенных координат заменяется на другую). Кинетическая и потенциальная энергии в новых координатах $r_i (i=\overline{1,n})$, примут вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \dot{a}_{ik}\dot{r}_i\dot{r}_k, П = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}r_i r_k. \tag{6}$$

Отметим, что две квадратичные формы, из которых одна определенно положительна, одним линейным преобразованием могут быть приведены к каноническому виду [5].

Малые колебания системы с *n* степенями свободы около положения устойчивого равновесия, определяемые изменениями обобщенных координат, имеют вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_{11}\sin(p_1 t + \varepsilon_1) + \lambda_{12}\sin(p_2 t + \varepsilon_2) + ... + \lambda_{1n}\sin(p_n t + \varepsilon_n), \\ &\cdots \\ q_n &= \lambda_{n1}\sin(p_1 t + \varepsilon_1) + \lambda_{n2}\sin(p_2 t + \varepsilon_2) + ...\lambda_{nn}\sin(p_n t + \varepsilon_n), \end{aligned} \tag{7}$$

и представляют собой линейные наложения *n* главных гармонических колебаний [5].

Введем выражение, которое отражает ряд подстановок, например, (5), в результате которых частотное уравнение системы принимает вид

$$\begin{Vmatrix} a'_{11}\,p^2 - c'_{11} & a'_{12}\,p^2 - c'_{12} & \ldots. & a'_{1n}\,p^2 - c'_{1n} \\ a'_{21}\,p^2 - c'_{21} & a'_{22}\,p^2 - c'_{22} & \ldots. & a'_{2n}\,p^2 - c'_{2n} \\ a'_{n1}\,p^2 - c'_{n1} & a'_{n2}\,p^2 - c'_{n2} & \ldots. & a'_{nn}\,p^2 - c'_{nn} \end{Vmatrix} = 0\,. \qquad (8)$$

Предположим теперь, что на систему накладывается связь (4), то есть формируется сочленение через процедуру устремления к нулю некоторой выбранной координаты относительного движения. В новых координатах r_i такая связь имеет уравнение

$$r_1 = 0\,. \qquad (9)$$

При этом, *n-1* корней p'_k системы с сочленением располагаются между корнями p_k частотного уравнения исходной системы, что следует из теоремы о наложении связей [5]:

$$p_1 \le p'_1 \le p_2 \le p'_2 \le \ldots. \le p'_{n-1} \le p_n\,. \qquad (10)$$

Таким образом, если на систему с *n* степенями свободы наложена линейная связь, то частоты полученной системы с *n-1* степенями свободы располагаются между частотами первоначальной системы. То есть наложение связи, в соответствии с теорией колебаний, не нарушает условий движения, в смысле их осуществимости и устойчивости, но приводит к сдвигам в спектре частот собственных колебаний [5]. Такой подход может быть также расширен на случай нескольких сочленений (или связей). Если на систему с *n* степенями свободы наложены *h* линейных связей

$$A_s(q) = A_{s1}q_1 + A_{s2}q_2 + \ldots + A_{sn}q_n = 0\,, \qquad (11)$$

$$(s = \overline{1,h})$$

то частота системы с сочленениями

$$p_1^{(h)} < p_2^{(h)} < \ldots < p_{n-h}\,,$$

удовлетворяют неравенствам такого же типа, что и (10).

Связи (11) можно всегда представить уравнениями

$$\begin{array}{l} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \ldots A_{1n}q_n = 0, \\ .\quad B_{22}q_2 + \ldots \quad + B_{2n}q_n = 0, \\ .\quad H_{hh}q_h + \ldots \quad + H_{hn}q_n = 0. \end{array} \qquad (12)$$

и налагать их на заданную систему не сразу все, а последовательно – одна за другой. Переход к координатам, связанным с q_i соотношением (5), не изменяет уравнений естественных связей [5]. Положив $r_1 = 0$, получим систему с *n-1* степенями свободы, собственные частоты $p_k^{(1)}$, которые удовлетворяют неравенству

$$p_k \le p_h^{(1)} \le p_{k+1} (k = \overline{1, n-h}), \tag{13}$$

что можно преобразовать относительно координат s_i, связанных с r_1 $(i = 2,3...n)$ уравнениями

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= B_{22} r_2 + B_{23} r_3 + ... B_{2n} r_n, \\ S_3 &= r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n &= r_n. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Полагая $S_2 = 0$, получим систему с *n-2* степенями свободы, частоты которой $p_k^{(2)}$ будут удовлетворять неравенствам

$$p_k^{(1)} \le p_k^{(2)} \le p_{k+1} (k = \overline{1, n-2}). \tag{15}$$

Продолжая процедуры и вводя последовательно сочленения (связи), можно получить соответствующие неравенства, которые будут иметь место для частот системы после наложения на нее всех h связей. Отметим, что предлагаемые приемы составления математических моделей позволяют детализировать представления о технологии формирования различных классов математических моделей и возможностях операции восстановления исходных моделей при «разборке» сочленения. Важным для нас обстоятельством является то, что формирование сочленения, в рамках теоретической механики, может рассматриваться как наложение связей. Этот процесс приводит к уменьшению числа степеней свободы исходной системы, которая существенным образом изменяет свои свойства. Поэтому формализм, связанный с уменьшением числа степеней свободы по отношению к механической системе, в которой исследуются последствия от введения сочленений, должен учитывать эти обстоятельства.

III. Заключение. Разные формы сочленений предполагают наличие особенностей в приемах соединений с учетом сложности их конструктивного исполнения. Чаще всего движение элементов системы происходит в одной плоскости; обычно выделяют два класса звеньев: неподвижные и подвижные. В связи с этим, одним из наиболее распространенных сочленений является шарнирное соединение в виде кинематической вращательной пары. В простейших вариантах звенья, соединяемые шарниром, допускают вращательно-качательные движения относительно друг друга. При этом сочленение из общего числа степеней свободы производит «исключение» одной степени свободы в движениях. Увеличение количества сочленений, соответствующих числу шарниров, обеспечивает уменьшение общего числа степеней свободы (или числа независимых переменных).

Кроме соединения подвижных звеньев между собой часто встречаются соединения твердых тел с неподвижными звеньями или с основанием (или условно неподвижной системой). Такое сочленение на **рис. 2** показано подштриховкой.

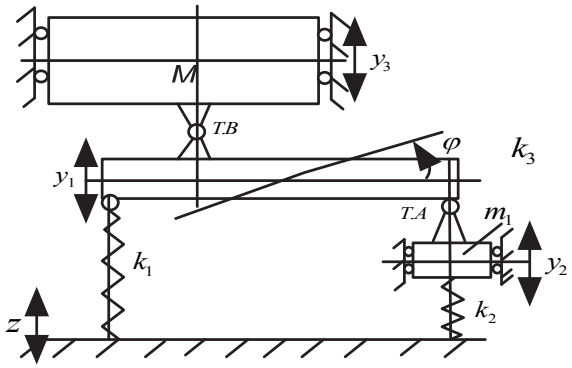

Рис. 2. Расчетная схема ВЗС, имеющей сочленения: между подвижными звеньями, а также между подвижными и неподвижными звеньями (в точках А и В – сочленения в виде вращательных кинематических пар)

Механические колебательные системы могут иметь сочленения различных типов, что обеспечивает особенности структуры системы и, так называемой, «метрики». Математическая модель системы может быть представлена в виде системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$Ay = b,$$

где А– матрица операторных коэффициентов; y – вектор-столбец координат; b – вектор столбец внешних воздействий.

В общем случае матрица A имеет порядок $n \times n$ и является симметричной:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При построении математических моделей систем с сочленениями могут использоваться различные системы обобщенных координат, главным образом такие, в которых координаты отражают относительное движение. Сочленение может быть реализовано по отношению к элементу, совершающему «абсолютное» движение, то есть в неподвижной системе координат. Естественно, при этом, что системы координат допускают взаимные преобразования.

Введение сочленения означает исключение соответствующих столбцов и строк матрицы коэффициентов, включая и «исключения» соответствующей правой части уравнения [4].

Физический смысл операции заключается в том, что сочленение, представленное разностью соответствующих координат, исключается в физическом смысле; вместе с переменной исключаются одновременно и коэффициенты матрицы, определяющие связи между убираемой парциальной системой и остальными. Правая часть уравнения, определяемого строкой, также исключается, поскольку физически «исчезает» точка приложения сил. Внешнее воздействие в этом случае перераспределяется соответствующим образом при выборе систем обобщенных координат, где необходимо соблюдать условия равенства виртуальных работ обобщенных сил в различных системах обобщенных координат. В работах [7,8] рассматривается ряд конкретных примеров использования процедур, построения математических моделей, а также примеры сочленений. Набор возможных сочленений может обеспечивать и более сложные формы взаимодействий, в том числе и на основе кинематических пар IV и III, классов. Как полагает автор, возможности учета особенностей сочленения, в плане построения математических моделей, могут быть распространены и на другие системы с голономными связями.

Библиографический список

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1975. – 638 с.

2. Левитский Н.И. Колебания в механизмах / Н.И. Левитский – М.: Наука, 1988. – 356 с.

3. Лилов Л. К. Моделирование систем связанных тел: монография / Л.К.Лилов. - М. : Наука, 1993. - 272 с.

4. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Виброзащитные системы с сочленениями. Технология построения математических моделей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Вып. 3 (27). – Иркутск. 2010. С. 8-18.

5. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 549 с.

6. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: в 2 т. Т 2 Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 640 с.

7. Елисеев С.В. Возможности сочленения твердых тел в цепных механических системах / С.В. Елисеев, Ю.В. Ермошенко, И.В.Фомина // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование – Иркутск: ИрГУПС, №3 (27). – 2010. – С. 138 – 146.

8. Хоменко А.П. Сочленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы системы / // А.П. Хоменко, С.В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, №4(28). – 2010. – С.8 – 15.