

**Условия стягиваемости. Теоремы достаточности и перечисление**

# 07, июль 2011

автор: Божко А. Н.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Эта статья является продолжением цикла работ, посвященных моделированию механических связей изделий. Цикл стартовал с публикации [2] и продолжен в работе [3].

Для описания позиционных механических связей, доставляющих деталям машин и механических приборов определенность базирования в составе изделия, автор предлагает использовать гиперграф  $WS = (X, R, W)$ . В этой модели  $X$  – множество вершин,  $R$  – множество гиперребер, а  $W$  – инцидентор, который каждому ребру  $r \in R$  ставит в соответствие множество инцидентных вершин  $W(r) \subseteq X$ . Вершины гиперграфа описывают детали, а гиперребра – минимальные геометрические группировки деталей. В [2] эти группировки называются В-множествами и определяются с точностью, которую доставляет теория базирования и требует интуиция конструктора.

Предложенная модель оказалась весьма содержательной. Оказалось, что в ее терминах можно представить множество структурных и динамических свойств механических систем, например последовательность сборки и схему технологического членения. В [2] показано, что математическим описанием последовательности сборки служит упорядоченность нормальных стягиваний ребер гиперграфа  $WS$ , переводящая исходную структуру в одновершинный гиперграф. Нормальное стягивание заключается в удалении гиперребра степени (кратности) два и отождествлении двух инцидентных данному ребру вершин.

Основной областью применения гиперграфовой модели механических связей является механосборочное производство, но, по всей видимости, ей можно придать более широкое толкование, распространив на процессы взаимного координирования абсолютно твердых элементов, принадлежащих системам различной физической природы. Например, монтаж аппаратов и установок, строительство сооружений и даже синтез некоторых классов наносистем могут быть описаны в терминах гиперграфов. По этой причине большой научный и практический интерес представляет задача получения необходимых и достаточных условий стягиваемости гиперграфов.

Необходимые условия стягиваемости для гиперграфов общего вида получены автором достаточно давно [4]. Они эксплицируются следующей теоремой о стягиваемости.

**Теорема 1.** Пусть существует последовательность нормальных стягиваний вершин гиперграфа  $WS = (X, R, W)$ , превращающая  $WS$  в одновершинный гиперграф без петель, тогда выполняются условия:

1. Среди ребер  $WS$  существует по крайней мере одно ребро степени 2 (S1).
2. Гиперграф является связным (S2).
3. Количество вершин  $|X|$  и ребер  $|R|$  гиперграфа  $WS$  удовлетворяют линейному ограничению  $|X| = |R| + 1$  (S3).

В [3] сформулирована и доказана теорема 2 о достаточных условиях стягиваемости для одного важного частного случая.

**Теорема 2.** Если гиперграф  $WS = (X, R, W)$ , не содержащий висячих ребер, удовлетворяет равенствам  $|X| = |R| + 1$  и  $\rho(WS) = |R|$ , то он стягиваемый. Здесь  $\rho(WS)$  – ранг гиперграфа.

Хотя формулировка достаточных условий стягиваемости в общей ситуации пока неизвестна, эту задачу удалось решить для нескольких частных подклассов гиперграфов. Они рассматриваются в этой статье.

**Теорема 3.** Если для гиперграфа  $WS = (X, R, W)$  выполняются условия:

1. Число компонент связности  $\lambda(WS)$  равно 1;
2. Существует  $l$ ,  $0 \leq l \leq n$  ( $n = |R|$ ) шарниров, при удалении которых  $WS$  распадается на  $l + 1$  компоненту  $WS_i$ .
3. Каждая компонента  $WS_i$   $i = \overline{1, l+1}$  удовлетворяет условиям теоремы 2;

то гиперграф  $WS$  – стягиваемый.

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что при слабом удалении шарнира  $r$  число компонент  $\lambda(WS)$  гиперграфа  $WS$  увеличивается на величину  $X(r) - 1$ , где  $X(r)$  степень шарнира  $r$ . Поэтому из второго условия следует, что степень каждого шарнира равна 2.

Каждая компонента  $WS_i$  удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому она стягиваемая. Стянем все  $WS_i$ ,  $i = \overline{1, l+1}$  в гиперграфе  $WS$ . Эта операция преобразует  $WS$  в связный граф  $G(WS)$ , в котором вершинами служат стянутые подграфы  $WS_i$ ,  $i = \overline{1, l+1}$ , а ребрами – шарниры.

Так как каждое ребро в  $G(WS)$  является мостом, то, по одному из определений деревьев [5],  $G(WS)$  представляет собой дерево. Элементарной индукцией по числу вершин доказывается, что семейство ребер любого дерева, каждое из которых рассматривается как

пара инцидентных вершин, является независимым. Кроме того для деревьев выполняется равенство  $p = g + 1$ , где  $p$  – количество вершин, а  $g$  – количество ребер.

Таким образом, дерево  $G(W\mathcal{S})$ , вершинами которого служат стянутые компоненты, а ребрами – шарниры гиперграфа  $W\mathcal{S}$ , в свою очередь удовлетворяет условиям теоремы 2, и, значит, является стягиваемым. Теорема доказана.

Подграф  $W\mathcal{S}' = (X', R', W')$  гиперграфа  $W\mathcal{S} = (X, R, W)$  называется порожденным, если подмножеству  $R'$  принадлежат все ребра, которые инцидентны вершинам из  $X'$  в  $W\mathcal{S}$  и только им. Подграф, порожденный в  $W\mathcal{S}$  множеством вершин  $X' \subseteq X$ , обозначим  $[X']$ .

**Лемма 4.** Если гиперграф  $W\mathcal{S} = (X, R, W)$  стягивается и удовлетворяет условию S3, то для любого его порожденного подграфа  $W\mathcal{S}' = (X', R', W')$  справедливо неравенство  $|X'| - |R'| \geq 1$ .

**Доказательство.** Стягивание  $W\mathcal{S}$  означает и стягивание всех его подграфов. Предположим, что для порожденного подграфа выполняется  $|X'| - |R'| < 1$ . При стягивании  $W\mathcal{S}$  все вершины из  $X'$  отождествятся в одну составную вершину, которая будет содержать  $n = |R'| - |X'| + 1$  висячих ребер. Эти ребра будут принадлежать также одновершинному гиперграфу, который является результатом стягивания всего  $W\mathcal{S}$ , что противоречит равенству  $|X| - |R| = 1$  (S3), связывающему число вершин и ребер в гиперграфе  $W\mathcal{S}$ .

**Теорема 5.** Пусть стягиваемый гиперграф  $W\mathcal{S} = (X, R, W)$  удовлетворяет условию S3. Любой связный подграф  $W\mathcal{S}_\gamma = (X_\gamma, R_\gamma, W_\gamma)$ , порожденный своим множеством вершин  $W\mathcal{S}_\gamma = [X_\gamma]$  и удовлетворяющий условию S3, также является стягиваемым.

**Доказательство.** Доказательство проведем индукцией по числу вершин  $n = |X_\gamma|$  подграфа  $W\mathcal{S}_\gamma$ . Для  $n = 2$  подграф  $W\mathcal{S}_\gamma$  представляет собой ребро степени два. Слабое удаление этого ребра и отождествление инцидентных вершин есть стягивание гиперграфа  $W\mathcal{S}_\gamma$ . Пусть это утверждение справедливо для всех  $p$ -вершинных  $2 \leq p \leq n - 1$  подграфов графа  $W\mathcal{S}$ .

Рассмотрим связный подграф  $W\mathcal{S}_\gamma = (X_\gamma, R_\gamma, W_\gamma)$ , порожденный  $n$  вершинами, для которого выполняется условие S3. Обозначим через  $\overline{W\mathcal{S}_\gamma}$  подграф графа  $W\mathcal{S}$ , обладающий следующими свойствами:

1. подграф стягиваемый;
2. для  $\overline{W\mathcal{S}_\gamma} = (\overline{X_\gamma}, \overline{R_\gamma}, \overline{W_\gamma})$  выполняется равенство  $|\overline{X_\gamma}| - |\overline{R_\gamma}| = 1$ ;

3.  $WS_\gamma \subseteq \overline{WS_\gamma}$ ;
4.  $\overline{WS_\gamma}$  – минимальный по числу вершин из всех подграфов графа  $WS$ , обладающих свойствами 1-3.

Так как для гиперграфа  $WS$  выполняются условия 1-3, то множество таких подграфов заведомо не пусто, поэтому среди них существует минимальный по числу вершин подграф  $\overline{WS_\gamma}$ .

Рассмотрим ситуацию перед последней операцией стягивания  $WS_\gamma$ . Из условия 2 следует, что последнее стягивание заключается в отождествлении двух вершин, обозначим их  $s_1$  и  $s_2$ , соединенных ребром  $r$ . Каждая из этих вершин состоит из вершин подграфов  $WS_\gamma$  и  $\overline{WS_\gamma}$ . Представим последнее стягиваемое ребро как множество инцидентных вершин  $X(r)$  и рассмотрим все варианты принадлежности  $X(r)$ :

1.  $X(r) \subseteq X_\gamma$ ;
2.  $X(r) \subseteq \overline{X_\gamma} \setminus X_\gamma$ ;
3.  $X(r) \subseteq \overline{X_\gamma} \cup X_\gamma$ , причем  $X(r) \not\subseteq X_\gamma, X(r) \subseteq \overline{X_\gamma}$ .

Рассмотрим случай 2, когда ребро  $r$  инцидентно вершинам из дополнения  $X_\gamma$ . Если при этом  $X_\gamma \subseteq s_1(s_2)$ , то нарушается условие минимальности  $\overline{WS_\gamma}$ . В самом деле, вершина  $s_1(s_2)$ , которой принадлежат все вершины  $WS_\gamma$ , есть результат стягивания подграфа, порожденного в  $WS$  всеми вершинами, составляющими  $s_1(s_2)$ . Этот подграф содержит  $WS_\gamma$  и имеет меньше вершин, чем  $\overline{WS_\gamma}$ . Если  $X(r) \subseteq s_1 \cup s_2$ , то нарушается условие связности  $WS_\gamma$ .

Пусть вершины, инцидентные ребру  $r$ , принадлежат подграфам  $WS_\gamma$  и  $\overline{WS_\gamma}$  (вариант 3). Если  $X_\gamma \subseteq s_1$  либо  $X_\gamma \subseteq s_2$ , то подграф  $\overline{WS_\gamma}$  не минимален. Предположим, что вершины все вершины  $WS_\gamma$  принадлежат двум составным вершинам  $s_1$  и  $s_2$ . Тогда подграф  $WS_\gamma$  разбивается на две части, связанные ребром, которое инцидентно также вершинам из  $\overline{X_\gamma} \setminus X_\gamma$ . При этих условиях связность и порожденность  $WS_\gamma$  противоречат друг другу и не могут выполняться одновременно.

Остается рассмотреть вариант 1, когда все вершины, инцидентные  $r$ , принадлежат подграфу  $WS_\gamma$ . В этих условиях ребро  $r$  является шарниром в  $WS_\gamma$ . После удаления шарнира  $r$  подграф распадается на  $k = \lambda(WS_\gamma - r)$  компонент  $WS_i = (X_i, R_i, W_i)$ ,

$i = \overline{1, k}$ ,  $k \geq 2$ . Число вершин  $n_i = |X_i|$  каждой  $WS_i$  строго меньше  $n$ . Все  $WS_i$  являются порожденными подграфами  $WS$ , поэтому выполняются неравенства  $|X_i| - |R_i| \geq 1$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Складывая почленно эти неравенства, получим  $|X_\gamma| - \sum_{i=1}^k |R_i| \geq k$ . Так как  $\sum_{i=1}^k |R_i| + 1 = |R_\gamma|$ , то для  $WS_\gamma$  имеем  $|X_\gamma| - |R_\gamma| \geq k - 1$ . Но  $WS_\gamma$  удовлетворяет условию S3, поэтому  $k = \lambda(WS_\gamma - r) = 2$  и для каждой компоненты  $WS_1$  и  $WS_2$  в свою очередь выполняется условие S3.

Таким образом, компоненты  $WS_1$  и  $WS_2$  являются связными порожденными подграфами гиперграфа  $WS$ . Для каждой из них справедливо равенство S3, а для количества их вершин  $n_i$  справедливо неравенство  $n_i < n$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

По индуктивному предположению подграфы  $WS_1$  и  $WS_2$  – стягиваемые. Результатом стягивания каждого  $WS_i$  являются составные вершины  $x_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , соединенные шарниром  $r$ . Слабое удаление  $r$  и отождествление  $x_1$  и  $x_2$  завершает стягивание  $n$ -вершинного подграфа  $WS_\gamma$ . Теорема доказана.

**Теорема 6.** Пусть стягиваемый гиперграф  $WS = (X, R, W)$  и его порожденные подграфы  $WS_\alpha = (X_\alpha, R_\alpha, W_\alpha)$  и  $WS_\beta = (X_\beta, R_\beta, W_\beta)$ ,  $[X_\alpha] = WS_\alpha$  и  $[X_\beta] = WS_\beta$  удовлетворяют равенству S3. Если  $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ , то для подграфа  $[X_\alpha \cap X_\beta] = (X_\chi, R_\chi, W_\chi)$ , порожденного в  $WS$  непустым пересечением  $X_\alpha \cap X_\beta$  вершин, также выполняется равенство  $|X_\chi| - |R_\chi| = 1$ .

Доказательство. Обозначим символом  $\Delta$  разность между числом вершин и ребер в подграфе  $[X_\alpha \cap X_\beta]$ , то есть  $\Delta = |X_\chi| - |R_\chi|$ . Так как подграф  $(X_\chi, R_\chi, W_\chi)$  – порожденный, то из леммы 4 следует  $\Delta \geq 1$ .

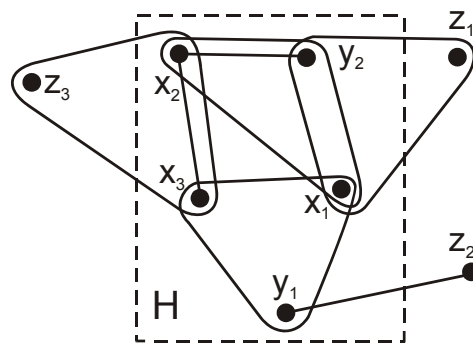
Рассмотрим подграф  $[X_\alpha \cup X_\beta] = (X_\delta, R_\delta, W_\delta)$ , порожденный объединением  $X_\alpha \cup X_\beta$ . Этот подграф имеет  $|X_\delta| = |X_\alpha| + |X_\beta| - |X_\chi|$  вершин и  $|R_\delta| = |R_\alpha| + |R_\beta| - |R_\chi| + |Y|$  ребер. Множество ребер  $Y$ ,  $|Y| \geq 0$  составляют те ребра, которые инцидентны как вершинам из  $X_\alpha$ , так и из  $X_\beta$ . Эти ребра входят в  $R_\delta$  так как  $(X_\delta, R_\delta, W_\delta)$  является порожденным в  $WS$ .

Из этого следует  $|X_\delta| - |R_\delta| = |X_\alpha| - |R_\alpha| + |X_\beta| - |R_\beta| - (|X_\chi| - |R_\chi|) - |Y|$ . Так как подграф  $[X_\alpha \cup X_\beta]$  – порожденный, то (лемма 4) для левой части равенства выполняется  $|X_\delta| - |R_\delta| \geq 1$ .

Подграфы  $WS_\alpha$  и  $WS_\beta$  удовлетворяют равенству S3, поэтому  $|X_\delta| - |R_\delta| = 1 + 1 - \Delta - |Y| \geq 1$ . При условии  $|Y| \geq 0$  из этого неравенства следует, что  $\Delta \leq 1$ . А так как подграф  $(X_\chi, R_\chi, W_\chi)$  – порожденный, то  $\Delta \geq 1$ . Оба неравенства могут быть справедливы только в случае  $\Delta = 1$ . Теорема доказана.

Стягиваемые гиперграфы являются математическим описанием структуры машиностроительных и приборостроительных изделий, поэтому задача их перечисления интересна с практической и теоретической точки зрения. Гиперграфы, достаточные условия стягиваемости которых дает теорема 2, представляют собой «элементарные строительные блоки», из которых могут формироваться более сложные стягиваемые структуры. Подсчитаем число таких гиперграфов. Методика перечисления основана на известном методе пересчета ациклических графов [1].

Гиперграф  $E$  назовем расширением гиперграфа  $H$ , если  $H$  является подграфом, порожденным подмножеством вершин гиперграфа  $E$ , степень которых не менее 2. Гиперграф, изображенный на рис 1, представляет собой расширение гиперграфа  $H$ , который на этом рисунке выделен пунктиром.



**Рис. 1.** Гиперграф и его расширение

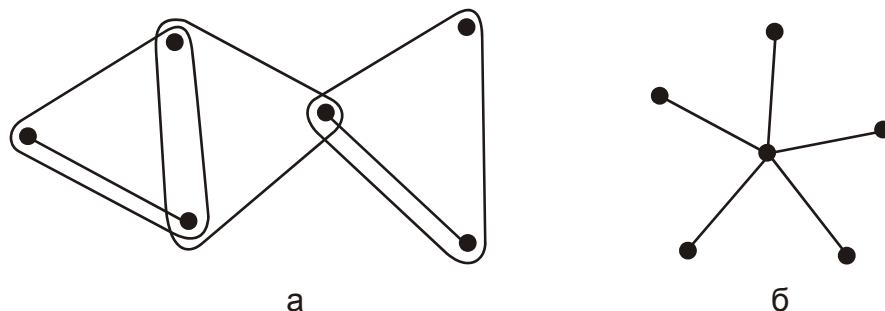
Висячей в  $H$  называется такая вершина, которая имеет степень  $|R(x)| = 1$ . Любой гиперграф, удовлетворяющий условиям теоремы 2, имеет хотя бы одну висячую вершину. Следовательно, каждый такой гиперграф является расширением единственного собственного подграфа и этот подграф также является стягиваемым. Это следует из того факта, что сильное удаление всех висячих вершин не нарушит независимости семейства ребер и условия S3. Кроме того, каждый такой гиперграф имеет много расширений и все они удовлетворяют условиям теоремы 2.

Предположим, что  $H$  – стягиваемый гиперграф, имеющий в точности  $n \geq 1$  вершин  $y_i$ , степень которых равна 1, и  $S$  остальных вершин  $x_i$ . Можно построить расширение  $E$  гиперграфа  $H$ , содержащее ровно  $k$  висячих вершин, добавляя  $k$  новых вершин  $z_i$  и новые ребра такие, что каждая из  $n$  вершин  $y_i$  смежна хотя бы с одной вершиной  $z_i$ . Каждая  $z_i$  может, в свою очередь, быть смежной с любой  $x_i$ . На рис.1 добавляемые вершины  $z_1, z_2, z_3$  смежны с каждой вершиной  $y_1, y_2$ , которые имеют в  $H$  степень, равную 1.

Таким образом, все стягиваемые  $p$ -вершинные гиперграфы могут быть получены с помощью расширения гиперграфов, у которых количество вершин меньше  $p$ . Более точно, пусть  $a_p$  – число стягиваемых гиперграфов порядка  $p$  ( $p$ -вершинных) и  $a_{p,k}$  – число таких гиперграфов, у которых  $k$  вершин – висячие. Для всех  $p$  справедливо соотношение

$$a_p = \sum_{k=1}^{p-1} a_{p,k}.$$

Примеры стягиваемых гиперграфов шестого порядка с одной (рис.2, а) и пятью висячими вершинами (рис. 2, б) приведены на следующем рисунке.



**Рис. 2.** Примеры гиперграфов шестого порядка

Теперь необходимо выразить  $a_{p,k}$  через  $a_{p-k,n}$  при  $n < p-k-1$ . Для определения числа возможных соединений  $k$  вершин, расширяющих некоторый  $(p-k)$ -вершинный гиперграф с  $n$  висячими вершинами, рассмотрим следующую «урновую схему».

Имеется  $p-k$  различных ящиков и  $k$  шаров разного цвета. Число шаров одного цвета принимает значение от 1 до  $p-k$ ; одноцветные шары неразличимы. Необходимо найти число всех таких распределений шаров по ящикам, среди которых фиксированные  $n$  ящиков – всегда заняты. Здесь ящики соответствуют вершинам расширяемого гиперграфа порядка  $(p-k)$ , распределяемые шары – присоединяемым вершинам, количество шаров одного цвета – степени ребра, которое соединяет присоединяемую вершину с вершинами расширяемого гиперграфа и, наконец, ящики, которые в любом распределении должны быть заняты, отвечают висячим вершинам расширяемого гиперграфа.

Число всех распределений шаров одного цвета, взятых в количестве  $i = \overline{1, p-k}$  равно

$$\sum_{i=1}^{p-k} \binom{p-k}{i} = (2^{p-k} - 1).$$

Число различных распределений шаров, имеющих  $k$  цветов равно

$$N = (2^{p-k} - 1)^k.$$

Множество всех распределений можно разбить на два подмножества. В первое входят такие распределения, у которых хотя бы один ящик из фиксированных остается свободным, во второе – все распределения, у которых  $n$  фиксированных ящиков являются занятыми.

Мощность первого подмножества  $N'$  подсчитаем методом включения-исключения [1]. Обозначим  $N(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ ,  $k = \overline{1, n}$  число распределений, оставляющих все ящики  $x_{i_m}$  свободными. Для  $N'$  имеем

$$N' = \sum_{i=1}^n N(x_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) + \dots + (-1)^{n-1} N(x_1, \dots, x_n).$$

Любое  $N(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$  равно числу всех распределений по  $p-k-m$  ящикам, поэтому  $N(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) = (2^{p-k-m} - 1)^k$ . Тогда  $N' = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} (2^{p-k-m} - 1)^k$ .

Число искомых распределений  $N''$  равно  $N - N'$ , поэтому справедливо равенство

$$N'' = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (2^{p-k-m} - 1)^k.$$

Всевозможные расширения всех  $a_{p-k, n}$  стягиваемых гиперграфов с  $p-k$  вершинами, среди которых ровно  $n$  висячих, вносят в значение  $a_{p, k}$  число, равное

$$N'' \times a_{p-k, n} \binom{p}{k}. \quad (*)$$

Действительно, ищется число помеченных расширений  $E$  всех  $a_{p-k, n}$  помеченных стягиваемых гиперграфов  $H$ . Для каждого из  $\binom{p}{k}$  способов расставить пометки для  $k$  присоединяемых вершин в расширении  $E$  существует  $a_{p-k, n}$  распределений пометок в гиперграфах  $H$ , подлежащих расширению. Это служит обоснованием сомножителя



$a_{p-k,n} \binom{p}{k}$  в соотношении (\*). В этом равенстве сомножитель  $N^n$  равняется числу вариантов соединения  $k$  присоединяемых вершин с вершинами расширяемого гиперграфа.

Число  $a_{p,p-1}$  звездоподобных гиперграфов (см. рис. 2,б) равняется количеству различных пометок, которые можно присвоить единственной не висячей вершине. Поэтому  $a_{p,p-1} = p$ .

Итак, число стягиваемых гиперграфов порядка  $p$ , удовлетворяющих условиям теоремы 2, задается следующим рекуррентным соотношениями для  $p > 3$ :

$$a_p = \sum_{k=1}^{p-1} a_{p,k},$$

$$a_{p,k} = \sum a_{p-k,n} \binom{p}{k} \left[ \sum (-1)^m \binom{n}{m} (2^{p-k-m}) \right],$$

$$k = \overline{1, p-2},$$

$$a_{p,p-1} = p, p \geq 3;$$

При начальных условиях:  $a_2 = a_{2,2} = 1$ ,  $a_3 = a_{3,1} + a_{3,2}$ ,  $a_{3,1} = 3$ ,  $a_{3,2} = 3$ .

### Список литературы

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558с.
2. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №3.
3. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия. Условия стягиваемости// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №5.
4. Божко А. Н., Бетин Е. А. Анализ стягиваемости гиперграфов// Информационные технологии. – 2005. – №5 – с. 6-12.