

## Определение эпюры контактного давления для соединения деталей по цилиндрическим поверхностям с малым зазором (случай, когда охватывающая деталь безгранична в радиальном направлении).

# 05, май 2011

авторы: Блинов Д. С., Алешин В. Ф.

УДК 621.813, 621.815

МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[victorfa@mail.ru](mailto:victorfa@mail.ru)  
[dmitriyblinov@mail.ru](mailto:dmitriyblinov@mail.ru)

**Введение.** В машинах многие детали соединены между собой. По признаку возможности разборки соединения делят на неразъемные, которые нельзя разобрать без разрушения или повреждения, и разъемные /1/.

Рассмотрим две соединяемые детали, одна из которых имеет наружную цилиндрическую сопрягаемую поверхность (охватываемая деталь), а другая – внутреннюю цилиндрическую сопрягаемую поверхность (охватывающая деталь). В соединении этих деталей сопрягаемые поверхности находятся во взаимодействии.

Неразъемное соединение рассматриваемых деталей называется цилиндрическим соединением с натягом. Такие соединения очень широко применяются. Нагрузка через цилиндрическое соединение с натягом чаще всего передается за счет сил трения, которые порождаются контактным давлением, осесимметрично распределенным по сопрягаемым поверхностям соединяемых деталей. При этом величина передаваемой через соединение нагрузки зависит от целого ряда параметров (см. /1/), но наиболее значимым или ключевым параметром является величина натяга. Для расчета цилиндрических соединений с натягом используют зависимости Ляме /1/.

Разъемные соединения рассматриваемых деталей также широко применяются в машиностроении. Например, в резьбовых соединениях (рис. 1, а), в различных опорах и шарнирах (рис. 1, б), при определенных допущениях в клеммовых соединениях (рис. 1, в) и в другие соединениях и узлах.

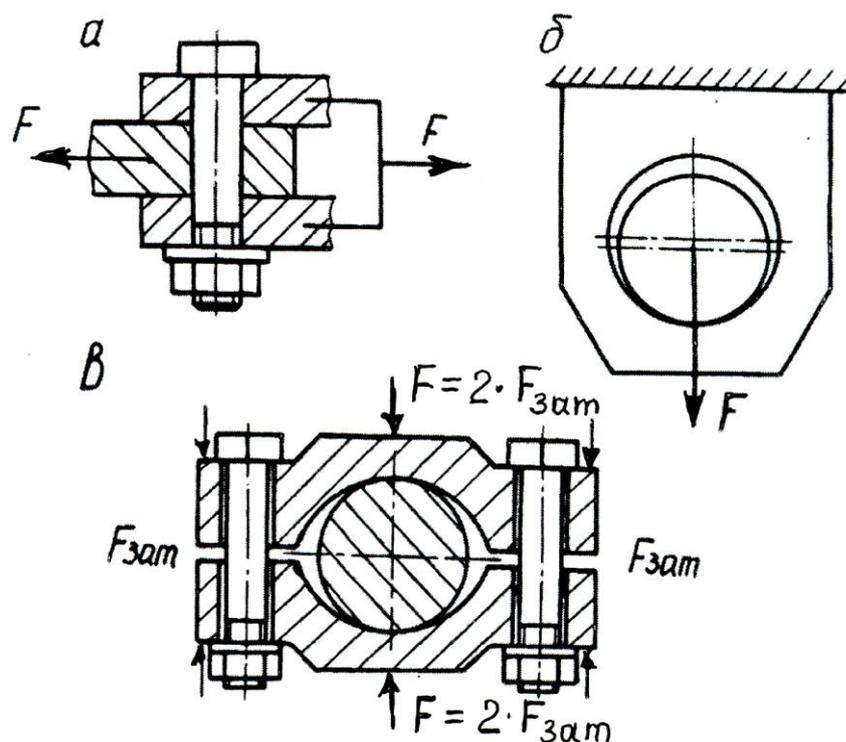


Рис. 1. Примеры конструкций разъемных соединений деталей с цилиндрическими сопрягаемыми поверхностями.

Разъемные соединения деталей с цилиндрическими сопрягаемыми поверхностями можно условно разделить на две группы. В разъемных соединениях первой группы между отверстием охватывающей детали и цилиндрической поверхностью охватываемой детали имеется конструктивный зазор, который сопоставим с миллиметрами или десятками миллиметров. В этом случае в зависимости от назначения и требуемой точности расчета считают, что после приложения силы  $F$  (см. рис. 1):

– детали взаимодействуют по начальной линии контакта, вдоль которой действует распределенная (погонная) нагрузка  $q = F/L$  ( $L$  – протяженность контакта);

– используя задачу Герца [1], детали взаимодействуют по плоской линейчатой контактной поверхности, на которой действует контактное давление. Эпюра контактного давления постоянна вдоль площадки контакта, а поперек – распределяется по уравнению эллипса. Формулы Герца позволяют определить размеры площадки контакта, максимальное значение контактного давления и напряженное состояние деталей.

Чаще всего в разъемных соединениях второй группы номинальные значения диаметра отверстия охватывающей детали и диаметра цилиндрической поверхности охватываемой детали одинаковы, а зазор мал и определяется полями допусков на указанные диаметры сопрягаемых поверхностей деталей. К этой группе также надо отнести соединение деталей с конструктивным зазором между их сопрягаемыми поверхностями, если по отношению к диаметру отверстия охватывающей детали этот зазор мал и задача Герца неприменима, см. [1 и 2].

В курсе «Детали машин» для расчета разъемных соединений второй группы принято использовать, так называемые, напряжения смятия. При этом в расчет величина зазора, которая является ключевым параметром для указанных соединений, не входит. Причина заключается в том, что отсутствует достаточно достоверная и простая в применении инженерная методика расчета разъемных соединений по цилиндрическим поверхностям с малым зазором.

Целью данной статьи и ее продолжений является разработка инженерных методик расчета разъемных соединений по цилиндрическим поверхностям с малым зазором на базе теоретических исследований, выполненных методами теории упругости и строительной механики машин. Чтобы инженерные методики обладали общностью, теоретические исследования выполнялись в безразмерном виде.

Анализ конструкций разъемных соединений по цилиндрическим поверхностям с малым зазором. Рассмотрим упрощенную расчетную схему взаимодействия охватываемой детали 1 и охватывающей детали 2, выполненной в виде кольца, см. рис. 2.

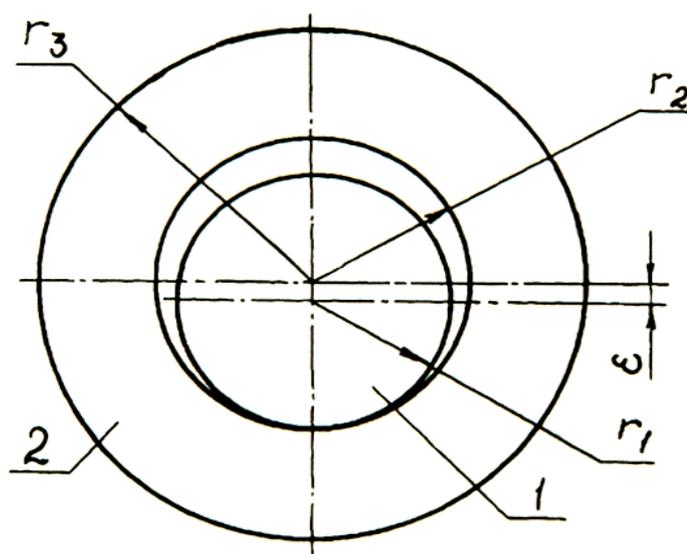


Рис. 2. Геометрические параметры.

На рисунке обозначены все радиусы этих деталей, а также радиальный зазор

$$\varepsilon = r_2 - r_1 \quad (1)$$

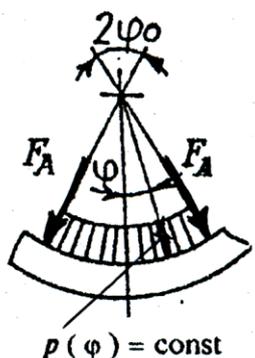
По разрабатываемым инженерным методикам расчета необходимо определять размеры площадки контакта, вид эпюры контактного давления после приложения нагрузки и напряженно-деформированное состояние соединяемых деталей. Для анализа влияния на указанные параметры соотношения размеров охватывающей детали 2 введем безразмерную толщину этой детали

$$h = (r_3 - r_2) / r_2 \quad (2)$$

В общем случае напряжения, действующие в охватывающей детали, можно условно разделить на контактные  $\sigma_H$  и изгибные  $\sigma_F$ . Если безразмерная толщина  $h$  близка к

нулю, то охватывающую деталь можно считать тонкостенной, в которой доминируют изгибные напряжения  $\sigma_F$ , а контактные напряжения  $\sigma_H$  можно считать пренебрежимо малыми. Если безразмерная толщина  $h$  велика, то охватывающую деталь можно считать безграничной в радиальном направлении, и в этой детали действуют только контактные напряжения  $\sigma_H$ . При этом форма в плане охватываемой детали может быть любой. Если  $h$  имеет средние значения, то при расчетах надо учитывать изгибные и контактные напряжения. Таким образом, мы имеем три зоны, определяемые жесткостью охватывающей детали, см. табл. 1. В этой таблице по усредненным оценкам представлены ориентировочные границы этих зон.

Таблица 1.

Зона	Диапазон значений $h$	$\sigma_H$	$\sigma_F$	Вид эпюры
I	$h \leq 0,3$	Пренебрежимо малы	Доминируют	 <p><math>p(\varphi) = \text{const}</math></p>
II	$0,3 < h < 0,8$	Соизмеримы		 <p><math>p(\varphi)</math></p>
III	$h \geq 0,8$	Доминируют	Пренебрежимо малы	 <p><math>p(\varphi)</math> изменяется по уравнению эллипса</p>

В таблице 1 для каждой зоны эпюра контактного давления  $p(\varphi)$  распределена на дуге, соответствующей углу контакта  $2\varphi_0$  (для расчетов удобен параметр  $\varphi_0$  – полуугол контакта). Инженерные методики расчета удалось разработать для I зоны и III зоны.

**2. Разработка инженерной методики расчета для случая, когда охватываемое тело можно считать безграничным в радиальном направлении (для зоны III, см. табл. 1).**

**2.1. Определение размеров площадки контакта (полуугла контакта  $\varphi_0$ ).**

На рис. 3 показана расчетная схема, на которой охватываемая деталь 1 с радиусом  $r_1$  установлена в цилиндрическое отверстие с радиусом  $r_2$  в охватывающей детали 2, которую считаем безграничной в радиальном направлении.

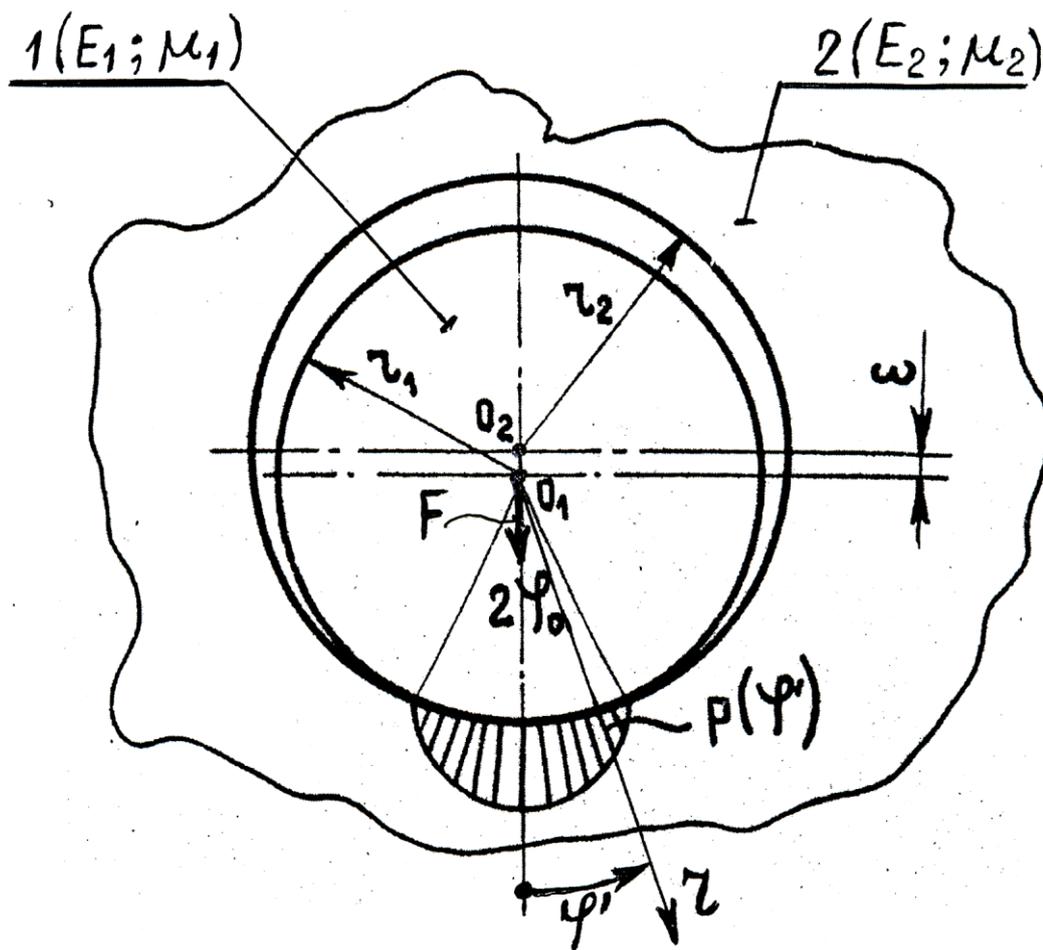


Рис. 3. Расчетная схема задачи.

Деталь 1 нагружена сосредоточенной силой  $F$  (погонной нагрузкой  $q$ ). При этом на дуге 1-ой детали для произвольной угловой координаты  $\varphi'$  ( $-\varphi_0 \leq \varphi' \leq \varphi_0$ ), возникает контактного давления  $p(\varphi')$ , которое необходимо определить для неизвестного полуугла контакта  $\varphi_0$ . Форма (зависимость  $p$  от  $\varphi'$ ) эпюры контактного давления также неизвестна.

В основу разрабатываемой методики положена задача И.Я.Штаермана о контакте цилиндра с внутренней цилиндрической поверхностью в безграничном теле /2/.

В работе /2/ методами задачи плоской деформации теории упругости / 3, 4 / с дополнительными допущениями для определения полуугла контакта  $\varphi_0$  и эпюры контактного давления  $p(\varphi')$  выведены уравнения:

– равновесия охватываемой детали 1

$$F = L \cdot r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cdot \cos(\varphi') d\varphi' \quad (3)$$

– совместности перемещений точек с координатой  $\varphi$  сопрягаемых деталей 1 и 2 под действием силы  $F$  (погонной нагрузки  $q$ )

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (\nu_1 \cdot r_1 + \nu_2 \cdot r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cdot \left[ \cos(\varphi - \varphi') \cdot \ln \left( \operatorname{tg} \left| \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \right) - \cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \ln \left( \operatorname{tg} \left| \frac{\varphi'}{2} \right| \right) \right] d\varphi' - \\ & - (\chi_1 \cdot r_1 + \chi_2 \cdot r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cdot [\sin |\varphi - \varphi'| - \cos \varphi \cdot \sin |\varphi'|] d\varphi' + \\ & + 2 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot r_1 \cdot (1 - \cos \varphi) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = (r_2 - r_1) \cdot (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

где:  $\nu_i = \frac{1 - \mu_i^2}{\pi \cdot E_i}$ ;  $\chi_i = \frac{(1 + \mu) \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E_i}$ ;

$E_i$  и  $\mu_i$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона деталей 1 и 2;

$q = \frac{F}{L}$  – распределенная вдоль оси (погонная) нагрузка;

$L$  – протяженность контакта деталей 1 и 2 вдоль оси;

$\varphi$  – угловая координата ( $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ,  $\varphi_0$  – полуугол контакта);

Будем считать, что тела металлические. Если принять  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,3$ , то наибольшая ошибка при расчетах составит доли процента.

Радиусы  $r_1$  и  $r_2$  близки по величине, и можно считать, что  $r_1 \approx r_2$ , а радиальный зазор  $\varepsilon = r_2 - r_1$ .

В книге /2/ приведено совместное решение уравнений (3) и (4) для случая, когда сопрягаемые детали изготовлены из одного и того же материала, то есть их модули

упругости  $E_1 = E_2 = E$ . Такое допущение существенно упростило совместное решение указанных уравнений.

На практике сопрягаемые детали могут быть изготовлены из различных металлов, поэтому необходимо было совместное решение указанных уравнений выполнить в общей постановке (развить решение И.Я.Штаермана).

Для совместного решения исходных уравнений (3) и (4) целесообразно считать, что полуугол контакта  $\varphi_0$  известен, и надо определить соответствующую этому углу силу  $F$ . Для расчета использовался метод конечных разностей /5, 6/. Для этого эпюру контактного давления  $p(\varphi')$  в интервале полуугла контакта  $\varphi_0$  разобьем на  $M$  равных углов  $\psi = \varphi_0/M$ . В интервале каждого малого угла  $\psi$  считаем эпюру контактного давления постоянной, то есть

$$p(J) = \text{const}, \text{ для } J = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

После ряда преобразований получим систему  $M$  алгебраических уравнений

$$a[I, J] \cdot q[J] = b[I], \quad I = 1, 2, \dots, M; \quad J = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

где:  $a[I, J] = 2 \cdot \delta(J) \cdot \cos(I \cdot \psi) - \delta(I + J) - \delta(K)$ ;

$K = (J - I)$  для  $J > I$ ;  $K = (I - J + 1)$  для  $J \leq I$ ;

$$\delta(J) = Q(J) - Q(J - 1) + \psi \frac{1 - \beta}{1 + \beta}; \quad Q(J) = -2 \cdot \sin(\psi \cdot J) \cdot \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\psi \cdot J}{2} \right) \right] - \frac{2 \cdot \pi}{7} \cos(\psi \cdot J);$$

$$q[J] = \frac{1,82}{\pi} \cdot \frac{r_1 \cdot p(J)}{E_{\text{ИП}} \cdot \varepsilon}; \quad b[I] = 1 - \cos(I \cdot \psi); \quad \beta = \frac{E_2}{E_1};$$

$$E_{\text{ИП}} = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \text{ – приведенный модуль упругости.}$$

При  $J = 0$  функция  $Q(J)$  имеет в первом слагаемом неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ , после раскрытия которой по правилу Лопиталья / 7 / получается  $Q(0) = 2 \cdot \pi / 7$ .

Уравнение равновесия детали 1 преобразуется к виду

$$F = 2 \cdot L \cdot r_1 \sum_{J=1}^M p(J) \cdot [\sin(J \cdot \psi) - \sin(J \cdot \psi - \psi)] \quad (7)$$



модуля упругости недостаточно для решения данной задачи (нужен еще коэффициент  $\beta$ ), и  $E_{ДР}$  поэтому не является физической величиной.

## 2.2. Определение эпюры контактного давления.

Для определения функциональной зависимости контактного давления от угловой координаты были выполнены расчеты, в которых полуугол контакта  $\varphi_0$  разбивался на достаточно большое число  $M$  равных углов  $\psi = \varphi_0/M$ . В интервале каждого малого угла  $\psi$  эпюра контактного давления является постоянной.

Как показал анализ результатов расчетов [8], в качестве эпюры контактного давления целесообразно принять эллипс. С этим согласны и другие исследователи этого вопроса [9]. Для практического применения эллиптическую эпюру контактного давления удобно представить в виде единичной окружности, см. рис. 5. На рис. 5  $p_{MAX}$  – максимальное значение контактного давления.

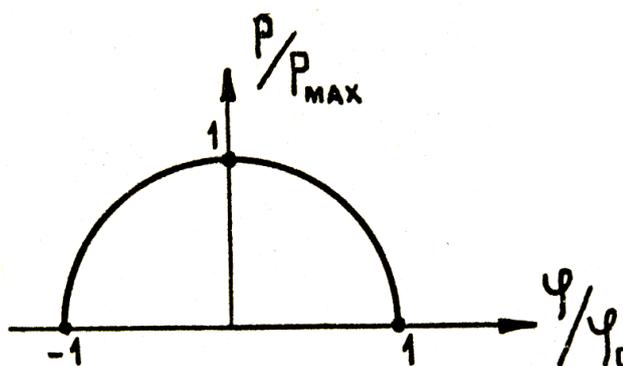


Рис. 5. Эпюра контактного давления

Величину максимального контактного давления  $p_{MAX}$  можно определить по графику (см. рис. 6) или по следующей формуле

$$p_{MAX} = \frac{F}{\pi \cdot L \cdot r_1 \cdot J_1(\varphi_0)}, \quad (8)$$

где  $J_1(\varphi_0)$  – функция Бесселя первого рода порядка 1 / 10 /.

Таким образом выполненные исследования по известным размерам деталей соединения, действующей силе  $F$  и модулям упругости деталей  $E_1$  и  $E_2$  позволяют определить размер контактной эпюры (полуугол контакта  $\varphi_0$ ) и максимальное значение  $p_{MAX}$  эллиптической эпюры контактного давления.

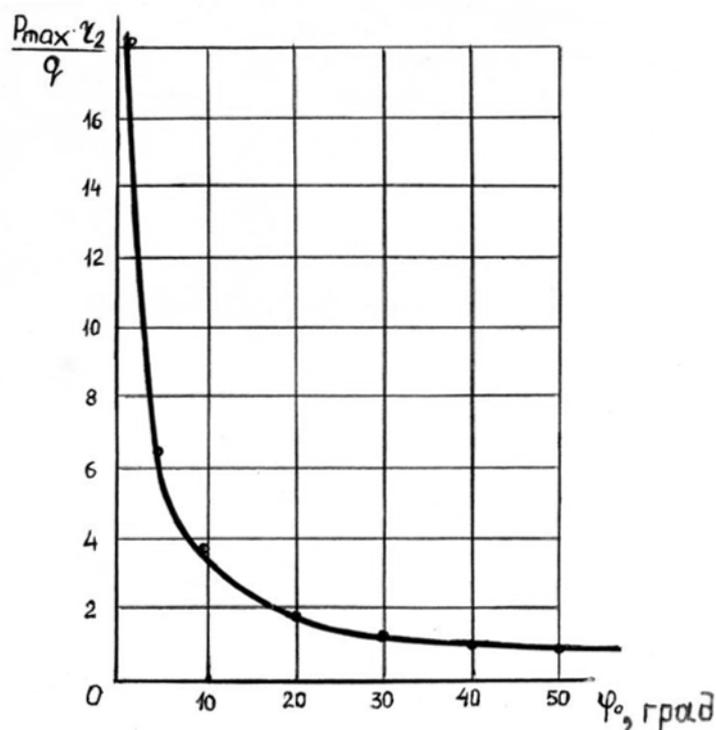


Рис. 6. График для определения  $p_{MAX}$

#### ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. В настоящее время отсутствуют достаточно достоверные и удобные в применении инженерные методики расчета разъемных соединений по цилиндрическим поверхностям с учетом радиального зазора между сопрягаемыми поверхностями деталей соединения. При этом указанный зазор является ключевым параметром для расчета.

2. Разъемные соединения по цилиндрическим поверхностям в зависимости от отношения толщины охватывающей детали к радиусу ее отверстия можно условно разделить на три группы (три зоны), для каждой из которых требуется индивидуальный подход при разработке инженерной методики расчета.

3. Данная статья посвящена разработке инженерной методики расчета для случая, когда охватываемое тело можно считать безграничным в радиальном направлении. В основу инженерной методики расчета положена известная задача И.Я.Штаермана о контакте цилиндра с внутренней цилиндрической поверхностью в безграничном теле.

4. Выполнено развитие задачи И.Я.Штаермана о контакте цилиндра с внутренней цилиндрической поверхностью в безграничном теле. В результате этого для общего случая, когда контактирующие тела изготовлены из различных материалов, получены зависимости и графики для определения размеров и формы эпюры контактного давления

в зависимости от радиального зазора, других размеров деталей соединения, силы и модулей упругости материалов деталей.

5. Анализ полученных результатов позволил сделать вывод о том, что приведенный модуль упругости материалов контактирующих тел не является физической величиной, а является удобным для расчетов сокращением.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решетов Д.Н. Детали машин: Учебник для студентов машиностроительных и механических специальностей вузов. – М.: Машиностроение, – 1989. – 496 с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.: Гостехиздат, – 1949. – 270 с
3. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – 400 с.
7. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
8. Блинов Д.С., Шатилов А.А. Определение усилий закрепления заготовок в станочных приспособлениях методами контактной задачи теории упругости // Труды МВТУ. – 1978. – № 281. – С. 63-75.
9. Кузьменко А.Г., Фукс Ю.М. Аппроксимация решений контактной задачи о внутреннем касании цилиндров. // Вопросы исследования надежности и динамики элементов подвижного состава железных дорог: Сборник статей. – Брянск, – 1974. – С. 118-130.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964. – 344 с.