

**Динамический гаситель колебаний. Влияние места установки**

# 03, март 2011

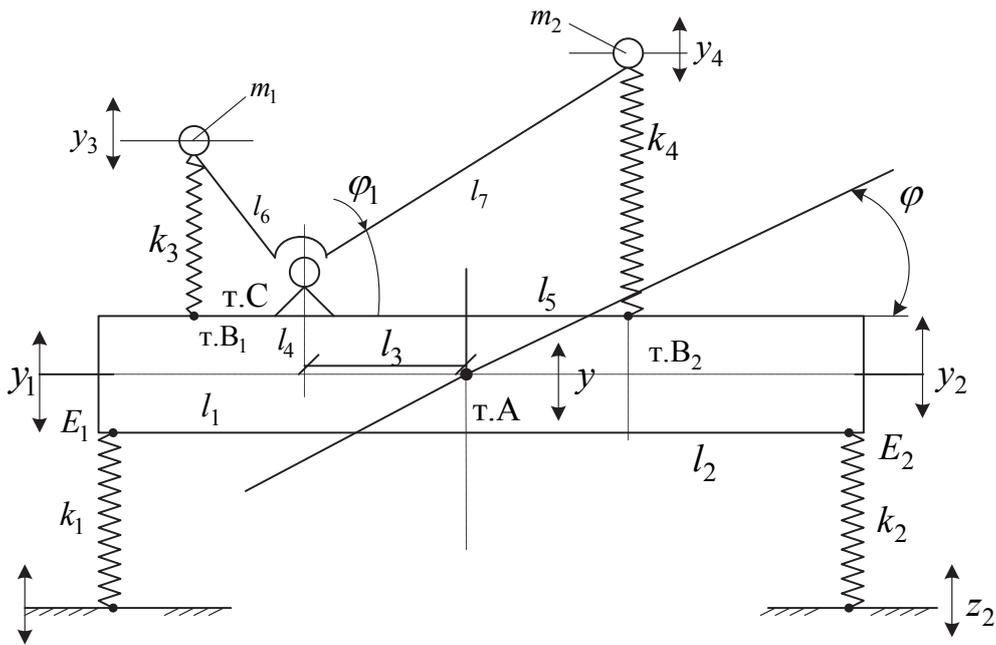
авторы: Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В., Большаков Р. С.

УДК 621.534.833

НИИ современных технологий, системного анализа и моделирования  
Иркутский государственный университет путей сообщения[eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru)

**Введение.** Вопросы использования динамических гасителей в системах с двумя степенями свободы, при всей изученности проблемы динамического гашения колебаний [1÷3], редко рассматриваются в научной литературе. Вместе с тем, задачи защиты объекта в виде твердого тела на двух упругих опорах имеют значение для инженерной практики, поскольку системы «балочного» типа достаточно широко используются в транспортной динамике [4, 5].

**Постановка задачи. Общие положения.** Рассмотрим виброзащитную систему, представленную на **рис. 1** в виде твердого тела, имеющего массу  $M$  и момент инерции  $I$ . В точке  $A$  находится центр тяжести системы. Его положение определяется соответствующими длинами отрезков  $l_1$  и  $l_2$ . В точке  $A$  закрепляется Г-динамический гаситель с массами  $m_1$  и  $m_2$ , разнесенными от шарнирного соединения на расстояния  $l_6$  и  $l_7$  соответственно. В точках  $B_1$  и  $B_2$  присоединяются упругие элементы жесткостью  $k_3$  и  $k_4$ ; через  $l_4$  и  $l_5$  обозначены расстояния точек  $B_1$  и  $B_2$  от центра тяжести (точки  $A$ ). Для описания движения выбраны две системы обобщенных координат  $u_1, u_2$  и  $u_3$  (эта система может быть трансформирована в систему координат  $u_1, u_2$  и  $\varphi_1$ , где  $\varphi_1$  - угол поворота Г-образного динамического гасителя колебаний (ДГ) относительно установившегося положения). Вторая система координат определяется координатами  $u, \varphi$  и  $\varphi_1$ , где  $u$  - координата центра тяжести (или центра масс),  $\varphi$  - угол поворота твердого тела вокруг центра тяжести или центра масс,  $\varphi_1$  - угол поворота динамического гасителя (как вариант этой системы координат, могут быть использованы:  $u, \varphi$  и  $u_3$ ).



**Рис. 1. Расчетная схема для задач транспортной динамики:**  
 $AE_1=l_1, AE_2=l_2, AB_1=l_4, AB_2=l_5, AC=l_3$ ;  $z_1$  и  $z_2$  – кинематические возмущения

Будем полагать, что на **рис. 1** точка А соответствует положению центра тяжести твердого тела без учета динамического гасителя. Если принять, что ДГ устанавливается в точке С, то в такой системе положение центра масс может быть определено по формуле

$$x = \frac{Ml_1 + m_2(l_1 + l_5) + m_1(l_1 - l_4)}{M + m_1 + m_2}, \quad (1)$$

где начало координат выбрано в точке  $E_1$ , совпадающей с концом балки (**рис. 1**). Если динамический гаситель обладает достаточно большой массой, то центр масс, определяемый по формуле (1), сместится от исходного положения в точке А в другую точку, назовем ее  $A_1$ . На **рис. 2** показано взаимное расположение интересующих нас точек и трансформируем ДГ к плоскому виду.



Подробности вывода уравнений движения, соответствующего расчетной схеме на **рис. 1**, представлена в работе [7]. С учетом (5) можно записать (3) и (4) в виде

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}(I + Ml_0^2)c^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_1[\dot{y} - (l_3 - l_0)\dot{\phi} + l_6\dot{\phi}_1]^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{y} - (l_3 - l_0)\dot{\phi} - l_7\dot{\phi}_1]^2, \quad (6)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 \left[ \begin{array}{l} y - (l_3 - l_0)\phi + l_6\phi_1 - \\ -y + (l_4 - l_0)\phi \end{array} \right]^2 + \frac{1}{2}k_4[y - (l_3 - l_0)\phi - l_7\phi_1 - y - (l_5 + l_0)\phi]^2. \quad (7)$$

Запишем (6), (7) в развернутом виде:

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}(I + Ml_0^2)c^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_1[a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2 - (l_3 - l_0)c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + l_6\dot{\phi}_1]^2 + \frac{1}{2}m_2[a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2 - (l_3 - l_0)c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - l_7\dot{\phi}_1]^2; \quad (8)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 \left[ \begin{array}{l} -(l_3 - l_0)c(y_2 - y_1) + \\ (l_4 - l_0)c(y_2 - y_1) + l_6\phi_1 \end{array} \right]^2 + \frac{1}{2}k_4[-(l_3 - l_0)c(y_2 - y_1) - (l_5 + l_0)c(y_2 - y_1) - l_7\phi_1]^2. \quad (9)$$

Произведем упрощения (8), (9)

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1^2 + b\dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}(I + Ml_0^2)c^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_1[\dot{y}_1(a + c(l_3 - l_0)) - \dot{y}_2(b - c(l_3 - l_0)) + l_6\dot{\phi}_1]^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{y}_1((a + c(l_3 - l_0)) - y_2(b - c(l_3 - l_0))) - l_7\dot{\phi}_1]^2, \quad (10)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3[y(l_3 - l_0)c - c(l_4 - l_0) + y_2(-l_3 - l_0)c + (l_4 - l_0)c + l_6\phi_1]^2 + \frac{1}{2}k_4[y_1(l_3 - l_0)c + (l_5 + l_0)c - y_2((l_3 - l_0)c(l_5 + l_0)c) - l_7\phi_1]^2. \quad (11)$$

Примем ряд соотношений

$$\begin{aligned}
 I_1 &= J + Ml_0^2; a_1 = a + c(l_3 - l_0); b_1 = b - c(l_3 - l_0); \\
 a_2 &= c(l_3 - l_0) - c(l_4 - l_0) = c(l_3 - l_4) = c(l_3 - l_4); \\
 b_2 &= c(l_3 - l_0) - c(l_4 - l_0) = c(l_3 - l_4); \\
 a_3 &= c(l_3 - l_0) + (l_5 + l_0)c, b_3 = (l_3 - l_0)c + (l_5 + l_0)c, \\
 a_3 &= c(l_3 + l_5), b_3 = (l_3 + l_5)c.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Запишем (10) в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}I_1c^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}m_1(a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{y}_2 + l_6\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(a_1\dot{y}_1 - b_1\dot{y}_2 - l_7\dot{\phi}_1)^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

В свою очередь:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}k_3 \left[ \begin{array}{l} a_2y_1 - y_2b_2 + \\ + l_6\phi_1 \end{array} \right]^2 + \frac{1}{2}k_4 [a_3y_1 - y_2b_3 - l_7\phi_1]^2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Преобразуем (13), (14) к развернутому виду:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}M(a^2\dot{y}_1^2 + 2ab\dot{y}_1\dot{y}_2 + b^2\dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_1c^2(\dot{y}_2^2 - 2\dot{y}_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1^2) + \\
 &+ \frac{1}{2}m_1 \left[ (a_1^2\dot{y}_1^2 + 2a_1b_1\dot{y}_1\dot{y}_2 + b_1^2\dot{y}_2^2) + 2l_6\dot{\phi}_1a_1\dot{y}_1 + 2l_6\dot{\phi}_1b_1\dot{y}_2 + l_6^2\dot{\phi}_1^2 \right] + \\
 &+ \frac{1}{2}m_2 \left[ (a_1^2\dot{y}_1^2 - 2a_1b_1\dot{y}_1\dot{y}_2 + b_1^2\dot{y}_2^2 - 2l_7\dot{\phi}_1a_1\dot{y}_1 + 2l_7\dot{\phi}_1b_1\dot{y}_2 + l_7^2\dot{\phi}_1^2) \right];
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}k_3 \left[ a_2^2y_1^2 - 2a_2b_2y_1y_2 + b_2^2y_2^2 + 2l_6\phi_1a_2y_1 - 2l_6\phi_1y_2b_2 + l_6^2\phi_1^2 \right] + \\
 &+ k_4 \left[ a_3^2y_1^2 - 2a_3b_3y_1y_2 + y_2^2b_3^2 - 2l_7\phi_1a_3y_1 + 2l_7\phi_1y_2b_3 + l_7^2\phi_1^2 \right].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Сделаем ряд промежуточных выкладок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} &= Ma^2 \dot{y}_1 + Mab \dot{y}_2 + I_1 c^2 \dot{y}_1 - I_1 c^2 \dot{y}_2 + m_1 a_1^2 \dot{y}_1 + m_1 a_1 b_1 \dot{y}_2 + m_1 l_6 a_1 \dot{\phi}_1 + \\ &+ m_2 a_1^2 \dot{y}_1 - m_2 a_1 b_1 \dot{y}_2 - m_2 l_7 \dot{\phi}_1 a_1 = \dot{y}_1 (ma^2 + I_1 c^2 + m_1 a_1^2 + m_2 a_1^2) + \\ &+ \dot{y}_2 (Mab - I_1 c^2 + m_1 a_1 b_1 - m_2 a_1 b_1) + \dot{\phi}_1 (m_1 l_6 a_1 - m_2 l_7 a_1); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} &= Mab \dot{y}_1 + Mb^2 \dot{y}_2 + I_1 c^2 \dot{y}_2 - I_1 c^2 \dot{y}_1 + m_1 a_1 b_1 \dot{y}_1 + m_1 b_1^2 \dot{y}_2 + m_1 l_6 b_1 \dot{\phi}_1 + \\ &+ m_2 b_1^2 \dot{y}_2 - m_2 a_1 b_1 \dot{y}_1 - m_2 l_7 \dot{\phi}_1 b_1 = \dot{y}_1 (Mab - I_1 c^2 + m_1 a_1 b_1 - m_2 a_1 b_1) + \\ &+ \dot{y}_2 (Mb^2 + I_1 c^2 + m_1 b_1^2 + m_2 b_1^2) + \dot{\phi}_1 (m_1 l_6 b_1 - m_2 l_7 b_1); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 l_6 a_1 \dot{y}_1 + m_1 l_6 b_1 \dot{y}_2 + m_1 l_6^2 \dot{\phi}_1 - m_2 l_7 a_1 \dot{y}_1 + m_2 l_7 b_1 \dot{y}_2 + m_2 l_7^2 \dot{\phi}_1; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = k_1 y_1 - k_1 z_1 + k_3 a_2^2 y_1 - k_3 a_2 b_2 y_2 + k_3 l_6 \phi_1 a_2 + k_4 a_3^2 y_1 - k_4 a_3 b_3 y_2 - k_4 l_7 \phi_1 a_3; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = k_2 y_2 - k_2 z_2 - k_3 a_2 b_2 y_1 + k_3 b_2^2 y_2 - k_3 l_6 \phi_1 b_2 - k_4 a_3 b_3 y_1 + k_4 b_3^2 y_2 + k_4 l_7 \phi_1 b_3; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_1} = k_3 l_6 a_2 y_1 - k_3 l_6 y_2 b_2 + k_3 l_6^2 \phi_1 - k_4 l_7 a_3 y_1 + k_4 l_7 y_2 b_3 + k_4 l_7^2 \phi_1. \quad (22)$$

Используя (15) ÷ (22), запишем уравнения движения системы в виде:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 (Ma^2 + I_1 c^2 + m_1 a_1^2 + m_2 a_1^2) + \ddot{y}_2 (Mab - I_1 c^2 + m_1 a_1 b_1 - m_2 a_1 b_1) + \\ &+ \ddot{\phi}_1 (m_1 l_6 a_1 - m_2 l_7 a_1) + y_1 (k_1 + k_3 a_2^2 + k_4 a_3^2) - \\ &- y_2 (k_3 a_2 b_2 + k_4 a_3 b_3) + \dot{\phi}_1 (k_3 l_6 a_2 - k_4 l_7 a_3) = k_1 z_1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 (Mab - I_1 c^2 + m_1 a_1 b_1 - m_2 a_1 b_1) + \ddot{y}_2 (Mb^2 + I_1 c^2 + m_1 b_1^2 + m_2 b_1^2) + \\ &+ \ddot{\phi}_1 (m_1 l_6 b_1 - m_2 l_7 b_1) - y_1 (k_3 a_2 b_2 + k_4 a_3 b_3) + y_2 (k_2 + k_3 b_2^2 + k_4 b_2^2) + \\ &+ \phi_1 (-k_3 l_6 b_2 + k_4 l_7 b_3) = k_2 z_2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 (m_1 l_6 a_1 - m_2 l_7 a_1) + \ddot{y}_2 (m_1 l_6 b_1 + m_2 l_7 b_1) + \ddot{\phi}_1 (m_1 l_6^2 + m_2 l_7^2) + \\ &+ y_1 (k_3 l_6 a_2 + k_4 l_7 a_3) + y_2 (-k_3 l_6 b_2 + k_4 l_7 b_3) + \phi_1 (k_3 l_6^2 + k_4 l_7^2) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициенты уравнений (23)÷(25) приведены в **таблице 1**. Для системы в координатах  $y_1$ ,  $y_2$  и  $\phi_1$  характерны перекрестные связи:

- между парциальными системами  $y_1$ ,  $y_2$  - инерционно-упругие связи, что предопределяет возможности «зануления» связи;

- между парциальными системами  $y_1$  и  $y_3$  - инерционно-упругая связь;
- между парциальными системами  $y_2$  и  $y_3$  - также имеется инерционно-упругая связь.

Найдем частоты «зануления» перекрестных связей, получим:

между  $y_1$  и  $y_2$  -

$$\omega_1^2 = \frac{k_3 a_2 b_2 + k_4 a_3 b_3}{Mab - I_1 c^2 + a_1 b_1 (m_1 - m_2)}; \quad (26)$$

между  $y_1$  и  $y_3$  -

$$\omega_2^2 = \frac{k_4 l_7 a_3 - k_3 l_6 a_2}{a_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7)}; \quad (27)$$

между  $y_2$  и  $y_3$  -

$$\omega_3^2 = \frac{k_3 l_6 b_2 - k_4 l_7 b_3}{b_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7)}. \quad (28)$$

Передаточные функции системы (при  $z_1 = z_2 = z$ ) могут быть найдены из **табл. 1** по правилам Крамера [8]:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_1 (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + k_2 (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{A}, \quad (29)$$

$$W_2(p) = \frac{y_2}{z} = \frac{k_1 (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + k_2 (a_{11} a_{33} - a_{11} a_{23})}{A}, \quad (30)$$

где

$$A = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) = 0. \quad (30')$$

- характеристическое уравнение.

Решая частотные уравнения числителей (29), (30), найдем, что в системе возможно появление двух частот динамического гашения.

**Табл. 1**

**Таблица коэффициентов системы уравнений (23)÷(25)**

**в координатах  $y_1, y_2, \varphi_1$**

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$\left[ Ma^2 + I_1 c^2 + \right. \\ \left. + a_1^2 (m_1 + m_2) \right] p^2 + \\ + k_1 + k_3 a_2^2 + k_4 a_3^2$	$\left[ Mab - I_1 c^2 + \right. \\ \left. + a_1 b_1 (m_1 - m_2) \right] \times p^2 - \\ - k_3 a_2 b_2 - k_4 a_3 b_3$	$a_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7) p^2 + \\ + k_3 l_6 a_2 - k_4 l_7 a_3$

a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	a <sub>23</sub>
$\left[ \begin{array}{l} Mab - I_1 c^2 + \\ + a_1 b_1 (m_1 - m_2) \end{array} \right] \times p^2 -$ $-k_3 a_2 b_2 - k_4 a_3 b_3$	$\left[ \begin{array}{l} Mb^2 + I_1 c^2 + \\ + b_1^2 (m_1 + m_2) \end{array} \right] p^2 +$ $+k_2 + k_3 b_2^2 + k_4 b_3^2$	$b_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7) p^2 -$ $-k_3 l_6 b_2 + k_4 l_7 b_3$
a <sub>31</sub>	a <sub>32</sub>	a <sub>33</sub>
$a_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7) p^2 +$ $+k_3 l_6 a_2 - k_4 l_7 a_3$	$b_1 (m_1 l_6 - m_2 l_7) p^2 -$ $-k_3 l_6 b_2 + k_4 l_7 b_3$	$(m_1 l_6^2 - m_2 l_7^2) p^2 -$ $-k_3 l_6^2 + k_4 l_7^2$
Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>
k <sub>1z1</sub>	k <sub>2z2</sub>	0

**Примечание:**

$$I_1 = I + Ml_0^2, a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}; a_1 = a + c(l_3 - l_0); b_1 = b - c(l_3 - l_0),$$

$$a_2 = c(l_3 - l_4), b_2 = l_3 - l_4, a_2 = b_2; a_3 = l_3 + l_5, l_3 = l_3 + l_5, a_3 = b_3.$$

**Особенности динамических свойств.** Рассмотрим работу системы в другой системе координат  $y, \phi$  и  $\phi_1$ ,

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}_4^2), \quad (31)$$

где  $\dot{y}_3 = \dot{y} - (l_3 - l_0)\dot{\phi} + l_6\dot{\phi}_1, \dot{y}_4 = \dot{y} - (l_3 - l_0)\dot{\phi} - l_7\dot{\phi}$ .

Преобразуем (31) к детализированному виду:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}^2 - 2\dot{y}(l_3 - l_0)\dot{\phi} + (l_3 - l_0)^2 \dot{\phi}^2 + 2l_6\dot{\phi}_1\dot{y} -$$

$$-2l_6\dot{\phi}_1(l_3 - l_0)\dot{\phi} + l_6^2 \dot{\phi}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}^2 - 2(l_3 - l_0)\dot{y}\dot{\phi} + (l_3 - l_0)^2 \dot{\phi}^2 -$$

$$-2l_7\dot{\phi}_1\dot{y} + l_7\dot{\phi}_1(l_3 - l_0)\dot{\phi} + l_7^2 \dot{\phi}_1^2). \quad (32)$$

Сделаем ряд промежуточных выкладок:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} + m_1\dot{y} - m_1(l_3 - l_0)\dot{\phi} + m_1 l_6 \dot{\phi}_1 + m_2\dot{y} - m_2(l_3 - l_0)\dot{\phi} - m_2 l_7 \dot{\phi}_1, \quad (33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} - m_1 \dot{y} (l_3 - l_0) + m_1 (l_3 - l_0)^2 \dot{\phi} - m_1 l_6 \dot{\phi}_1 (l_3 - l_0) - m_2 (l_3 - l_0) \dot{y} +$$

$$+ m_2 (l_3 - l_0)^2 \dot{\phi} + m_2 l_7 \dot{\phi}_1 (l_3 - l_0), \quad (34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 l_6 \dot{y} - m_1 l_6 (l_3 - l_0) \dot{\phi} + m_1 l_6^2 \dot{\phi}_1 - m_2 l_7 \dot{y} + m_2 l_7 (l_3 - l_0) \dot{\phi} + m_2 l_7^2 \dot{\phi}_1. \quad (35)$$

Запишем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_3 - y_{B_1})^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_4 - y_{B_2})^2. \quad (36)$$

Примем ряд обозначений:

$$a_3 = b_3 = l_3 + l_5, \quad a_2 = b_2 = l_3 - l_4, \quad y_3 - y_{B_1} = -\varphi a_2 + l_6 \varphi_1, \\ y_4 - y_{B_2} = -\varphi a_3 - l_7 \varphi_1, \quad y_1 = y - (l_1 - l_0) \varphi, \quad y_2 = y (l_2 + l_0) \varphi.$$

$$y_3 - y_{B_1} = \varphi (l_4 - l_3) + l_6 \varphi_1, \quad y_4 - y_{B_2} = -\varphi (l_3 + l_5) - l_7 \varphi_1 \quad (37)$$

Введем соотношения

$$a_3 = b_3 = l_3 + l_5, \quad a_2 = b_2 = l_3 - l_4, \quad y_3 - y_{B_1} = -\varphi a_2 + l_6 \varphi_1, \\ y_4 - y_{B_2} = -\varphi a_3 - l_7 \varphi_1, \quad y_1 = y - (l_1 - l_0) \varphi, \quad y_2 = y (l_2 + l_0) \varphi.$$

Пусть  $a_4 = l_1 - l_0$ ,  $b_4 = l_2 + l_0$ , тогда выражение (36) преобразуется к виду

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 [y - a_4 \varphi - z_1]^2 + \frac{1}{2} k_2 (y + b_4 \varphi - z_2)^2 + \\ + \frac{1}{2} k_3 (-\varphi a_2 + l_6 \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (-\varphi a_3 - l_7 \varphi_1)^2 \quad (38)$$

или в развернутом виде

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y^2 - 2y a_4 \varphi + a_4^2 \varphi^2 - 2z_1 y + 2z_1 a_4 \varphi + z_1^2) + \\ + \frac{1}{2} k_2 (y^2 + 2y b_4 \varphi + b_4^2 \varphi^2 - z_2 y - z_2 b_4 \varphi + z_2^2) + \\ + \frac{1}{2} k_3 (l_6^2 \varphi_1^2 - 2l_6 \varphi_1 \varphi a_2 + \varphi^2 a_2^2) + \frac{1}{2} k_4 (\varphi^2 a_3^2 + 2\varphi a_3 l_7 \varphi_1 + l_7^2 \varphi_1^2). \quad (39)$$

Произведем ряд вспомогательных выкладок:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = k_1 y - k_1 a_4 \varphi - k_1 z_1 + k_2 y + k_2 b_4 \varphi + k_2 z_2, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -k_1 y a_4 + k_1 a_4^2 \varphi + k_1 a_4 z_1 + k_2 y b_4 + k_2 b_4^2 \varphi - k_2 b_4 z_2 - k_3 l_6 \varphi_1 a_2 + \\ + k_3 a_2^2 \varphi + k_4 a_3^2 \varphi + k_3 a_3 l_7 \varphi_1, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = k_3 l_6^2 \varphi_1 - k_3 l_6 \varphi a_2 + k_4 a_3 l_7 \varphi + k_4 l_7^2 \varphi. \quad (42)$$

Запишем систему уравнений движения:

$$\ddot{y}(M + m_1 + m_2) + \ddot{\varphi}(-m_1(l_3 - l_0) + \dot{\varphi}_1(m_1l_6 - m_2l_7) + y(k_1 + k_2) + \varphi(-k_1a_4 + k_2b_4) = k_1z_1 - k_2z_2, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y}(-m_1(l_3 - l_0) - m_2(l_3 - l_0)) + \ddot{\varphi}(I_1 + m_1(l_3 - l_0)^2 + m_2(l_3 - l_0)^2) + \\ &+ \ddot{\varphi}_1(m_1l_6(l_3 - l_0) + m_2l_7(l_3 - l_0) + y(-k_1a_4 + k_2b_4 + \\ &+ \varphi(k_1a_4^2 + k_2b_4^2 + k_4a_3^2 + k_3a_2^2)) + \varphi_1(-k_3l_6a_2 + k_3a_3l_7) = -k_1a_4z_1 + k_2b_4z_2, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y}(m_1l_6 - m_2l_7) + \ddot{\varphi}(-m_1l_6(l_3 - l_0) + m_2l_7(l_3 - l_0)) + \ddot{\varphi}_1(m_1l_6^2 + m_2l_7^2) + \\ &+ y(0) + \varphi(-k_3l_6a_2 + k_4a_3l_7) + \varphi_1(k_3l_6^2 + k_4l_7^2) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Табл. 2

**Коэффициенты уравнений движения (43) ÷ (45)**

**в координатах  $y$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_1$**

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(M + m_1 + m_2)p^2 + k_1 + k_2$	$-m_1(l_3 - l_0) -$ $-m_2(l_3 - l_0)p^2 -$ $-k_1a_4 + k_2b_4$	$(m_1l_6 - m_2l_7)p^2$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-m_1(l_3 - l_0) - m_2(l_3 -$ $-l_0)p^2 - k_1a_4 + k_2b_4$	$(I_1 + m_1(l_3 - l_0)^2 +$ $+m_2(l_3 - l_0)p^2 +$ $+k_1a_4^2 + k_2b_4^2 + k_3a_2^2 + k_4a_3^2$	$-m_1l_6(l_3 - l_0) +$ $+m_2l_7(l_3 - l_0))p^2 -$ $-k_3l_6a_2 + k_4a_3l_7$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(m_1l_6 - m_2l_7)p^2$	$-m_1l_6(l_3 - l_0) + m_2l_7(l_3 -$ $-l_0))p^2 - k_3l_6a_2 + k_4a_3l_7$	$(m_1l_6^2 - m_2l_7^2)p^2 +$ $+k_3l_6^2 + k_4l_7^2$
$Q'_1$	$Q'_2$	$Q'_3$
$k_1z_1 - k_2z_2$	$-k_1a_4z_1 + k_2b_4z_2$	0

**Примечание:**

$Q'_1, Q'_2, Q'_3$  - обобщенные силы, соответствующие координатам  $y, \varphi, \varphi_1$ ;

при этом  $a_4 = l_1 - l_0, b_4 = l_2 + l_0, a_2 = b_2 = l_3 - l_4, a_3 = b_3 = l_3 + l_5$

Коэффициенты уравнений движения в координатах  $y$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_1$  приведены в **таблице 2**. Отметим, что связи между парциальными системами  $y$ ,  $y_1$  и  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  носят упруго-инерционный характер и на определенных частотах могут «зануляться», обеспечивая независимость движения:

между парциальными системами  $y$  и  $\varphi$ , при этом

$$\omega_1^2 = \frac{k_2 b_4 - a_4 k_1}{m_1 (l_3 - l_0) + m_2 (l_3 - l_0)} = \frac{k_2 b_4 - k_1 a_4}{(l_3 - l_0)(m_1 + m_2)}; \quad (46)$$

между парциальными системами  $\varphi$  и  $\varphi_1$  «зануление» происходит на частоте

$$\omega_2^2 = \frac{k_4 a_3 l_7 - k_3 l_6 a_2}{(l_3 - l_0)(m_1 l_6 + m_2 l_7)}. \quad (47)$$

Связь между  $y$  и  $\varphi_1$  носит инерциальный характер и не «обнуляется».

Передаточные функции для системы координат  $y$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_1$  (при  $z_1 = z_2 = z$ ) имеют вид

$$W_1(p) = \frac{\bar{y} (k_1 - k_2)(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + \dots}{\bar{z}} \dots \quad (48)$$

$$\dots \frac{+(k_2 b_4 - k_1 a_4)(a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{A_1},$$

$$W_1(p) = \frac{\bar{y} (k_1 - k_2)(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + \dots}{\bar{z}} \dots \quad (49)$$

$$\dots \frac{+(k_2 b_4 - k_1 a_4)(a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{A_1},$$

где  $A_1$  определяется выражением (30'). Из частотных уравнений числителей (48), (49) могут быть определены по две частоты динамического гашения. На **рис. 3** представлена структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления для расчетной схемы (**рис. 2**) в координатах  $y$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_1$ . Особенностью структурной схемы является система формирования внешних воздействий, в которой может происходить взаимная компенсация возникающих сил, в частности, при выполнении условий  $k_1 a_4 = k_2 b_4$ ; в этом случае на парциальную систему  $\varphi$  внешнее возмущение передаваться не будет. Следует отметить, что все динамические взаимодействия в системах рассматриваются в предположении о малости действия сил трения.

Для исследования влияния  $l_0$  произведем ряд расчетов. Для оценки динамических свойств решалась модельная задача, в которой были приняты следующие параметры:

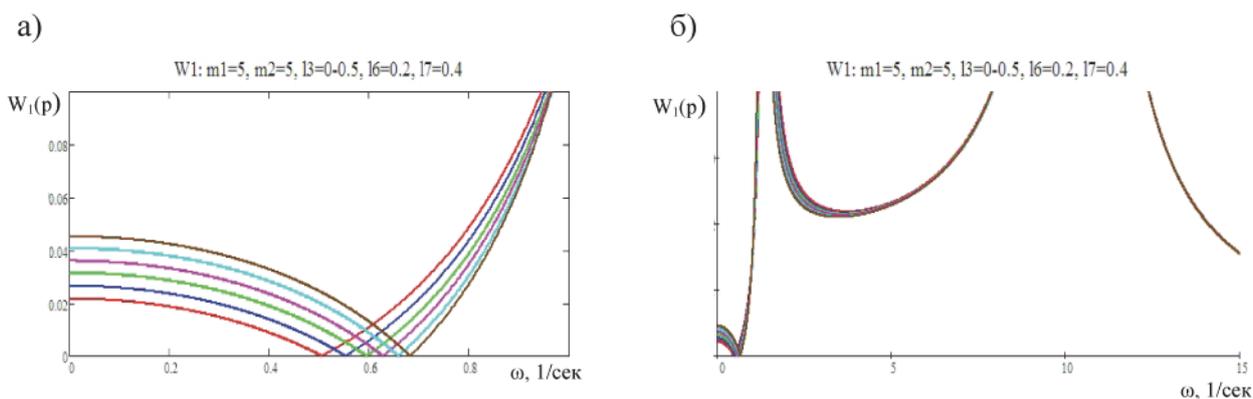
$$M = 100 \text{ кг}, J = 50 \text{ кгм}^2, m_1 = m_2 = 5, 10, 20, 50 \text{ кг},$$

$$K_1 = 5000 \text{ Н/м}, K_2 = 7000 \text{ Н/м}, K_3 = 200 \text{ Н/м}, K_4 = 300 \text{ Н/м},$$

$$l_3 = 0 \div 0,5 \text{ м (с шагом 0,1)}; l_4 = l_6 = 0,2; 0,4;$$

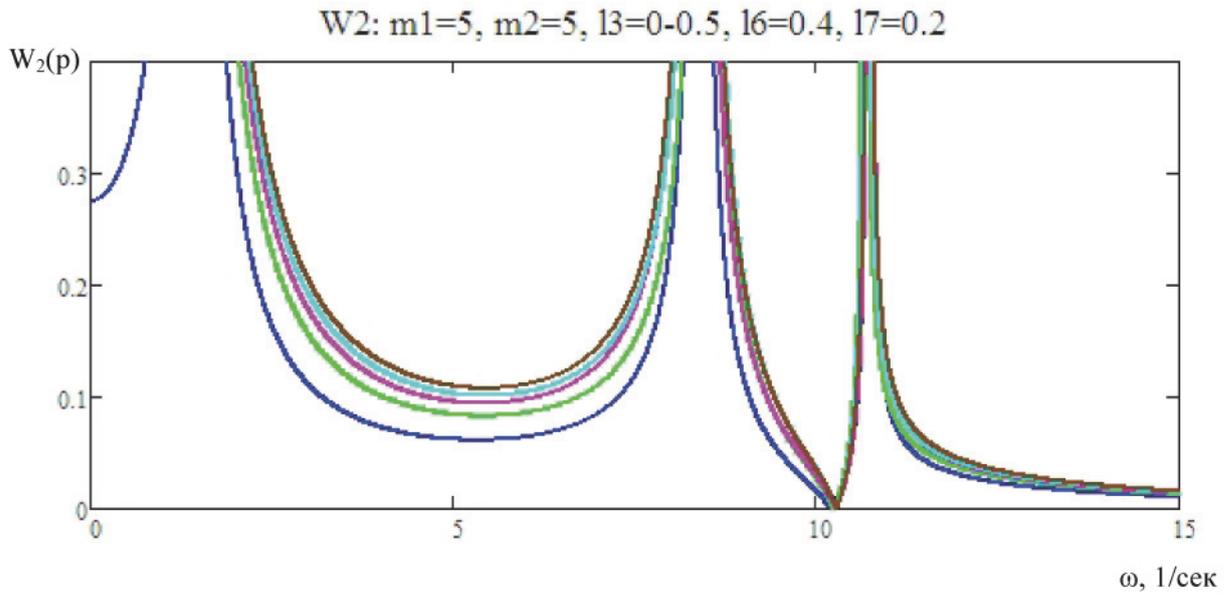
$$l_5 = l_7 = 0,2; 0,4; \omega = 0 \div 15 \text{ рад/сек.}$$

На **рис. 3** показаны амплитудно – частотные характеристики (АЧХ), построенные с использованием выражений (48). В частности, можно отметить, что семейство кривых, которые отражают влияние изменения смещения точки установки ДГ на свойства системы (**рис. 3б**). Для системы характерно наличие двух режимов динамического гашения в до- и межрезонансных частотных областях (**рис. 3а**). На **рис. 3б** взаимное расположение АЧХ показано более детализировано.



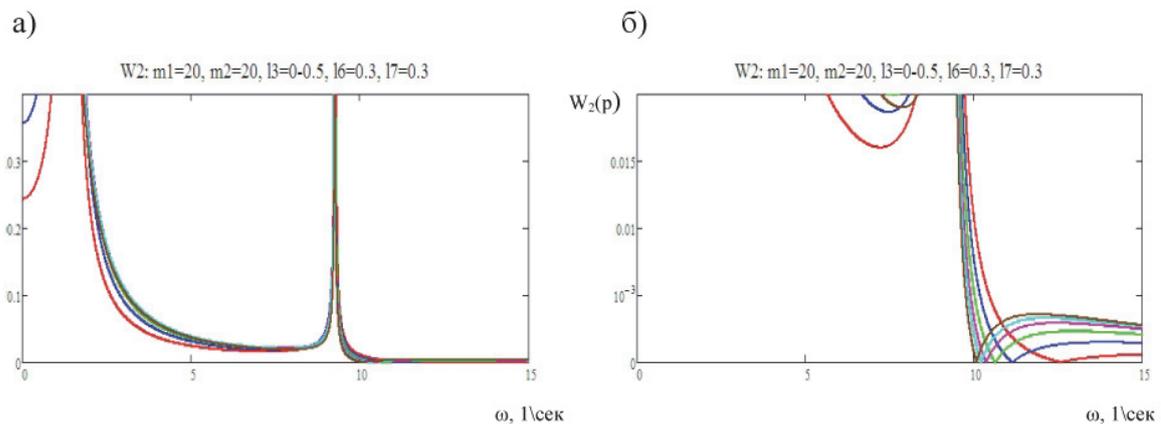
**Рис. 3. Семейство АЧХ системы по координате  $y$ , при различных значениях  $l_0$  (а); взаимное расположение АЧХ в дорезонансной области (б).**

Влияние изменения  $l_0$  характер взаимного расположения АЧХ зависит, существенным образом, от соотношения параметров и выбора координат объекта защиты. На **рис. 4** приведено семейство АЧХ по координате  $y_2$ . Для системы характерным является наличие одного режима колебаний в межрезонансной области. В системе проявляются три режима резонансных колебаний.



**Рис. 4.** Семейство АЧХ виброзащитной системы по координате  $y_2$

Сравнительный анализ АЧХ при различных сочетаниях параметров показывает возможность реализации различных форм кривых, отражающих особенности влияния  $l_0$ . На **рис. 5** приведено семейство АЧХ, отражающее при изменении  $l_0$  возможность формирования режима динамического гашения в зарезонансной области (**рис. 5а, б**).

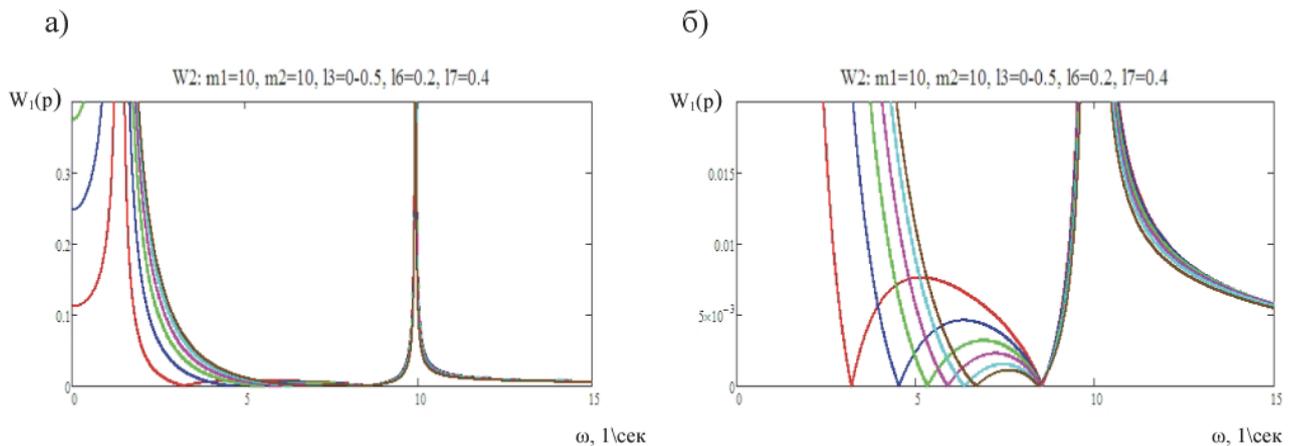


**Рис. 5.** Семейство АЧХ системы при динамическом гашении в зарезонансной области (а); увеличенное изображение области динамического гашения (б).

Особенностью системы является то обстоятельство, что режим резонанса на высшей частоте собственных колебаний не всегда реализуется, поскольку определяемая частота носит комплексно-сопряженный характер. Однако смещение режима динамического

гашения за пределы второй частоты собственных колебаний связано формированием некоторого максимума отклонений по координате  $y_2$ .

Характерная особенность в формировании режимов динамического гашения колебаний приведена на **рис. 6 а, б** для случая возникновения двух режимов ДГ в межрезонансной области частот; третья частота при данных параметрах не реализуется.



**Рис. 6. Семейство АЧХ системы при двух режимах динамического гашения (а), увеличенное изображение зоны динамического гашения колебаний (б)**

Отметим, что рассмотрение динамических свойств системы с тремя степенями свободы в общем случае предполагает существование трех режимов резонансных явлений, однако при построении АЧХ в силу условий симметрии взаимодействий и комплексности корней характеристического уравнения, вид кривых может носить упрощенный (по числу резонансных пиков) вид; режимы динамического гашения также реализуются в большом разнообразии форм, что отражается в различных вариантах расположения числа режимов динамического гашения колебаний и их места расположения на частотной оси.

**Заключение.** Предварительная оценка динамических свойств виброзащитных систем с двумя степенями свободы с динамическим гасителем, прикрепляемом через сочленение (или шарнир) показывает возможность изменения достаточно широкого спектра изменений частотных характеристик. В этом плане наибольший интерес для технических приложений представляет возможность вариации точки установки ДГ, а также управления параметрами  $m_1$  и  $m_2$ ,  $l_6$  и  $l_7$ , позволяющим изменять не только свойства системы, но ее структуру (например, при выполнении условий  $m_1 l_6 - m_2 l_7 = 0$ ).

Одним из подходов, которые могли бы иметь продолжение, является оценка возможности реализации совместных режимов динамического гашения по  $y_1$  и  $y_2$ , что соответствует режиму динамического гашения по  $y$ , (при этом  $\varphi \neq 0$ ), а также выполнения условий совместного динамического гашения по  $y$  и по  $\varphi$ .

### Библиографический список

1. Коренев С.В. Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. / Б.Г. Коренев, П.М. Резников. – М.: Наука., 1963. – 535 с.
2. Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. – Новосибирск. : Наука. 1982. – 182 с.
3. Карамышкин В.В. Динамические гасители колебаний. – Л.: Машиностроение. 1988. – 108 с.
4. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. / Р.В. Ротенберг – М.: Машиностроение. 1972. – 372 с.
5. Ермошенко Ю.В. Управление вибрационным состоянием в задачах виброзащиты и виброизоляции. // Диссертация на соискание уч. ст. к.т.н. – Иркутск: ИрГУПС. 2002. – 185 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том 2. Динамика. – М.: Наука. 1968. – 640 с.
7. Елисеев С.В. Ермошенко Ю.В. Возможные подходы в изменении перекрестных связей в системах с двумя степенями свободы // Системы. Методы. Технологии. Вып. 1(5). Братск.: БрГУ, 2010., с. 20 – 28.
8. Дружинский И.А. Механические цепи – Л.: Машиностроение. / 1977. – 224 с.