электронное научно-техническое издание

## НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Отражение сферической волны на импедансной границе раздела двух сред # 03, март 2011

авторы: Касаткин Б. А., Злобина Н. В., Стаценко Л. Г., Злобин Д. В.

kasatkas@marine.febras.ru,

zlobina@marine.febras.ru,

lu-sta@mail.ru,

memrbomel@mail.ru,

Институт проблем морских технологий ДВО РАН,

Дальневосточный государственный технический университет

Закон отражения и преломления световых и звуковых пучков известен как закон Снеля. Характерная особенность закона Снеля проявляется при полном отражении падающей звуковой волны от границы раздела двух сред, когда полностью прекращается поток мощности через границу раздела. Преломлённая волна становится неоднородной, соответствующей реактивному инерционному входному импедансу нижнего полупространства, а её амплитуда экспоненциально убывает с глубиной. Некорректность такого решения заключается в том, что неоднородная волна, переносящая ненулевой поток мощности в направлении распространения, не имеет источника энергии в нижнем полупространстве и не может получить необходимую мощность через механизм преломления от источника, находящегося в верхнем полупространстве.

Учитывая эту некорректность, Ньютон предложил гипотезу о полном внутреннем отражении с соответствующим сдвигом луча вдоль границы раздела. Сдвиг ограниченных звуковых пучков при их отражении в области углов полного внутреннего отражения, получившего название эффекта Гоосса–Генхена. Экспериментальное наблюдение этого

сдвига в классических экспериментах Шоха [1] подтверждает гипотезу Ньютона только в части, касающейся геометрических искажений пространственной структуры звукового пучка горизонтальным сдвигом. Вопрос об источнике энергии, переносимой неоднородной волной в нижнем полупространстве, остаётся нерешенным, т. к. рефракционный механизм не имеет физической реализации в однородной среде. Кроме того, остается необъясненной угловая зависимость сдвига направленных звуковых пучков при отражении в экспериментах Шоха.

В статье предлагается корректная постановка и решение задачи на отражение произвольных звуковых пучков с привлечением сопряженных решений исходной несамосопряженной задачи.

Рассмотрим отражение сферической волны от импедансной границы раздела двух сред. Верхнее полупространство, из которого падает волна, характеризуется плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ . Нижнее полупространство обладает сдвиговой упругостью и имеет плотность  $\rho_2$  и скорости продольной и поперечной волн соответственно  $c_L$  и  $c_t$ . Скалярный потенциал звукового поля в верхней среде можно представить в виде следующего несобственного интеграла [1]:

$$\varphi_1(r,z) = \int_0^\infty \widetilde{\varphi}_1(\xi,z) J_0(\xi r) \xi d\xi , \qquad (1)$$

где  $\widetilde{\varphi}_1(\xi,z)$ , в свою очередь, является решением задачи для поперечного оператора с одним импедансным граничным условием

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_1(\xi, z)}{\partial z^2} + (k_1^2 - \xi^2) \widetilde{\varphi}_1(\xi, z) = -\delta(z - z_0); \quad z \ge 0, \tag{2}$$

$$z = 0;$$
  $p_1 + Z_{ex} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0,$   $Z_{ex} = \frac{\rho_2 c_L}{\cos \theta} \cos^2(2\gamma) + \frac{\rho_2 c_t}{\cos \gamma} \sin^2(2\gamma),$  (3)

где  $p_1$  - звуковое давление в верхней среде,  $\theta$  ,  $\gamma$  - углы преломления по продольной и поперечной составляющим соответственно,  $z_0$  - вертикальная координата источника,  $Z_{ex}$  - входной импеданс нижнего полупространства.

Запишем решение задачи (2), (3) для отраженной волны с учетом асимптотического выражения для функции Ганкеля:

$$\varphi_{\text{orp}}(r,z) = (i2\pi r)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) e^{-i\Phi_1(\xi)} \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{k_{31}}, \quad \Phi_1(\xi) = \xi r + k_{31}(z+z_0), \tag{4}$$

где V - коэффициент отражения границы раздела жидкость - твердое тело.

$$V = \frac{k_{31}[k_{3t}\cos^2(2\gamma) + k_{3L}\sin^2(2\gamma)] - \rho_{12}k_{3L}k_{3t}}{k_{31}[k_{3t}\cos^2(2\gamma) + k_{3L}\sin^2(2\gamma)] + \rho_{12}k_{3L}k_{3t}},$$
(5)

$$k_{31}=k_1\cos heta_1,\quad k_{3l}=k_1\sqrt{c_{1L}^2-\sin^2 heta_1}\,,\;\;k_{3t}=k_1\sqrt{c_{1t}^2-\sin^2 heta_1}\,\,,\;\;\; heta_1$$
 - угол падения,

$$\cos(2\gamma) = 1 - \frac{2}{c_{1t}^2} \sin^2 \theta_1, \quad \sin(2\gamma) = \frac{2}{c_{1t}^2} \sin \theta_1 \sqrt{c_{1t}^2 - \sin^2 \theta_1},$$

$$c_{1L} = \frac{c_1}{c_L}, \ c_{1t} = \frac{c_1}{c_t}, \ \xi = k_1 \sin \theta_1.$$

При построении решения для поля отраженных волн разрезы, устраняющие  ${\rm неоднозначность} \ {\rm радикалов} \ k_{3L} \, , \ k_{3t} \ {\rm определим} \ {\rm из} \ {\rm условия} \ {\rm излучения}$ 

$$\operatorname{Re} k_{3L} \ge 0, \qquad \operatorname{Re} k_{3t} \ge 0. \tag{6}$$

Условия излучения в форме (6) являются математическим выражением принципа причинности, в соответствии с которым поток мощности должен быть направлен от источника энергии в нагрузку, роль которой играет нижнее полупространство. Действительно, в соответствии с (6) вещественная часть входного импеданса нижнего

полупространства является положительно определенной величиной, тогда как реактивная часть входного импеданса может имеет любой знак в полном соответствии с принципом равной реализуемости реактивных импедансов двух типов.

При построении решения, соответствующего условиям (6), возникают специфические проблемы, связанные с тем, что звуковое поле в нижнем полупространстве в области углов полного внутреннего отражения описывается неоднородными волнами, амплитуда которых либо экспоненциально убывает (регулярные составляющие), либо экспоненциально растет при удалении от границы раздела (обобщенные составляющие). Видимо впервые решения такого типа были рассмотрены в теоретическом плане при анализе корней характеристического уравнения описывающего волны Шолте регулярного или обобщенного типа на границе раздела жидкого и твердого полупространств [2]. Французскими акустиками [3] такие волны были найдены экспериментально на границе раздела вода — плексиглас и вода—поливинилхлорид.

В классическом решении граничной задачи на отражение [1] разрезы и верхние листы римановой поверхности определяются условиями

$$\operatorname{Im} k_{3L} \le 0, \ \operatorname{Im} k_{3t} \le 0.$$
 (7)

Однако, такое решение не удовлетворяет ни принципу причинности, ни принципу равной реализуемости двух реактивных входных импедансов инерционного и упругого характера, которые реализуются неоднородными волнами нижнего полупространства с экспоненциально убывающей и экспоненциально растущей амплитудами. Коэффициент отражения полученный из решения, не содержащего обобщённых составляющих, является коэффициентом отражения плоской волны  $V_{nn} = V$ . В отличие от него полученный с учетом условий (6) коэффициент отражения сферической волны  $V_{c\phi}$  будет определяться линейной

комбинацией коэффициентов отражения для сопряжённых решений, которые в совокупности обеспечивают непрерывность поля на границе раздела по нормальным смещениям и напряжениям:

$$\varphi_{\text{orp}}(r,z) \approx \frac{V_{c\phi}(\theta_{1})}{R} e^{-ik_{1}R}, 
R^{2} = r^{2} + (z + z_{0})^{2}, 
\theta_{1} = arctg \frac{r}{z + z_{0}}, 
V_{c\phi} = \begin{cases}
V_{nn} = V_{nn}(k_{3L}, k_{3t}); & \theta_{1} \leq \theta_{\kappa p, 1} = \arcsin c_{1L} \\
\frac{3}{4}V_{nn} + \frac{1}{4}V_{nn}^{*}; & \theta_{\kappa p, 1} \leq \theta_{1} \leq \theta_{\kappa p, 2} = \arcsin c_{1t} \\
\frac{5}{8}V_{nn} + \frac{1}{8}(V_{L} + V_{t} + V_{Lt}); & \theta_{\kappa p, 2} \leq \theta_{1} \leq \frac{\pi}{2}
\end{cases}$$
(8)

где  $V_L = V_L(k_{3L}^*, k_{3t})$  — коэффициент отражения от полупространства, в котором продольная волна является обобщённой, а поперечная регулярной,  $V_t = V_t(k_{3t}^*, k_{3L})$  — коэффициент отражения от полупространства, в котором поперечная волна является обобщённой, а продольная регулярной,  $V_{Lt} = V_{Lt}(k_{3L}^*, k_{3t}^*)$  — коэффициент отражения от полупространства, в котором продольная и поперечная волны являются обобщёнными.

Можно получить более точные оценки коэффициента отражения в двух частных случаях, представляющих особый интерес.

На достаточно низких частотах и для источников донного типа коэффициент отражения определяется следующим образом

$$\cos(2k_{31}z_0) = 1, \quad z_0 << \frac{\lambda}{4\pi\cos\theta_1},$$

$$\gamma^{(H^4)} = a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}, \qquad a = \frac{1}{3} \left[ 2 + \frac{V^2}{(1 - V^2)(1 + V)} \right],$$

$$V_{c\phi}^{(H^4)} = V - \gamma^{(H^4)} \Delta V = V + \gamma^{(H^4)} \frac{1 - V^2}{V}.$$
(9)

где  $\lambda$  - длина волны,  $z_0$  - горизонт излучения.

На достаточно высоких частотах с учётом случайного характера условий реального эксперимента выполняется условие  $\langle\cos(2k_{31}z_0)\rangle=0$ . В этом случае коэффициент отражения определяется формулами

$$\gamma^{(s_{4})} = \begin{cases}
b + \sqrt{b^{2} - c}, & V < \frac{1}{3} \\
\frac{c}{2b}, & V = \frac{1}{3}, & b = \frac{(1 + 2V)(1 - V^{2}) + V^{2}}{(3V - 1)(1 - V^{2})}, & c = \frac{1 + V}{4(3V - 1)}, \\
b - \sqrt{b^{2} - c}, & V > \frac{1}{3}
\end{cases}$$

$$V_{c\phi}^{(s_{4})} = V + \gamma^{(s_{4}Y)} \frac{1 - V^{2}}{V}.$$
(10)

Усредняя звуковые поля в верхнем полупространстве по всему интервалу изменения угла падения, можно получить усреднённую оценку скорректированного коэффициента отражения сферической волны

$$\langle V_{C\Phi} \rangle = \frac{5}{8}V + \frac{1}{8}(V_L + V_t + V_{Lt}).$$
 (11)

Угловые зависимости коэффициентов отражения  $V_{nn}$  и  $V_{c\phi}$  были рассчитаны для границы раздела вода - твердое полупространство с различными характеристиками твердого полупространства. На рис.1,a, $\delta$  представлены коэффициенты отражения в случае, когда твердое полупространство соответствует осадочному слою морского дна с параметрами

 $ho_{12}=1/1,6$  ,  $c_{1L}=1,5/1,75$  ,  $c_{1t}=15$  ,  $(c_t=100\,\mathrm{m/c})$  и  $c_{1t}=3$  ,  $(c_t=500\,\mathrm{m/c})$ . В этом случае сдвиговая упругость осадочного слоя практически не влияет на угловую зависимость коэффициентов отражения, а сам осадочный слой с низкой сдвиговой упругостью вполне можно считать эквивалентной жидкостью. Рис.1,в поясняет угловую зависимость коэффициентов отражения на границе раздела вода плексиглас (  $\rho_{12}$  = 1/1,18;  $c_{1L}$  = 1,48/2,75;  $c_{1t}$  = 1,48/1,39 ), которая оказывается весьма прозрачной в диапазоне углов, больших первого критического. Во всех трёх рассмотренных ситуациях скорость поперечной волны удовлетворяла условиям  $c_t \leq c_1 \leq c_L$ . Согласно работе [3], в средах именно такого типа пограничные волны обобщённого типа были обнаружены экспериментально.

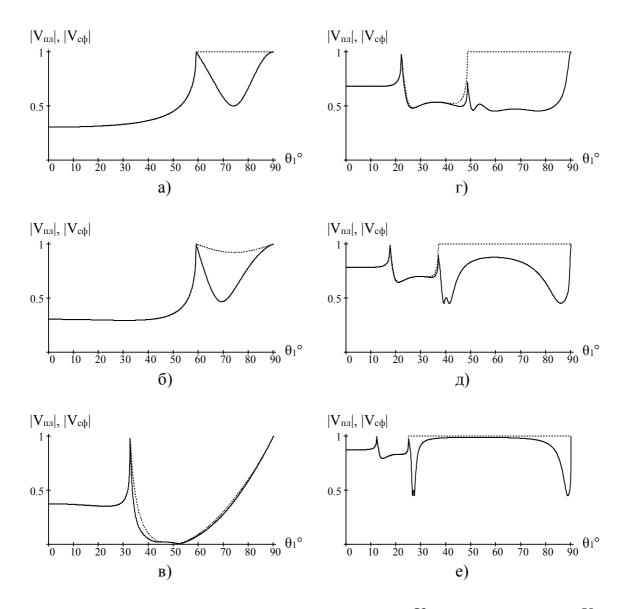


Рис. 1. Угловая зависимость коэффициентов отражения  $V_{c\phi}$  (сплошная линия) и  $V_{nn}$  (пунктирная) для границы раздела жидкого и твердого полупространств: а), б) вода — осадочный слой морского дна; в) вода—плексиглас; г), д) вода—базальт; е) ксилол—алюминий.

Рис.1,z-e поясняют угловую зависимость коэффициентов отражения в случае достаточно жёсткого полупространства, для которого выполняются условия  $c_1 \leq c_t \leq c_L$ . Можно отметить принципиальное различие в поведении коэффициентов отражения  $V_{c\phi}$ ,  $V_{nn}$  в области углов, превышающих второй критический, причём ситуации на рис.1,z,d соответствуют скальному основанию морского дна типа базальта с параметрами  $\rho_{12} = 1/2$ ;

 $c_{1L}=1,5/4\;;\;\;c_{1t}=2c_{1L}\;\;$  и  $\;\rho_{12}=1/2,5\;;\;\;c_{1L}=1,5/5\;;\;\;c_{1t}=2c_{1L}\;,\;$  соответственно. Рис.1,е соответствует границе раздела ксилол-алюминий ( $\rho_{12}=0,86/2,7\;;\;\;c_{1L}=1,35/6,4\;;\;\;c_{1t}=2c_{1L}$ ) в классическом эксперименте Шоха [1] по экспериментальному наблюдению сдвига направленных звуковых пучков при полном внутреннем отражении.

Угловая зависимость коэффициента отражения сферической волны в определении для случая жёсткого твёрдого полупространства по формулам (9)–(11) показана на рис.2. В расчётах принято  $\rho_{12}=0.86/2.7$ ,  $c_{1L}=1.35/6.4$ ,  $c_{1t}=2c_{1L}$ , что соответствует границе раздела ксилол–алюминий, для которой наиболее отчётливо проявился сдвиг направленных звуковых пучков при полном внутреннем отражении в классических экспериментах Шоха [1].

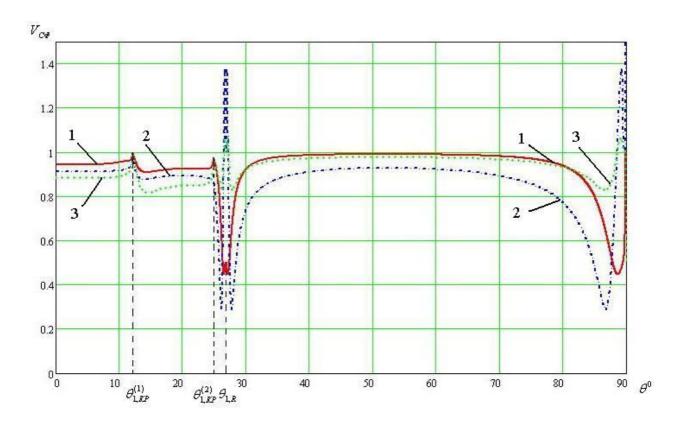


Рис. 2. Угловая зависимость коэффициентов отражения: 1 -  $\langle V_{c\phi} \rangle$ , 2 -  $V_{c\phi}^{(\mu q)}$ , 3 -  $V_{c\phi}^{(gq)}$  для границы раздела ксилол—алюминий.

Наиболее существенные отличия в поведении коэффициентов отражения сферической волны и плоской волны имеют место в окрестности второго критического угла (25°), угла падения, соответствующего возбуждению волны Рэлея (27°), и для скользящих углов падения (90°). Угловая зависимость усреднённого коэффициента отражения  $\langle V_{c\phi} \rangle$  наилучшим образом соответствует экспериментальным результатам Шоха, что и было отмечено в работе [4].

Характерная особенность полученных Шохом экспериментальных результатов заключается в том, что максимальный сдвиг направленных звуковых пучков при полном внутреннем отражении имеет место не для второго критического угла, как предсказывает классическая теория, а для угла падения, соответствующего возбуждению волны Релея. Более того, классическая теория предсказывает бесконечно большой сдвиг направленных пучков при втором критическом угле, тогда как эксперименты Шоха свидетельствуют об отсутствии сдвига для второго критического угла. Именно эта особенность хорошо объясняется формулой (11), которая предсказывает максимальную энергетическую прозрачность границы раздела  $D_E = 1 - \left|V_{c\phi}\right|^2$  для угла падения, соответствующего возбуждению волны Релея, и нулевую энергетическую прозрачность границы раздела для второго критического угла.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
- Ansell J.H. The roots of the Stoneley wave equation for liquid-solid interfaces // Pure Appl. Geophys. 1972. V. 194. P. 172-188.

- 3. Padilla F., de Billy M., Quentin G. Theoretical and experimental studies of surface waves on solid-fluid interfaces when the value of the fluid sound velocity is located between the shear and the longitudinal ones in the solid // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106(2). P. 666-673.
- 4. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. М.: Наука, 2009. 496 с.