электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421000025. ISSN 1994-0408

Геометрия многосекционного манипулятора типа «хобот»

 # 12, декабрь 2010

авторы: Волкоморов С. В., Карпенко А. П.

УДК 519.6

Введение

В настоящее время в машиностроении актуальной является задача разработки технологических машин для выполнения механической обработки внутренних поверхностей полостей сложной формы, например, внутренних каналов охлаждаемых лопаток турбин для авиационной и космической техники. В технологии катастроф необходимы машины для организации доступа к внутренним объемам разрушенных зданий и сооружений. Аналогичные задачи возникают при проведении ремонтных и восстановительных работ в трубопроводах, при проведении ряда хирургических операций и т.д. Обычно для решения перечисленных задач используются многозвенные рычажные манипуляторы либо гибкие манипуляторы. Серьезным недостатком указанных манипуляторов является их недостаточная жесткость, усложняющая управление ими, затрудняющая использование высокоэнергетического обрабатывающего инструмента и достижение высокой точности обработки.

В значительной мере преодолеть указанные недостатки могут манипуляторы типа "хобот", построенные на основе многосекционных механизмов с параллельной структурой [1]. Варианты структуры секций манипулятора типа «хобот» рассмотрены в работах [2, 3].

Одними из первых при конструировании многосекционного манипулятора типа «хобот» возникают следующие задачи: 1) найти

оптимальную форму секций манипулятора; 2) найти их оптимальные размеры.

При решении первой из указанных задач в работе используется подход на основе представления манипулятора в виде консольной балки круглого поперечного сечения и трех следующих критериев оптимальности:

- критерий равного сопротивления манипулятора изгибу, использующий теорию балок равного сопротивления [4];
- критерий равной удельной мощности;
- критерий равной удельной энергии.

Перечисленные критерии применяются к оптимизации формы манипулятора при различных видах нагрузки: статическая нагрузка, вызванная внешними сосредоточенными силами и моментами; статическая распределенная нагрузка, обусловленная весом балки; динамическая распределенная нагрузка, возникающая при ускоренном движении частей балки; динамическая распределенная нагрузка, вызванная наличием лобового сопротивления внешней среды при движении в ней балки.

Отметим, что если исходить из экономических критериев, то оптимальным может быть манипулятор, все секции которого одинаковы. Отметим в этой связи, что известный манипуляционный робот LX-4 компании Logabex [5] состоит из 4-х идентичных механизмов параллельной кинематики типа гексапод (платформа Стюарта).

При решении второй задачи - определение оптимального размера секций манипулятора – он также рассматривается, как консольная балка круглого поперечного сечения. Используется подход на основе критерия равной жесткости секций.

В первом разделе работы рассмотрена задача оптимизации формы манипулятора по критерию равного сопротивления изгибу, во втором разделе – по критерию равной удельной мощности, в третьем разделе – по критерию равной удельной энергии. Четвертый раздел посвящен задаче определения

оптимального размера секций манипулятора. В заключении формулируются основные результаты работы и обсуждаются возможные направления ее развития.

Некоторые результаты данной работы опубликованы в работе [6].

1. Оптимизация формы манипулятора по критерию равного сопротивления изгибу

«Хобот» манипулятора представим в виде консольной балки сплошного круглого поперечного сечения (рисунок 1), плотность материла которой постоянна и равна ρ.

Вообще говоря, в зависимости от вида нагружения и сечения балки, наряду с нормальными напряжениями существенными могут быть и касательные напряжения в ней. Для балки сплошного сечения последними напряжениями можно пренебречь [4]. Поэтому рассмотрим консольную балку, которая функционирует в условиях изгиба и в которой имеют место только нормальные напряжения.

Максимальное напряжение в сечении X балки при изгибе в плоскости $0xy$ в принятых соглашениях равно

$$\sigma_{\max}(X) = \frac{M_{\xi}(X)}{W_z(X)} = a_1 \le [\sigma],$$

где $M_{\xi}(X)$ - изгибающий момент в сечении X, $W_z(Z)$ - момент сопротивления данного сечения, $[\sigma]$ - максимально допустимое напряжение (рис. 1). Отсюда следует, что у балки равного сопротивления изгибу момент сопротивления сечения должен быть прямо пропорционален изгибающему моменту в этом сечении:

$$W_z(X) = \frac{M(X)}{a_1}. \qquad (1)$$

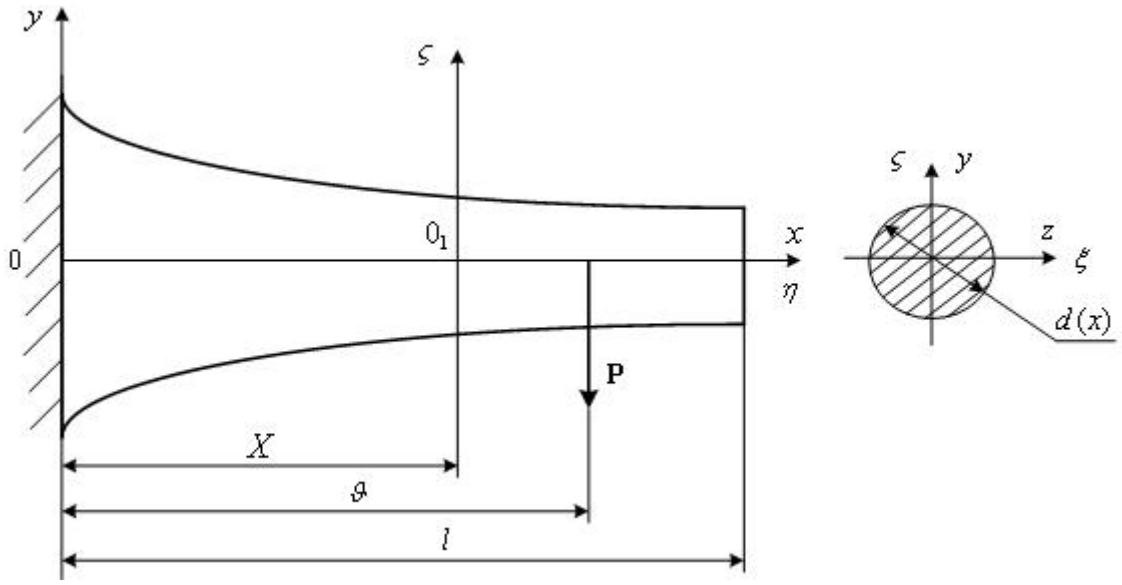


Рис. 1. К определению консольной балки равного сопротивления изгибу

Поскольку для сплошной балки круглого поперечного сечения момент сопротивления сечения X равен

$$W_z(X) = \frac{\pi r^3(X)}{4},$$

выражение (1) можно записать в виде

$$r(X) = \sqrt[3]{\frac{4M_\xi(X)}{\pi a_1}} \qquad (2)$$

где $r(X)$ - радиус балки в сечении X.

Из выражения (2) следует, что в балке равного сопротивления изгибу закон изменения радиуса $r(x)$ определяется законом изменения момента $M_\xi(X)$, который, в свою очередь, определяется видом нагружения балки.

Отметим, что правомочность подхода к определению оптимальной формы секций манипулятора, исходя из теории балок равного сопротивления изгибу, вытекает из цепочки следующих утверждений:

- приводы каждой из секций манипулятора должны развивать усилия, пропорциональные напряжениям, возникающим в этой секции;

- при прочих равных условиях, максимальные усилия, развиваемые приводами, пропорциональны площади их поперечного сечения;
- площадь поперечного сечения секции пропорциональна площади поперечного сечения приводов.

Последовательно рассмотрим нагружение балки внешним сосредоточенным моментом, внешней сосредоточенной силой, распределенной силой веса балки, распределенной силой, обусловленной ускоренным движением частей балки, а также распределенной силой лобового сопротивления внешней среды.

1.1. Нагружение сосредоточенным моментом. Из выражения (2) следует, что балка, нагруженная на своем свободном конце сосредоточенным моментом $M = const$ (рисунок 2а), будет балкой равного сопротивления изгибу, если ее сечение постоянно и диаметр определяется формулой

$$r = \sqrt[3]{\frac{4M}{\pi a_1}} = const .$$

1.2. Нагружение сосредоточенной силой. Если консольная балка равного сопротивления изгибу нагружена сосредоточенной силой (рисунок 2б)), то из выражения (2) следует, что ее радиус определяется формулой

$$r(X) \approx \sqrt[3]{\frac{4P(l-X)}{\pi a_1}}, \qquad (3)$$

где l - длина балки.

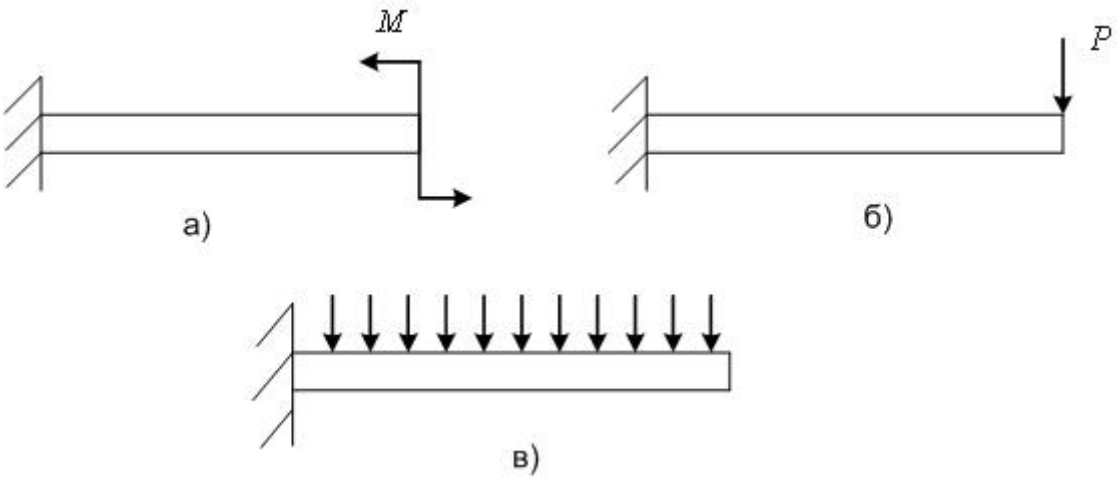


Рис. 2. Виды нагружения консольной балки

Зависимость (3) иллюстрирует рисунок 3. Заметим, что форма хобота слона явно отличается от той, которая вытекает из этого рисунка. Другими словами, при «конструировании» хобота эволюция, очевидно, «использовала» критерий оптимальности, отличный от рассматриваемого.

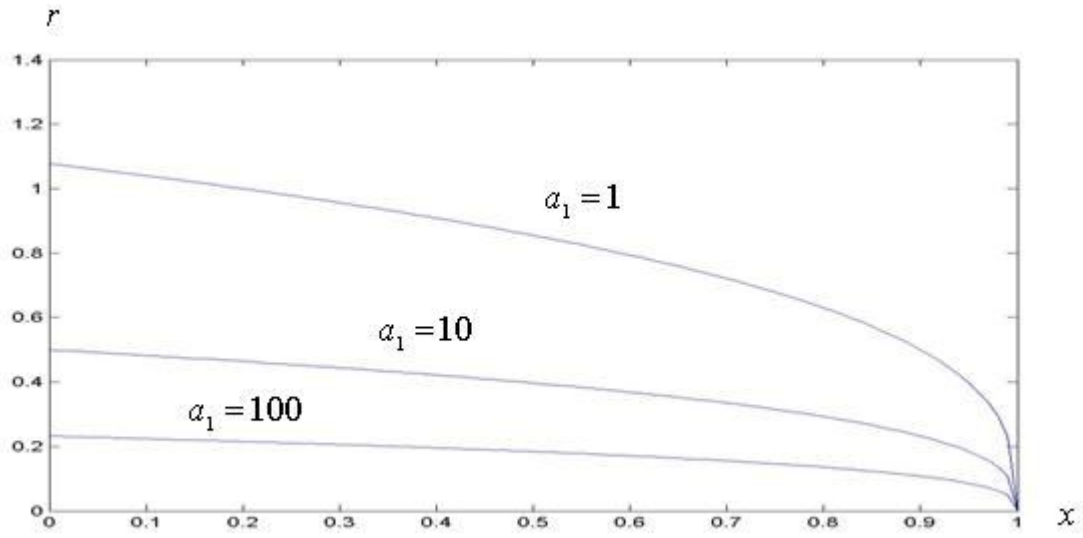


Рис. 3. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении сосредоточенной силой: $l = 1.0$; $P = 1$

1.3. Нагружение силой веса балки. Рассмотрим консольную балку равного сопротивления изгибу при нагружении ее силой веса балки.

1.3.1. *Форма балки.* Найдем закон изменения радиуса балки по ее длине, который обеспечивает равные напряжения во всех сечениях балки при учете распределенной нагрузки на балку, обусловленной ее весом (рисунок 2в).

Изгибающий момент силы тяжести P в сечении X (рисунок 1) равен

$$M_{\xi}(X) = P(X)\big(\vartheta(X) - X\big), \tag{4}$$

где $\vartheta(X)$ - расстояние центра тяжести части балки, расположенной справа от сечения X, до начала координат. Поскольку балка представляет собой тело вращения, вес P указанной части балки пропорционален объему этой части, так что

$$P(X) = g\rho\int_X^l S(x)dx = \pi g\rho\int_X^l r^2(x)dx,$$

где $S(x) = \pi r^2(x)$ - площадь поперечного сечения балки, g - ускорение свободного падения.

Аналогично, статический момент рассматриваемой части балки относительно плоскости $0_1\varsigma\xi$ равен

$$M_{\varsigma\xi}(X) = \int_X^l xS(x)dx = \pi\int_X^l xr^2(x)dx.$$

Поскольку, хорошо известно,

$$\vartheta(X) = \frac{M_{\varsigma\xi}(X)}{P(X)},$$

из выражения (4) следует, что

$$M_{\xi}(X) = \pi\int_X^l xr^2(x)dx - \pi g\rho X\int_X^l r^2(x)dx. \tag{5}$$

Таким образом, из формул (2), (5) вытекает интегральное уравнение относительно $r(X)$

$$\frac{r^3(X)}{4}a_1 = \int_X^l xr^2(x)dx - g\rho X\int_X^l r^2(x)dx. \tag{6}$$

Утверждение 1. Если точное решение задачи (6) существует, то в нормах метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной [7].

Доказательство. Пусть $r(x)$, $x \in [0,l]$ - точное решение задачи (6). Рассмотрим разрывную функцию $r_1(x) = r(x) + \delta r(x)$, в которой

$$\delta r(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_1), \\ h, & x \in [x_1, x_2), \\ 0, & x \in [x_2, l], \end{cases}$$

где $x_1, x_2 \in [0,l]$ и $x_2 - x_1 = \delta x$ - малая положительная величина. Введем обозначения

$$I_1(X) = \int_X^l x r^2(x) dx, \quad I_2(X) = \rho X \int_X^l r^2(x) dx, \quad I(X) = I_1(X) - I_2(X),$$

$$I_1^*(X) = \int_X^l x r_1^2(x) dx, \quad I_2^*(X) = \rho X \int_X^l r_1^2(x) dx, \quad I^*(X) = I_1^*(X) - I_2^*(X)$$

и рассмотрим в качестве нормы $\left\| I^*(X) - I(X) \right\|$ норму пространства $L_1[0,l]$

$$\|f\|_1 = \int_0^l |f(x)| dx.$$

Легко показать, что

$$I_1^*(X) - I_1(X) = 2\int_X^l x r(x) \delta r(x) dx + \int_X^l x \delta r^2(x) dx \approx$$

$$\approx \begin{cases} h(r^1 + 0.5)\left(x_2^2 - x_1^2\right), & X \in [0, x_1), \\ h(r^1 + 0.5)\left(x_2^2 - X^2\right), & X \in [x_1, x_2), \\ 0, & X \in [x_2, l], \end{cases} \qquad (7)$$

где $r^1 = r(x_1)$ и приближенность равенства обусловлена только заменой функции $r(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$ константой r^1. Отметим, что при приближении x_2 к x_1 это равенство стремится к точному.

Аналогично показывается, что

$$I_2^*(X) - I_2(X) = 2\rho X \int_X^l r(x) \delta r(x) dx + \rho X \int_X^l \delta r^2(x) dx \approx$$

$$\approx \begin{cases} h(2r^1+h)(x_2-x_1)X, & X\in[0,x_1), \\ h(2r^1+h)(x_2-X)X, & X\in[x_1,x_2),. \\ 0, & X\in[x_2,l]. \end{cases} \qquad (8)$$

Из выражений (7), (8) следует, что

$$\left\|I_1^*(X)-I_1(X)\right\|_1 \approx h(r^1+0.5)\left[x_2^2(x_2-x_1)+x_1(x_2^2-x_1^2)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)\right],$$

$$\left\|I_2^*(X)-I_2(X)\right\|_1 \approx h(2r^1+h)\left[0.5x_1^2(x_2-x_1)+0.5x_2(x_2^2-x_1^2)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)\right].$$

Из свойства нормы

$$\left\|I^*(X)-I(X)\right\|_1 \le \left\|I_1^*(X)-I_1(X)\right\|_1 + \left\|I_2^*(X)-I_2(X)\right\|_1$$

и последних выражений вытекает, что при любом фиксированном h величину x_2 можно подобрать столь близкой к величине x_1, что норма $\left\|I^*(X)-I(X)\right\|_1$ станет меньше любой наперед заданной.

В то же время, легко видеть, что можно подобрать такое значение величины h, что в норме пространства $C[0,l]$

$$\|f\|_2 = \max_{x\in[0,l]}|f(x)|$$

функция $r_1(X)$ будет отличаться от функции $r(X)$ на какую угодно большую величину•

Замечания. Доказательство утверждения 1, хотя и очень громоздкое, может быть выполнено также с использованием в качестве функции $\delta r(x)$ непрерывной, например, игольчатой функции. Доказательство возможно при использовании вместо нормы пространства $L_1[0,l]$ нормы пространства $L_2[0,l]$. Некорректность задачи (6) может быть доказана и без предположения о наличии ее точного решения•

Из утверждения 1 следует, что для получения корректного решения задачи (6) необходимо использовать тот или иной метод регуляризации решения [7]

1.3.2. *Численное решение уравнения* (6). Поскольку аналитическое решение уравнения (6) не удается, рассмотрим один из возможных численных методов решения этого уравнения.

Преобразуем уравнение к задаче вариационного исчисления

$$\min_{r} \Phi_1(r) = 0,\ r = r(X) \subset C^1[0,l], \tag{9}$$

где $C^1[0,l]$ - пространство неотрицательнозначных функций, непрерывных на интервале $[0,l]$ вместе со своей первой производной,

$$\Phi_1(r) = \int_0^l \left(\int_X^l x r^2(x)dx - \rho X \int_X^l r^2(x)dx - \frac{r^3(X)}{4} a_1 \right)^2 dX . \tag{10}$$

Отметим, что здесь и далее запись вида $\Phi_1(r)$ (без задания аргумента функции $r(X)$) понимается, как указание на зависимость Φ_1 от всей функции $r(X)$, как элемента функционального пространства.

Используем известный метод численного решения задачи (9), основанный на сведении ее к задаче нелинейного программирования [7].

Рассмотрим равномерную сетку с n узлами, покрывающую интервал $[0,l]$

$$\Delta_X = \left(X_1 = 0, X_2 = X_1 + \delta X, X_3 = X_2 + \delta X.,.,.,X_n = X_{n-1} + \delta X = l\right),$$

где $\delta X = \dfrac{l}{n-1}$.

Значения функции $r(X)$ в узлах сетки Δ_X обозначим $r_1, r_2, ..., r_n$ и введем в рассмотрение $(n \times 1)$-вектор $\mathbf{r} = \left(r_1, r_2, ...r_n\right)^T$. В результате задача (9) запишется в виде

$$\min_{\mathbf{r}} \Phi_1(\mathbf{r}) = 0,\ \mathbf{r} \in D_r, \tag{11}$$

где $D_r = \left\{\mathbf{r} \mid r_i \geq 0, i \in [1:n]\right\}$ - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров $\mathbf{r}$.

Задача (1) представляет собой задачу многомерной глобальной условной оптимизации, приближенное решение которой может быть найдено

многими методами [8]. Возможно, например, решение этой задачи по следующей схеме:

1) сведение задачи (11) к задаче многомерной глобальной безусловной оптимизации с помощью метода штрафных функций;
2) решение последней задачи с использованием комбинации какого-либо метода локальной безусловной оптимизации и метода мультистарта.

Штрафную функцию в этом случае можно записать в виде

$$U(\Lambda,\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \bar{r}_i^{\,2},$$

где $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$, $\lambda_i>0$ - вектор коэффициентов штрафа,

$$\bar{r}_i=\begin{cases}0, & r_i\ge 0,\\ r_i, & r_i<0.\end{cases}$$

Таким образом, задача (9) преобразуется к задаче

$$\min_{\mathbf{r}}\left(\Phi_1(\mathbf{r})+U(\Lambda,\mathbf{r})\right)=0,\ \mathbf{r}\in R^n, \qquad (12)$$

где R^n - n-мерное арифметическое пространство.

Для решения задачи глобальной безусловной оптимизации (12), а также последующих аналогичных задач, используем метод Нелдера-Мида в комбинации с методом мультистарта [9].

Некорректность задачи иллюстрирует рисунок 4, полученный по изложенной выше схеме. Рисунку соответствует невязка решения, равная всего $\sim 1.4*10^{-12}$.

1.3.3. *Использование стабилизирующих функционалов.* В соответствии с методикой решения некорректных задач [7], заменим функционал (10) функционалом вида

$$\Phi_{1,\mathrm{i}}(r)=\Phi_1(r)+\gamma\Omega_i(r),$$

где $\Omega_i(r)$ - стабилизирующий функционал, γ - положительная константа (весовой множитель).

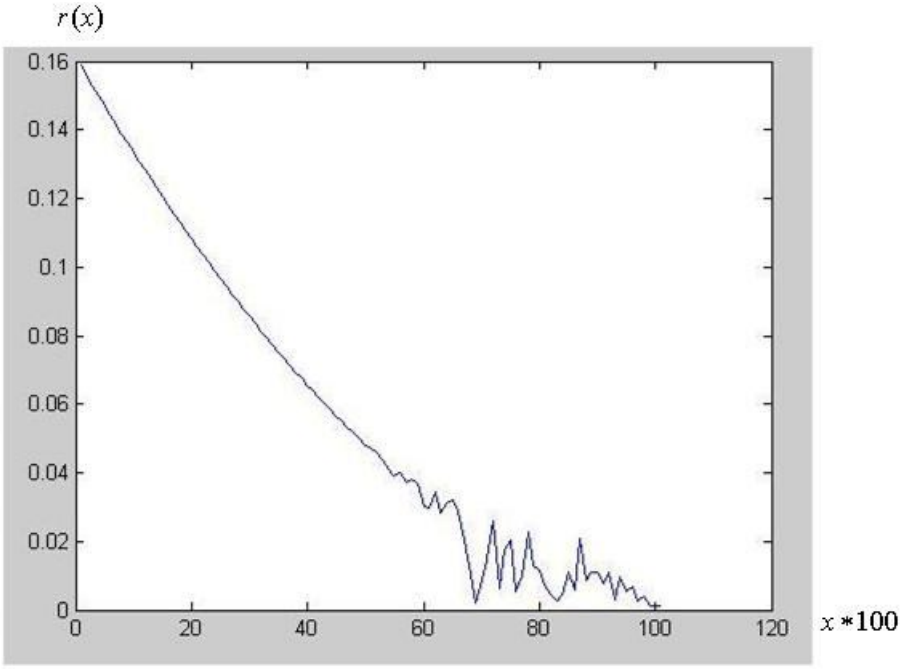


Рис. 4. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении силой веса балки: регуляризация решения не используется; $l = 1.0;\ g\rho = 1.0;\ a_1 = 10$

В простейшем случае в качестве стабилизирующего функционала $\Omega_l(r)$ можно использовать функционал

$$\Omega_1(r) = \int_0^l \left(r(x) - r^0(x)\right)^2 dx,$$

где $r^0(x)$ - начальное приближение к решению. Качественно, поведение функционала $\Phi_{1,1}(r)$, как функции параметра γ очевидно: при больших значениях этого параметра решение $r(x)$ сколь угодно близко к функции $r^0(x)$.

Логичным является построение стабилизирующих функционалов на основе требования гладкости решения задачи (6). С этой точки зрения рассмотрим функционалы вида

$$\Omega_2(r) = \int_0^l \left(r'(x)\right)^2 dx,$$

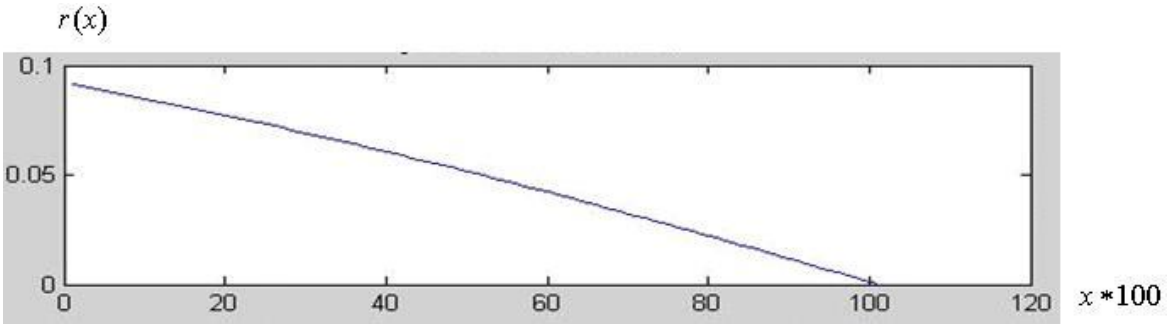
$$\Omega_3(r) = \int_0^l \left(r''(x)\right)^2 dx .$$

При численном решении задачи по схеме п. 1.3.2 приближенные значения функционалов $\Omega_2(r)$, $\Omega_3(r)$ могут быть вычислены путем замены производных соответствующими конечными разностями на сетке Δ_X:

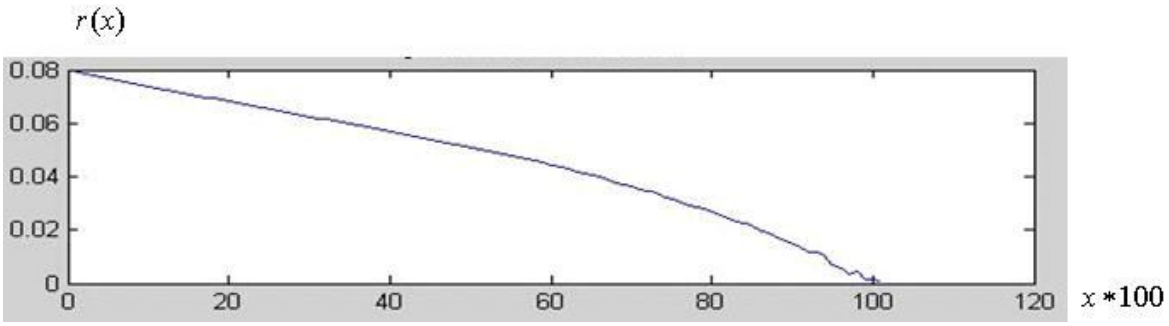
$$\Omega_2(r) \approx \frac{1}{\delta X} \sum_{i=2}^{n} \left(r_i - r_{i-1}\right)^2 ;$$

$$\Omega_3(r) \approx \frac{1}{(\delta X)^3} \sum_{i=3}^{n} \left(r_i - 2r_{i-1} + r_{i-2}\right)^2 .$$

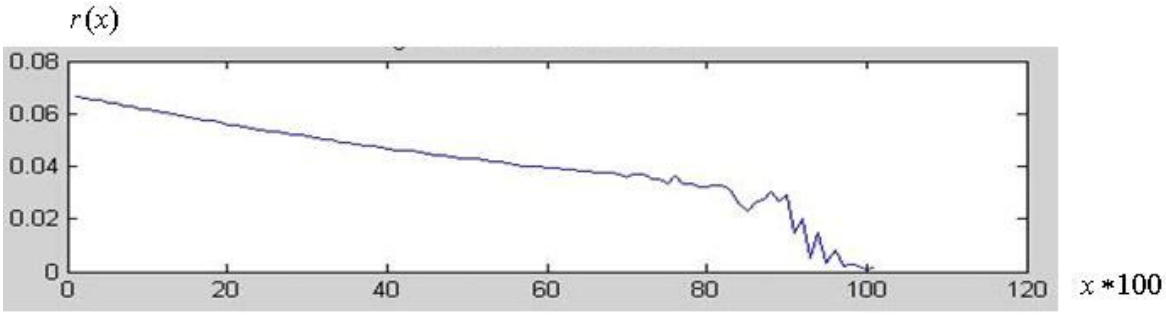
Функционал $\Omega_1(r)$. Некоторые результаты численного решения задачи (9) с использованием стабилизирующего функционала $\Omega_1(r)$ приведены на рисунке 5.



а) $\gamma = 0{,}008$, $\Phi^*_{1,1} = 3{,}35 * 10^{-7}$



б) $\gamma = 0{,}001$, $\Phi^*_{1,1} = 1{,}57 * 10^{-7}$



в) $\gamma = 8*10^{-5}$, $\Phi^*_{1,1} = 3{,}07*10^{-8}$

Рис. 5. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении силой веса балки: регуляризация решения с помощью стабилизирующего функционала $\Omega_1(r)$; $l = 1.0$; $g\rho = 1.0$; $a_1 = 10$

На рисунке 5 принято, что $r^0(x) = 0{,}1(1-x)$, $\Phi^*_{1,1}$ - достигнутое значение функционала $\Phi_{1,1}(r)$ (невязка). Рисунок показывает характер зависимости получающегося решения от весового коэффициента γ: при $\gamma = 0{,}008$ - решение является гладким и близким к функции $r^0(x)$; при уменьшении величины γ до 0,001 начинают проявляться флюктуации решения; при уменьшении γ до значения, равного $8*10^{-5}$, флюктуации становятся сильными и решение - неудовлетворительным.

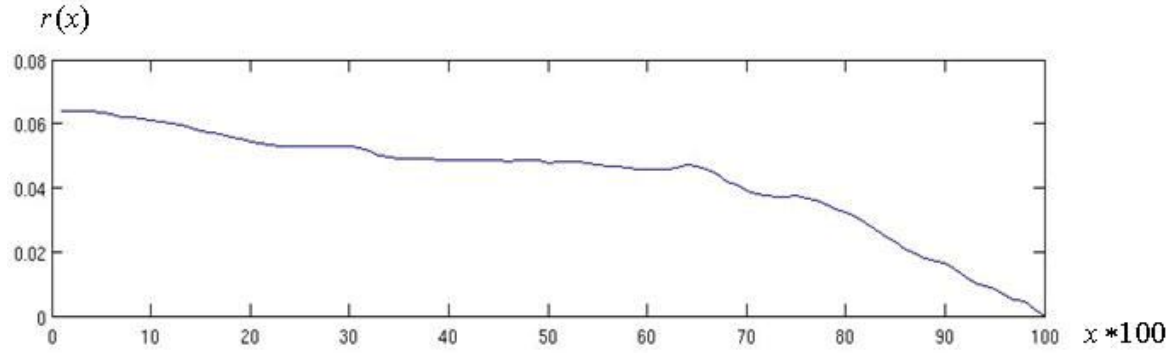
Таким образом, при использовании стабилизирующего функционала $\Omega_1(r)$ характер решения в основном определяется начальным приближением $r^0(x)$ и получить гладкие решения, заметно отличающиеся от $r^0(x)$, не удается.

Функционал $\Omega_2(r)$. Потребуем дополнительно выполнения следующего условия: радиус балки на ее конце равен нулю, т.е. $r(l) = 0$, $r_n = 0$. Для этого немного модифицируем штрафную функцию - положим

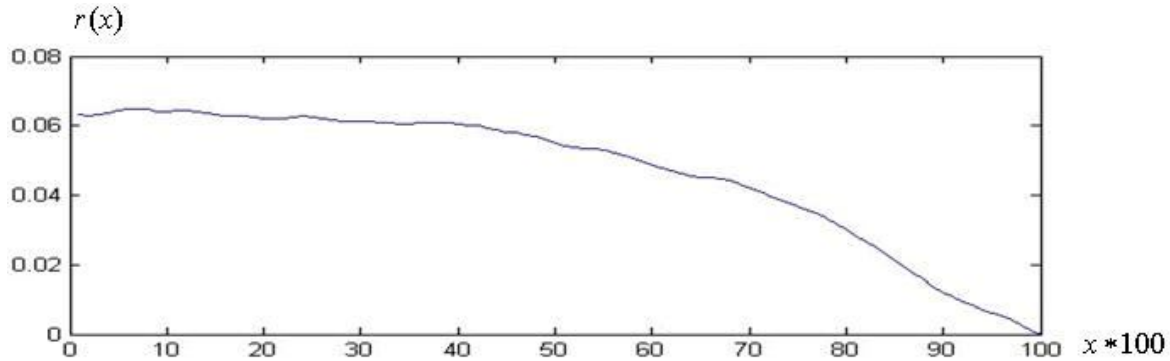
$$U(\Lambda, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \bar{r}_i^{\,2} + \lambda_n r_n^2 .$$

Некоторые результаты численного решения задачи (9) с использованием стабилизирующего функционала $\Omega_2(r)$ и модифицированной штрафной функции приведены на рисунке 6, где, аналогично предыдущему примеру, приято, что $r^0(x) = 0{,}1(1-x)$, $\Phi^*_{1,2}$ - невязка решения.

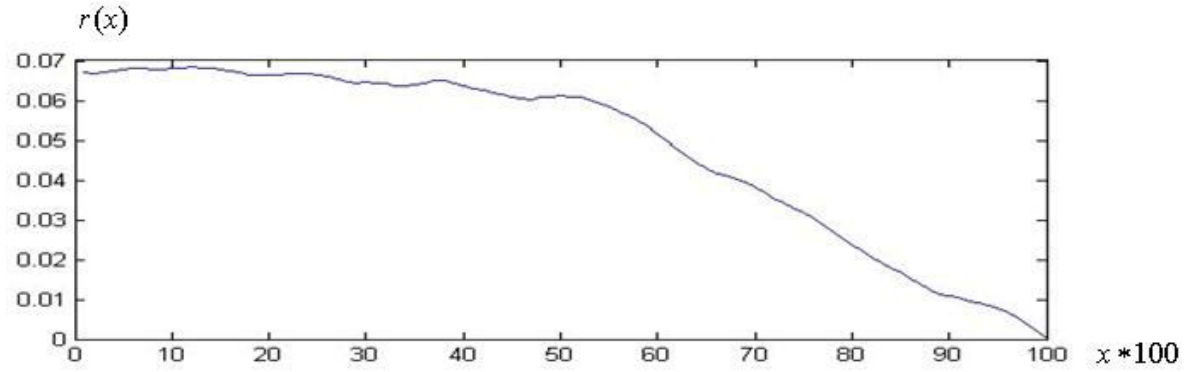
Рисунок показывает, что использование стабилизирующего функционала $\Omega_2(r)$ позволяет подобрать такие значения весового множителя γ, которые обеспечивают квазигладкое решение, значительно отличающееся от начального приближения $r^0(x)$. В то же время, с точки зрения практического применения, полученные решения являются недостаточно гладкими и могут служить лишь основой для их аппроксимации подходящими гладкими функциями.



а) $\gamma = 2 * 10^{-6}$, $\Phi^*_{1,2} = 4{,}49 * 10^{-7}$, $\Omega_2(r^*) = 0{,}001$, $U(\Lambda, r^*) = 1{,}04 * 10^{-4}$



б) $\gamma = 4 * 10^{-6}$, $\Phi^*_{1,2} = 4{,}61 * 10^{-8}$, $\Omega_2(r^*) = 0{,}008$, $U(\Lambda, r^*) = 8{,}12 * 10^{-11}$



в) $\gamma = 8 * 10^{-6}$, $\Phi^*_{1,2} = 8{,}16 * 10^{-8}$, $\Omega_2(r^*) = 0{,}009$, $U(\Lambda, r^*) = 1{,}20 * 10^{-10}$

Рис. 6. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении силой веса балки: регуляризация с помощью стабилизирующего функционалп $\Omega_2(r)$; $l = 1.0$; $g\rho = 1.0$; $a_1 = 10$

1.3.4. *Регуляризация с помощью кубической сплайн-аппроксимации.* Будем искать функцию $r(x)$ в виде кубического полинома

$$r(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 - неизвестные константы. Положим, что $r(0) = r_0$, где r_0 - заданная константа. При этом, очевидно, $c_0 = r_0$ и функция $r(x)$ приобретает вид

$$r(x) = r_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

так что свободными оказываются всего три параметра c_1, c_2, c_3, образующих трехмерный вектор $C = (c_1, c_2, c_3)$.

Таким образом, задача (9), (10) в данном случае преобразуется в трехмерную задачу глобальной безусловной оптимизации

$$\min_{C \in R^3} \Phi_1(C) = \Phi_1(C^*) = 0, \qquad (13)$$

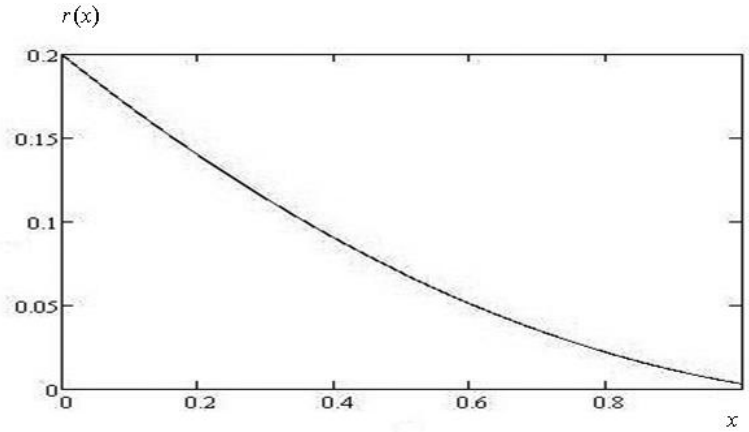
где

$$\Phi_1(C) = \int_0^l \left(\int_X^l x r^2(C,x)dx - g\rho X \int_X^l r^2(C,x)dx - \frac{r^3(C,X)}{4} a_1 \right)^2 dX. \qquad (14)$$

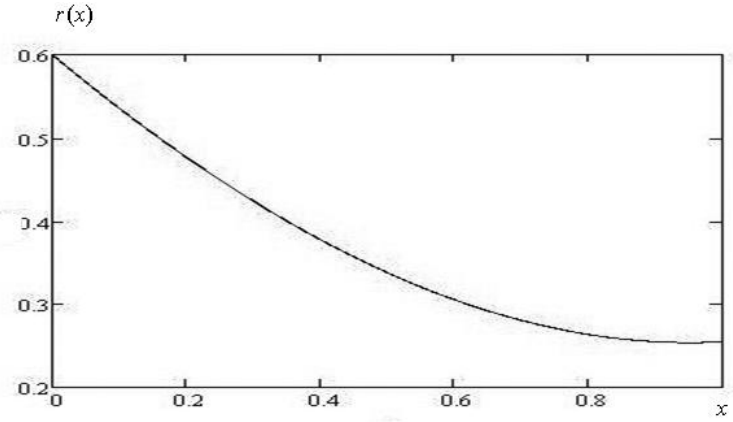
Решение задачи (13), (14) при некоторых значениях величины r_0 иллюстрирует рисунок 7, где выражения для соответствующих аппроксимирующих функций имеют вид

$$\text{а)}\, r(x) = 0{,}2 - 0{,}3263x + 0{,}1316x^2 - 0.0021x^3,$$

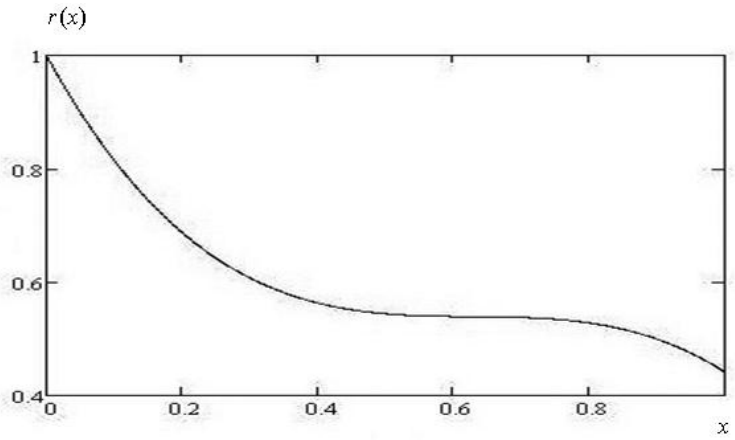
$$\text{б)}\, r(x) = 0{,}6 - 0{,}6727x + 0{,}2665x^2 + 0.0610x^3.$$



а) $r_0 = 0{,}2;\ \Phi_1^* = 7{,}2 * 10^{-4}$



б) $r_0 = 0{,}6;\ \Phi_1^* = 5{,}02 * 10^{-6}$



в) $r_0 = 1{,}0;\ \Phi_1^* = 7{,}2 * 10^{-4}$

Рис. 7. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении силой веса балки: регуляризация с помощью аппроксимации решения кубической параболы; $l = 1.0;\ g\rho = 1.0;\ a_1 = 10$

Рисунок 7 показывает, что кубические параболы обеспечивают требуемую гладкость и достаточно малую невязку решения (от $\Phi_1^* = 1{,}6 * 10^{-16}$ при $r_0 = 0{,}1$ до $\Phi_1^* = 7{,}2 * 10^{-4}$ при $r_0 = 1{,}0$).

1.4. Нагружение силой, обусловленной моментом инерции. Рассмотрим балку равного сопротивления изгибу, нагрузка на которую обусловлена ускоренным движением части балки, расположенной правее ее сечения X с угловым ускорением $\dot{\varpi}$ (рис. 8).

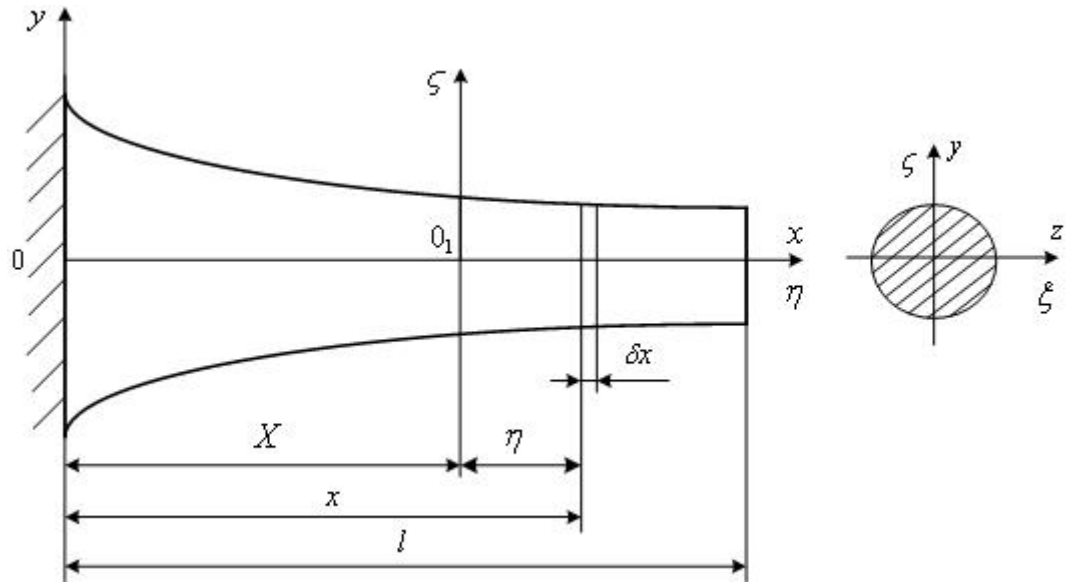


Рис. 8. К нагружению балки моментом инерции и силой лобового сопротивления

Положим, что при любом $X \in [0,l)$ указанная часть балки совершает вращательное движение, оставаясь прямолинейной, т.е. будем вести речь о малых угловых перемещениях балки.

Для того, чтобы указанная часть балки вращалась с постоянным угловым ускорением $\dot{\varpi}$ вокруг оси $0_1\xi$, в этом сечении к ней нужно приложить момент, равный

$$M_\xi(X) = J_\xi(X)\dot{\varpi},$$

где $J_\xi(X)$ - момент инерции части балки, расположенной правее сечения X относительно оси $0_1\xi$. Таким образом, условие равного сопротивления изгибу имеет в данном случае вид

$$\frac{\pi r^3(X)}{4} a_1 = J_\xi(X)\dot{\varpi}. \qquad (13)$$

Поскольку, как было принято выше, плотность материала балки постоянна и равна ρ, величина $J_\xi(X)$ определяется формулой

$$J_\xi(X) = g\rho \iiint_V \left(\eta^2 + \varsigma^2\right) dV = g\rho \int_0^{l-X} d\eta \iint_D \left(\eta^2 + \varsigma^2\right) d\varsigma d\xi, \qquad (14)$$

где V - объем рассматриваемой части балки, $D = D(\eta)$ - проекция на плоскость $0_1\varsigma\xi$ сечения балки плоскостью, ей параллельной и лежащей от указанного сечения на расстоянии η.

Так как область $D(\eta)$ представляет собой круг радиуса $r(X+\eta)$, двойной интеграл в выражении (14) легко сводится к повторному интегралу, так что имеем:

$$\iint\limits_D (\eta^2+\varsigma^2)d\varsigma d\xi = \int\limits_{-r}^{r}(\eta^2+\varsigma^2)d\varsigma \int\limits_{-\sqrt{r^2-\varsigma^2}}^{\sqrt{r^2-\varsigma^2}} d\xi = 2\int\limits_{-r}^{r}(\eta^2+\varsigma^2)(r^2-\varsigma^2)^{\frac{1}{2}}d\varsigma =$$

$$= 2\eta^2\int\limits_{-r}^{r}d\varsigma + 2\int\limits_{-r}^{r}\varsigma^2(r^2-\varsigma^2)^{\frac{1}{2}}d\varsigma = 4\eta^2 r + 4\int\limits_{0}^{r}\varsigma^2(r^2-\varsigma^2)^{\frac{1}{2}}d\varsigma = 4\eta^2 r + \frac{4}{3}r^2.$$

Таким образом, момент инерции (14) равен однократному интегралу

$$J_\xi(X) = 4g\rho\int\limits_0^{l-X}\left(\eta^2 r(X+\eta)+\frac{1}{3}r^2(X+\eta)\right)d\eta, \qquad (15)$$

так что

$$M_\xi(X) = 4g\rho\overset{\bullet}{\varpi}\int\limits_0^{l-X}\left(\eta^2 r(X+\eta)+\frac{1}{3}r^2(X+\eta)\right)d\eta. \qquad (16)$$

Из выражений (13), (16) вытекает интегральное уравнение для определения $r(X)$

$$\frac{\pi r^3(X)}{4}a_1 = 4g\rho\overset{\bullet}{\varpi}\int\limits_X^{l}\left((x-X)^2 r(x)+\frac{1}{3}r^2(x)\right)dx. \qquad (17)$$

Утверждение 2. Если точное решение задачи (17) существует, то в нормах метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной [7].

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1.

Выполним регуляризацию решения задачи (17) с помощью кубического сплайна - будем искать функцию $r(x)$ в виде

$$r(x)=\begin{cases} c_0^1+c_1^1x+c_2^1x^2+c_3^1x^3, & x\in[0;0,5],\\ c_0^2+c_1^2x+c_2^2x^2+c_3^1x^3, & x\in[0,5;1,0], \end{cases} \tag{18}$$

где $c_0^i, c_1^i, c_2^i, c_3^i$ - неизвестные константы; $i=1,2$. Как и ранее, положим, что $r(0)=r_0$ - заданная константа и потребуем в точке $x=0,5$ непрерывности функции $r(x)$ и ее первой производной. Из этих условий имеем

$$c_0^1=r_0,$$

$$r_0+0,5c_1^1+0,5^2c_2^1+0,5^3c_3^1=c_0^2+0,5c_1^2+0,5^2c_2^2+0,5^3c_3^2,$$

$$c_1^1+c_2^1+0,75c_3^1=2c_1^2+c_2^2+0,75^2c_3^2.$$

Таким образом, свободными оказываются шесть параметров и размерность вектора C равна шести.

По схеме раздела 1.3 выполнено численное решения задачи (17), использующее для регуляризации его аппроксимацию кубическим сплайном (18). Результаты решения представлены на рисунке 9, где соответствующие аппроксимирующие функции имеют следующий вид:

а) $r(x)=\begin{cases} 0,2-1,20393x+2,4137x^2-1,6121x^3, & x\in[0;0,5],\\ -0,002313+0,009976x-0,01408x^2+0,006442x^3, & x\in[0,5;1,0]; \end{cases}$

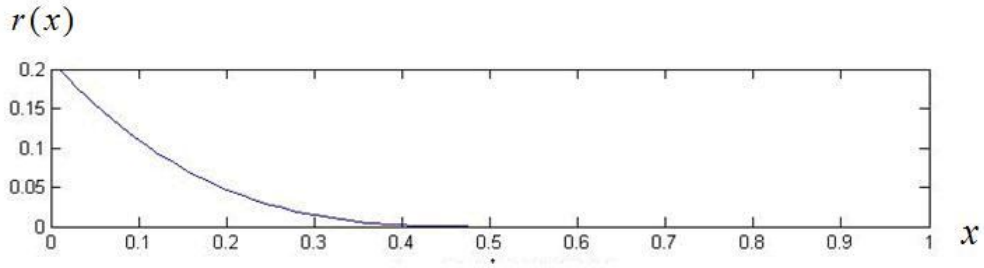
б) $r(x)=\begin{cases} 0,6-0,88107x-0,56787x^2+1,0013x^3, & x\in[0;0,5],\\ 0,75238-1,7954x+1,2607x^2-0,21772x^3, & x\in[0,5;1,0]; \end{cases}$

в) $r(x)=\begin{cases} 1,0-1,1011x-0,14446x^2+0,54106x^3, & x\in[0;0,5],\\ 1,2955-2,8743x+3,4021x^2-1,8233x^3, & x\in[0,5;1,0]. \end{cases}$

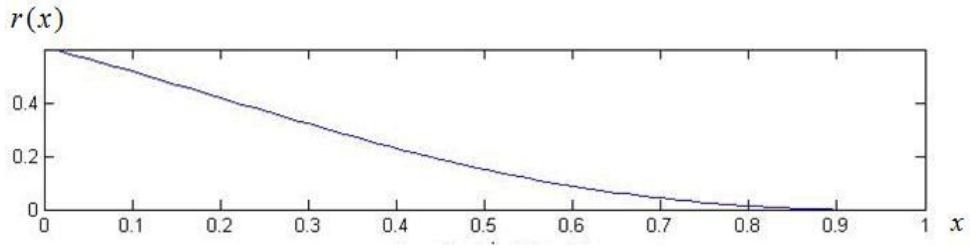
1.5. Нагружение силой лобового сопротивления. Лобовое сопротивление Q тела, обтекаемого потоком жидкости или газа, пропорционально скоростному напору, характерной площади тела S и коэффициенту сопротивления среды C_Q, зависящему от плотности среды, формы тела, числа Маха и угла атаки, т.е.

$$Q=C_Q\frac{V^2}{2}S,$$

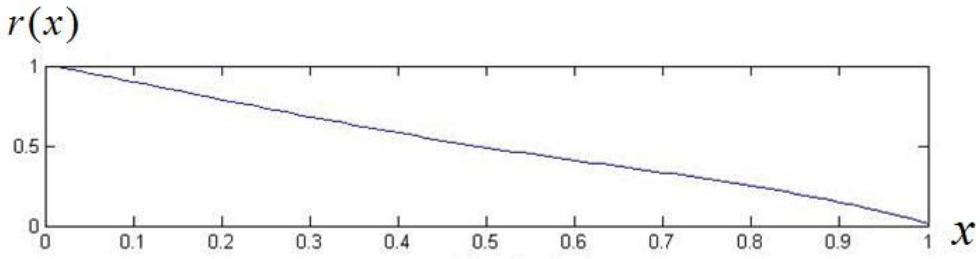
где V - скорость тела. Определение характерной площади зависит от формы тела. При небольших числах Рейнольдса, когда имеет место ламинарное течение, в качестве этой площади используют площадь наибольшего



а) $r_0 = 0{,}2;\ \Phi_1^* = 1{,}9 * 10^{-8}$



б) $r_0 = 0{,}6;\ \Phi_1^* = 1{,}5 * 10^{-6}$



в) $r_0 = 1{,}0;\ \Phi_1^* = 1{,}7 * 10^{-5}$

Рис. 9. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении моментом инерции балки: регуляризация с помощью кубического сплайна; $l = 1{,}0;\ g\rho = 1{,}0;\ a_1 = 1{,}0;\ \dot{\varpi} = 1.0$

поперечного сечения (миделя) тела [10].

Рассмотрим движение прямолинейной части балки, расположенной правее сечения X (рис. 5), с постоянной угловой скоростью ω вокруг

оси $0_1\xi$. В принятых выше соглашениях лобовое сопротивление δQ цилиндрического фрагмента балки толщиной δx равно

$$\delta Q \approx C_Q \frac{\varpi^2 (x-X)^2}{2} 2r(x)\delta x = C_Q \varpi^2 (x-X)^2 r(x)\delta x .$$

Отсюда следует, что момент $\delta M_\xi(X)$, создаваемый силой δQ в сечении X, вычисляется по формуле

$$\delta M_\xi(X) \approx C_Q \varpi^2 (x-X)^3 r(x)\delta x ,$$

а полный момент, создаваемый в сечении X лобовым сопротивлением части балки, расположенной правее этого сечения, равен

$$M_\xi(X) = C_Q \varpi^2 \int_X^l (x-X)^3 r(x)dx . \qquad (19)$$

Из выражений (13), (18) следует, что условие равного сопротивления изгибу в данном случае сводится к функциональному уравнению

$$\frac{\pi r^3(X)}{4} a_1 = C_Q \varpi^2 \int_X^l (x-X)^3 r(x)dx . \qquad (20)$$

Утверждение 3. Если точное решение задачи (20) существует, то в метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной [7].

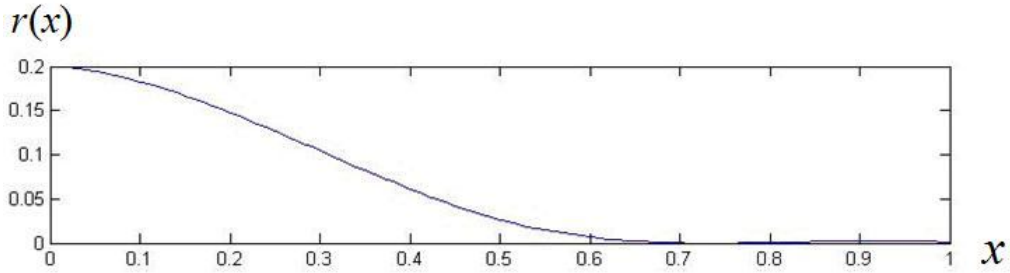
Доказательство утверждения 3 проводится по схеме доказательства утверждения 1.

Результаты численного решения задачи (20), выполненного по схеме раздела 1.3, иллюстрирует рис. 10. Как и в предыдущем случае для регуляризации решения использована его аппроксимация кубическим сплайном. Аппроксимирующие функции в данном случае определяются следующими выражениями:

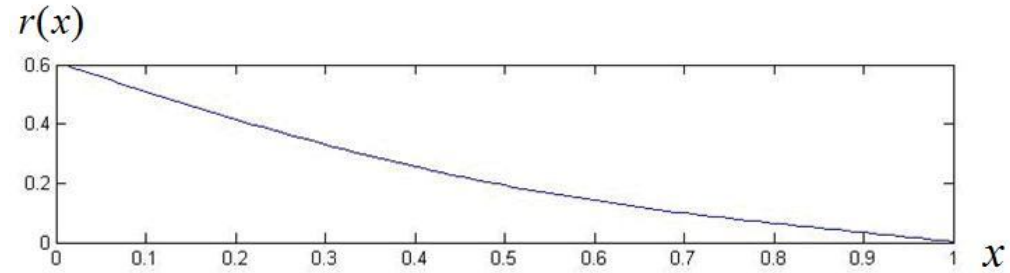
а) $$r(x) = \begin{cases} 0{,}2 - 0{,}094511x - 1{,}2187x^2 + 1{,}4052x^3, & x \in [0;0{,}5], \\ 0{,}492 - 1{,}8465x + 2{,}2853x^2 - 0{,}93079x^3, & x \in [0{,}5;1{,}0]; \end{cases}$$

б) $$r(x) = \begin{cases} 0{,}6 - 1{,}0368x + 0{,}3121x^2 + 0{,}21625x^3, & x \in [0;0{,}5], \\ 0{,}69155 - 1{,}5861x + 1{,}4106x^2 - 0{,}51611x^3, & x \in [0{,}5;1{,}0]; \end{cases}$$

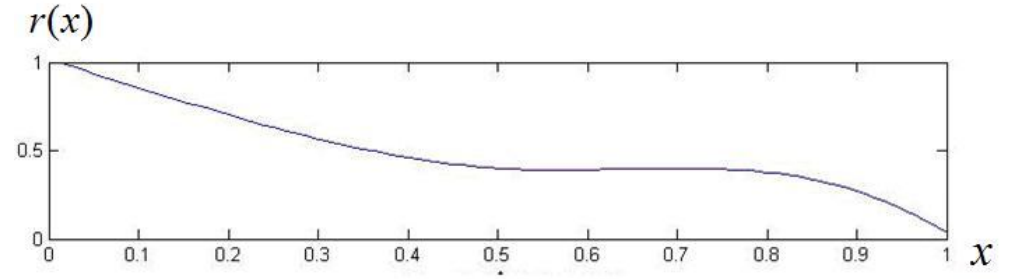
в) $r(x) = \begin{cases} 1{,}0 - 1{,}5605x - 0{,}45356x^2 + 2{,}3316x^3, & x \in [0;0{,}5], \\ 2{,}3176 - 9{,}4659x + 15{,}3574x^2 - 8{,}209x^3, & x \in [0{,}5;1{,}0]. \end{cases}$



а) $r_0 = 0{,}2;\ \Phi_1^* = 3{,}0 * 10^{-8}$



б) $r_0 = 0{,}6;\ \Phi_1^* = 4{,}7 * 10^{-10}$



в) $r_0 = 1{,}0;\ \Phi_1^* = 7{,}6 * 10^{-6}$

Рис. 10. Форма образующей консольной балки равного сопротивления изгибу при нагружении силой лобового сопротивления: регуляризация с помощью кубического сплайна; $l = 1{,}0$; $a_1 = 0{,}1$; $\omega = 1.0$; $C_Q = 1{,}0$

2. Оптимизация формы манипулятора по критерию равной удельной мощности

Для вращения часть балки, расположенную правее сечения X, вокруг оси $0_1\xi$ с угловой скоростью ϖ, необходима мощность, равная

$$W(X) = M_\xi(X)\varpi,$$

где $M_\xi(X)$ - момент внешних сил относительно этой оси (рис. 5). Таким образом, критерий равной удельной мощности имеет вид

$$\frac{M_\xi(X)\varpi}{\pi r^2(X)} = a_2 = const, \qquad (21)$$

где $\pi r^2(X) = S(X)$ - площадь X -сечения балки.

Из выражения (21), следует, что радиус балки, которая является оптимальной по критерию равной удельной мощности, равен

$$r(X) = \sqrt{\frac{M_\xi(X)\varpi}{\pi a_2}}. \qquad (22)$$

Так же, как в случае критерия равного сопротивления изгибу, профиль балки, оптимальный по критерию (21), зависит от вида нагружения балки. Аналогично разделу 1, последовательно рассмотрим нагружение внешним сосредоточенным моментом, внешней сосредоточенной силой, распределенной силой веса балки, силой, распределенной обусловленной ее моментом инерции, а также распределенной силой лобового сопротивления внешней среды.

2.1. Нагружение сосредоточенным моментом. Из выражения (22) следует, что балка, нагруженная на своем свободном конце сосредоточенным моментом $M = const$ (рис. 2а), будет балкой, оптимальной по критерию равной удельной мощности, если ее сечение постоянно и радиус равен

$$r = \sqrt{\frac{M\varpi}{\pi a_2}}.$$

2.2. Нагружение сосредоточенной силой. Если балка нагружена сосредоточенной силой (рис. 2б)), то из выражения (22) следует, что по критерию равной удельной мощности ее радиус определяется формулой

$$r(X)=\sqrt{\frac{P(l-X)\varpi}{\pi a_2}}\,. \qquad (23)$$

Зависимость (23) иллюстрирует рис. 11. Заметим, что из этого рисунка следует, что при «проектировании» хобота эволюция не «использовала» также и критерий оптимальности вида (21).

2.3. Нагружение силой веса. Определим закон изменения радиуса балки, оптимальной по критерию равной удельной мощности, при распределенной нагрузке на балку, обусловленной ее весом (рис. 2в).

В разделе 1.3 показано, что при плотности материла балки, равной $\rho=const$, изгибающий момент силы тяжести P в сечении X (рис. 5) определяется выражением (5). Из выражений (5), (22) следует, что функциональное уравнение относительно $r(X)$ имеет в данном случае вид

$$\frac{r^2(X)}{\varpi}a_2=\int_X^l xr^2(x)dx-g\rho X\int_X^l r^2(x)dx\,. \qquad (24)$$

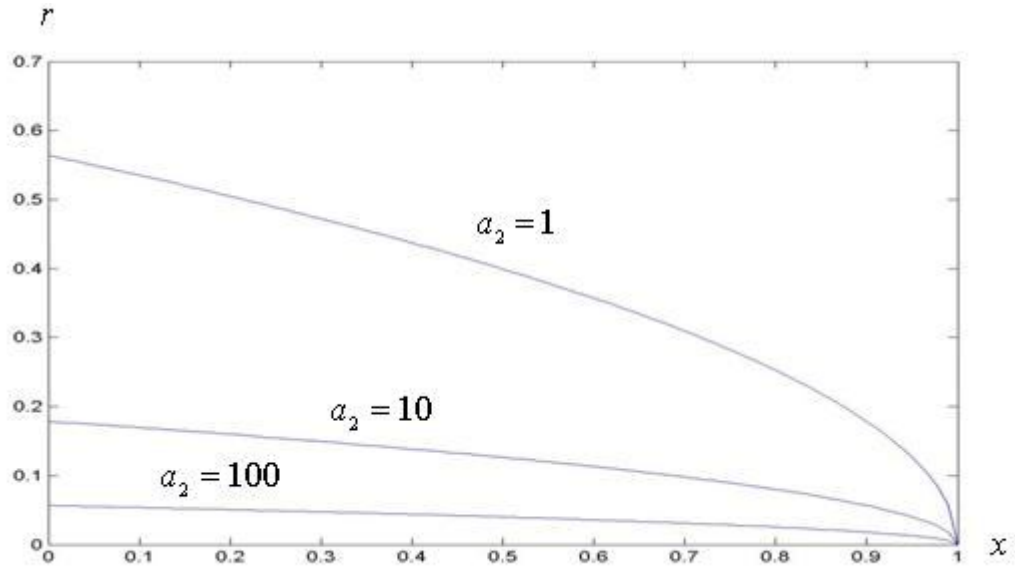
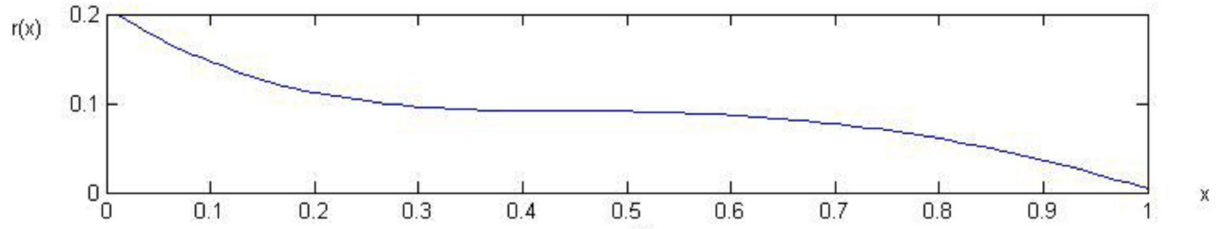


Рис. 11. Форма образующей консольной балки равной удельной мощности при нагружении сосредоточенной силой: $l=1.0$; $P=1.0$; $\varpi=1.0$

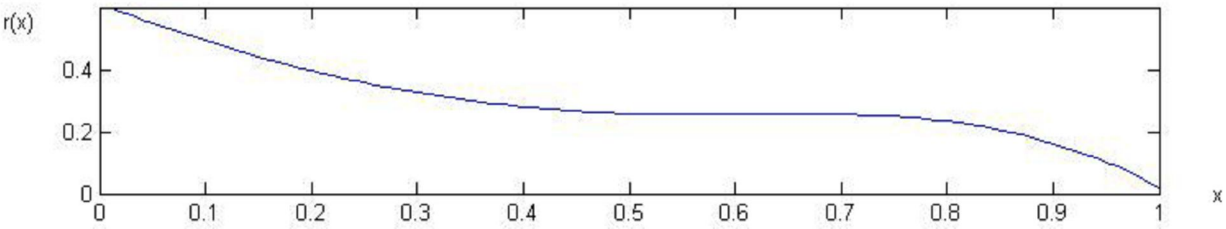
Утверждение 4. Если точное решение задачи (24) существует, то в нормах метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной.

Поскольку правая часть уравнения (24) совпадает с правой частью уравнения (6), справедливость утверждения 4 вытекает из утверждения 2.

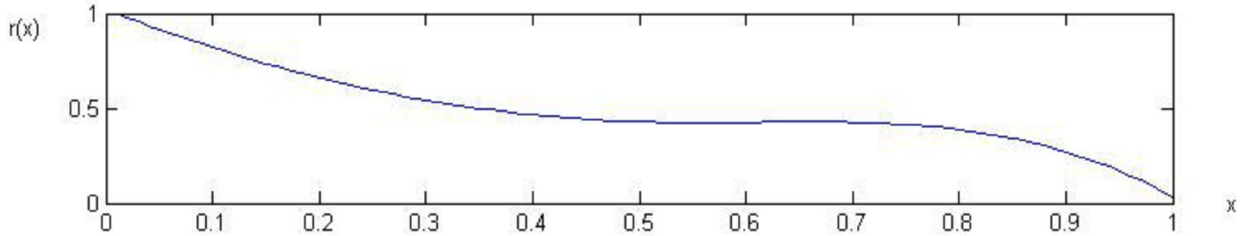
Результаты численного решения задачи (24), выполненного по схеме раздела 1.3, иллюстрирует рис. 12. Как и в п. 1.4, решение регуляризуется с помощью кубического сплайна. Отметим, что, так как левые части уравнений (24), (6) различны, решение задачи (24) существенно отличается от решения задачи (6).



а) $r_0 = 0{,}2$; $\Phi_1^* = 1{,}48 * 10^{-7}$



б) $r_0 = 0{,}6$; $\Phi_1^* = 9{,}79 * 10^{-6}$



в) $r_0 = 1$; $\Phi_1^* = 7{,}55 * 10^{-5}$

Рис. 12. Форма образующей консольной балки равной удельной мощности при нагружении силой веса; регуляризация с помощью кубического сплайна; $l = 1.0$; $\rho = 1.0$; $\varpi = 1.0$; $a_2 = 0.1$

2.4. Нагружение силой, обусловленной моментом инерции. Найдем закон изменения радиуса балки по критерию равной удельной мощности при распределенной нагрузке на балку, обусловленной ее ускоренным движением. В этом случае, очевидно, можно говорить только о средней мощности на некотором интервале времени.

Обозначим $\bar{\varpi}$ среднюю угловую скорость вращения вокруг оси $0_1\xi$ прямолинейной части балки, расположенной правее ее сечения X (рис. 5), на рассматриваемом интервале времени. В разделе 1.4 показано, что момент, возникающий в сечении X при вращении ее с угловым ускорением $\dot{\varpi}$, определяется выражением (14).

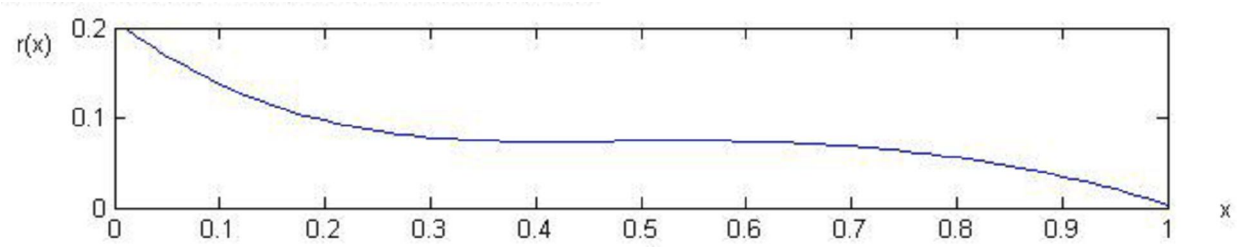
Из выражений (16), (22) вытекает функциональное уравнение относительно $r(X)$

$$\frac{\pi r^2(X)}{\bar{\varpi}} a_2 = 4g\rho\dot{\varpi}\int_X^l \left((x-X)^2 r(x) + \frac{1}{3} r^2(x) \right) dx . \qquad (25)$$

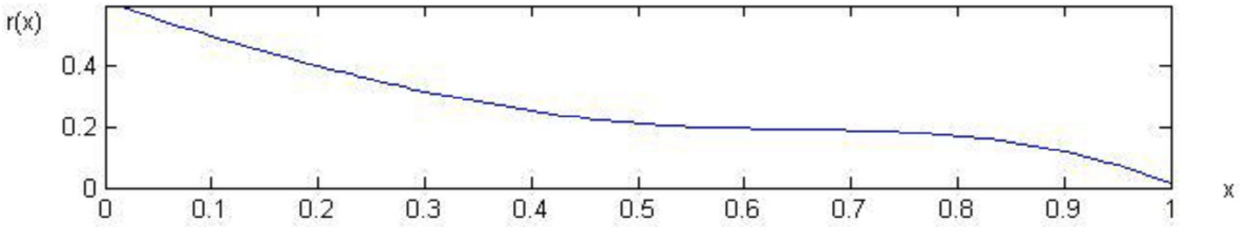
Утверждение 5. Если точное решение задачи (25) существует, то в нормах метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной.

Из-за того, что правая часть уравнения (25) совпадает с правой частью уравнения (17), справедливость утверждения 5 вытекает из утверждения 1.

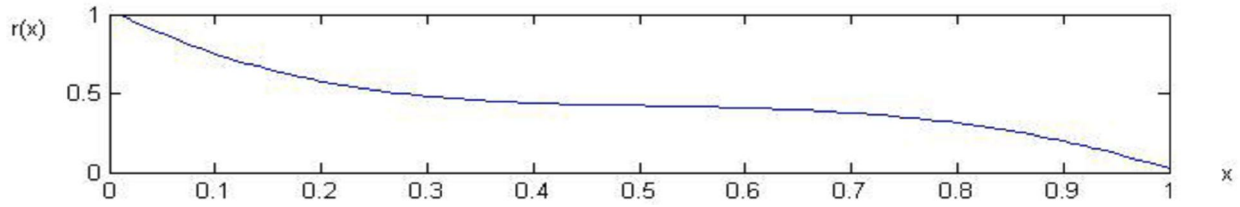
Результаты численного решения уравнения (25) по схеме, рассмотренной в разделе 1.3, иллюстрирует рис. 13.



а) $a_2 = 1{,}0$; $r_0 = 0{,}2$; $\Phi_1^* = 1{,}23 * 10^{-4}$



б) $a_2 = 0{,}3$; $r_0 = 0{,}6$; $\Phi_1^* = 1{,}6 * 10^{-4}$



в) $a_2 = 0{,}3$; $r_0 = 1{,}0$; $\Phi_1^* = 1{,}6 * 10^{-4}$

Рис. 13. Форма образующей консольной балки равной удельной мощности при нагружении силой, обусловленной моментом инерции: регуляризация с помощью кубического сплайна; $l = 1.0$; $\rho = 1.0$; $\bar{\varpi} = 1.0$; $\dot{\varpi} = 1.0$

Отметим, что решение задачи (25) существенно отличается от решения задачи (17).

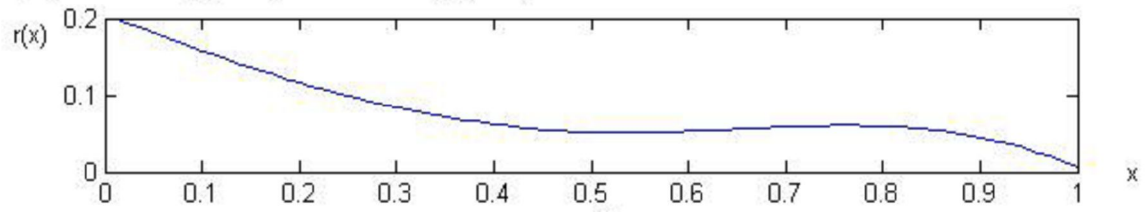
2.5. Нагружение силой лобового сопротивления. В разделе 1.5 показано, что момент, создаваемый в сечении X (рис. 5) лобовым сопротивлением части балки, расположенной правее этого сечения, определяется выражением (16). Из выражений (16), (19) вытекает искомое функциональное уравнение относительно $r(X)$:

$$\frac{\pi r^2(X)}{\varpi} a_2 = C_Q \varpi^2 \int_X^l (x - X)^3 r(x) dx \,. \qquad (26)$$

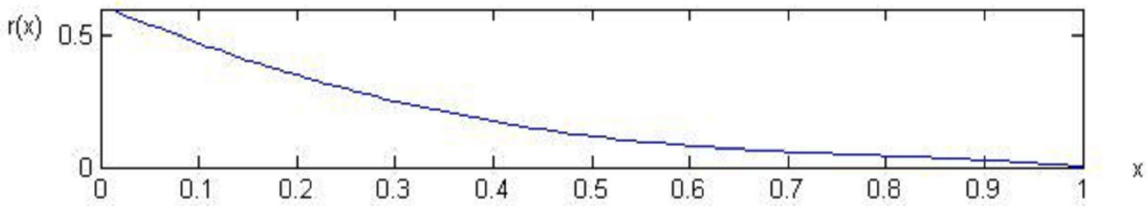
Утверждение 6. Если точное решение задачи (26) существует, то в нормах метрических пространств $L_1[0,l]$, $C[0,l]$ эта задача является некорректно поставленной.

Легко видеть, что правая часть уравнения (26) совпадает с правой частью уравнения (19). Поэтому справедливость утверждения 6 вытекает из утверждения 3.

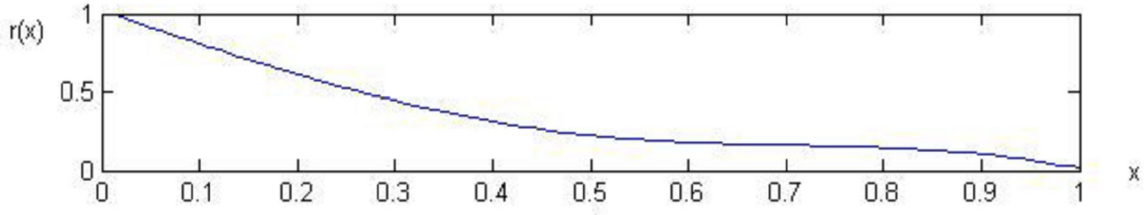
Результаты численного решения уравнения (26) по схеме, рассмотренной в разделе 1.3, иллюстрирует рис. 14. Решение регуляризуется с помощью кубического сплайна. Отметим, что решение задачи (26) существенно отличается от решения задачи (19).



а) $a_2 = 0{,}1$; $r_0 = 0{,}2$; $\Phi_1^* = 4{,}096 * 10^{-7}$



б) $a_2 = 0{,}01$; $r_0 = 0{,}6$; $\Phi_1^* = 1{,}51 * 10^{-9}$



в) $a_2 = 0{,}01$; $r_0 = 1{,}0$; $\Phi_1^* = 1{,}44 * 10^{-7}$

Рис. 14. Форма образующей консольной балки равной удельной мощности при нагружении силой лобового сопротивления: $l = 1.0$; $\varpi = 1.0$

3. Оптимизация формы манипулятора по критерию равной удельной энергии

Для вращения часть балки, расположенную правее сечения X (рис. 5), вокруг оси $0_1\xi$ с угловой скоростью ϖ, необходима затратить энергию, равную

$$E(X) = \frac{J_\xi(X)\varpi^2}{2},$$

где $J_\xi(X)$ - момент инерции указанной части балки относительно этой оси. Таким образом, критерий равной удельной энергии имеет вид

$$\frac{J_\xi(X)\varpi^2}{2\pi r^2(X)} = a_3 = const. \qquad (27)$$

Из выражения (27), следует, что радиус балки, которая является оптимальной по критерию равной удельной энергии, определяется функциональным уравнением

$$\frac{2\pi r^2(X)}{\varpi^2} a_3 = J_\xi(X). \qquad (28)$$

Очевидно, что значения критерия (27) не зависят от вида нагружения и определяются распределение массы балки (ее моментом инерции) и угловой скоростью движения балки.

Найдем закон изменения радиуса балки по ее длине, который является оптимальным по критерию равенства удельной энергии. В разделе 1.4 показано, что момент инерции части балки, расположенной правее сечения X, относительно оси $0_1\xi$ определяется выражением (13). Из выражений (13), (28) вытекает следующее функциональное уравнение:

$$\frac{2\pi r^2(X)}{\varpi^2} a_3 = 4g\rho \int_X^l \left((x - X)^2 r(x) + \frac{1}{3} r^2(x) \right) dx. \qquad (29)$$

Отметим, что уравнение (29) с точностью до мультипликативной константы совпадает с уравнением (25). Поэтому для этого уравнения справедливы все выводы, сделанные в разделе 2.4.

4. Оптимизация размера секций манипулятора

Покроем интервал $[0,l]$ сеткой с узлами $x_0 = 0$, $x_1,\ldots,$ $x_N = l$, где $(N+1)$ - число узлов сетки. Разобьем консольную балку сечениями, проходящими через узлы указанной сетки и перпендикулярными оси $0x$, на N секций. Обозначим l_i длину i-ой секции, левая граница которой проходит через узел x_{i-1}, а правая - через узел x_i (рис. 15).

Легко видеть, что для x-координаты начала i-ой секции имеет место равенство

$$x_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} l_j \ , \ i \in [1:N]. \qquad (27)$$

Положим, что упругие свойства материала каждой из секций одинаковы и что податливость (величина, обратная жёсткости) пропорциональна длине этой секции и обратно пропорциональна площади ее левого поперечного сечения [4]. Потребуем, чтобы так определенная податливость всех секций была одинакова, т.е. потребуем выполнения равенств

$$\frac{l_1}{\pi r^2(x_0)} = \frac{l_2}{\pi r^2(x_1)} = \ldots = \frac{l_N}{\pi r^2(x_{N-1})} = \bar{b}, \qquad \sum_{i=1}^{N} l_i = l$$

или, что то же самое, равенств

$$\frac{l_1}{r^2(x_0)} = \frac{l_2}{r^2(x_1)} = \ldots = \frac{l_N}{r^2(x_{N-1})} = b, \quad \sum_{i=1}^{N} l_i = l, \qquad (28)$$

где $b = \pi \bar{b}$, а координаты узлов $x_i = x_i(l_1, l_2, \ldots, l_{i-1})$, $i \in [1:N]$, $l_0 = 0$ определяются выражением (27).

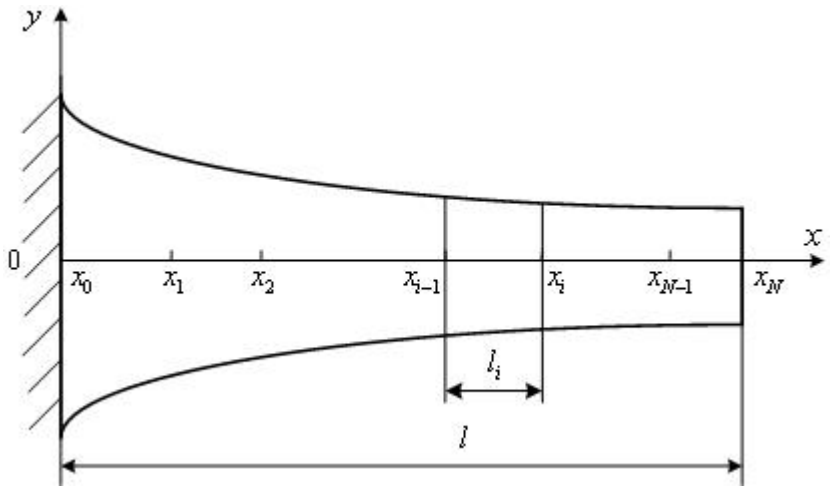


Рис. 15. К определению оптимальных размеров секций

Система равенств (28) представляет собой систему N нелинейных уравнений относительно неизвестных l_i, $i \in [1:N]$. Аналитическое решение этой задачи не удается. Можно предложить несколько подходов к решению системы уравнений (28). Рассмотрим подходы, основанные на сведении этой задачи к задаче однопараметрической и многопараметрической оптимизации.

4.1. Сведение к задаче однопараметрической оптимизации. Сформируем критерий оптимальности

$$F_1(b) = \left(l - \sum_{i=1}^{N} l_i(b) \right)^2 .$$

и поставим задачу одномерной глобальной условной оптимизации

$$\min_{b>0} F_1(b) = 0 . \qquad (30)$$

Заметим, что при каждом фиксированном значении параметра b значение функции $l_i(b)$, $i \in [1:N]$ определяется из решения уравнения

$$l_i(b) = br^2(l_1(b), l_2(b), ..., l_{i-1}(b)) . \qquad (31)$$

Поэтому однократное вычисление значения критерия оптимальности $F_1(b)$ требует решения N уравнений (31).

Задача (30) может быть решена известными методами решения задач одномерной глобальной условной оптимизации [8].

4.2. Сведение к задаче многопараметрической оптимизации. Введем критерий оптимальности

$$F_2(L)=\sum_{i=2}^{N}\left(\frac{l_i}{r^2(l_1,l_2,...,l_{i-1})}-\frac{l_{i-1}}{r^2(l_1,l_2,...,l_{i-2})}\right)^2,$$

где L - $(N\times 1)$-вектор с компонентами $l_1,l_2,...,l_N$. Поставим задачу многомерной глобальной условной оптимизации

$$\min_{L} F_2(L)=0,\ L\in D_L, \tag{32}$$

где

$$D_L=\left\{L\,|\,l_i>0, i\in[1:N];\sum_{i=1}^{N}l_i=l\right\}.$$

Отметим, что однократное вычисление критерия оптимальности $F_2(L)$ не требует, в отличие от задачи (30), решения вложенной системы уравнений.

Задача (32) может быть решена по схеме, рассмотренной в п. 1.3. Функция штрафа при этом имеет вид

$$U(\Lambda,\mu,L)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\bar{l}_i^{-2}+\mu\left(\sum_{i=1}^{N}l_i-l\right)^2,$$

где $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N)$ - вектор неотрицательных коэффициентов штрафа, отвечающих за выполнение условий $l_i>0$, $i\in[1:N]$; μ - также неотрицательный коэффициент штрафа, призванный обеспечить выполнение условия $\sum_{i=1}^{N}l_i=l$;

$$\bar{l}_i=\begin{cases}0, & l_i>0,\\ l_i, & l_i<0.\end{cases}$$

Оптимальные размеры секций семисекционного манипулятора ($N=7$), представленного в виде балки равного сопротивления изгибу (п. 1), иллюстрируют рисунки 16 – 19.

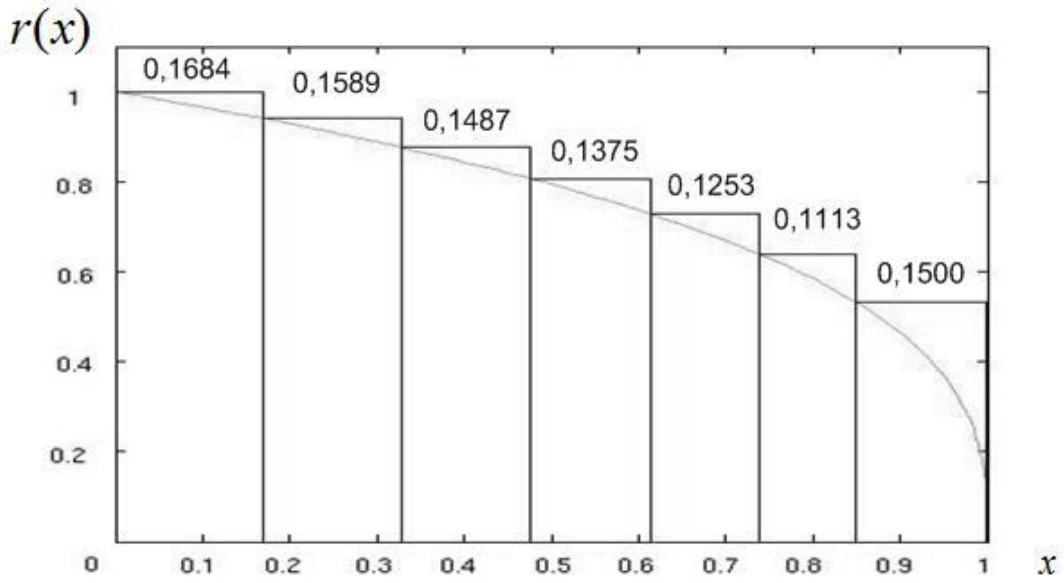


Рис. 16. Оптимальные размеры секций манипулятора: статическая постановка задачи; нагружение сосредоточенной силой;

$$P = 1;\ \Phi_2^* = 2{,}78 * 10^{-13}$$

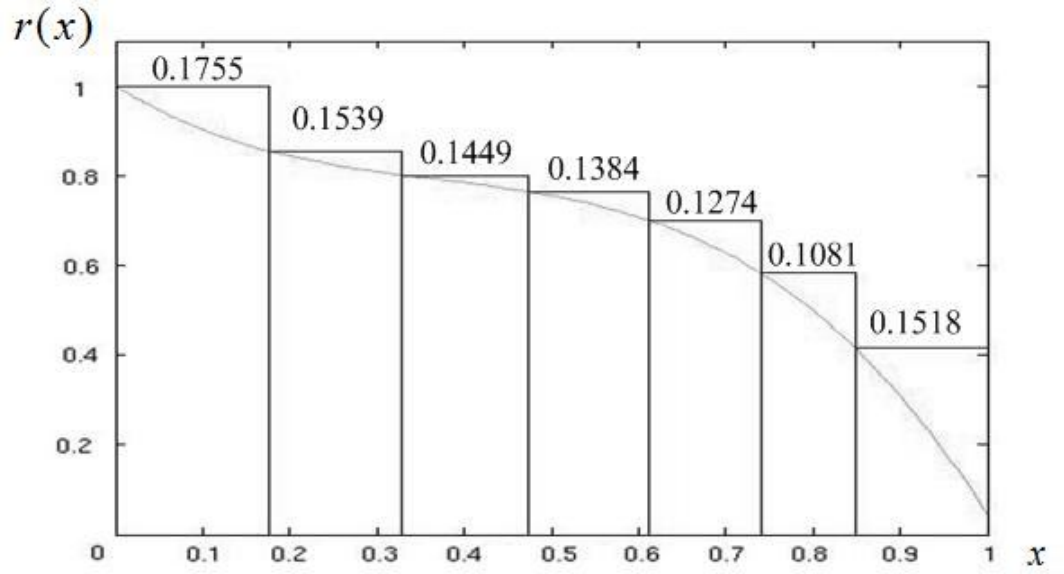


Рис. 17. Оптимальные размеры секций манипулятора: статическая постановка задачи; нагружение весом балки; $\rho = 1;\ \Phi_2^* = 4{,}61 * 10^{-13}$

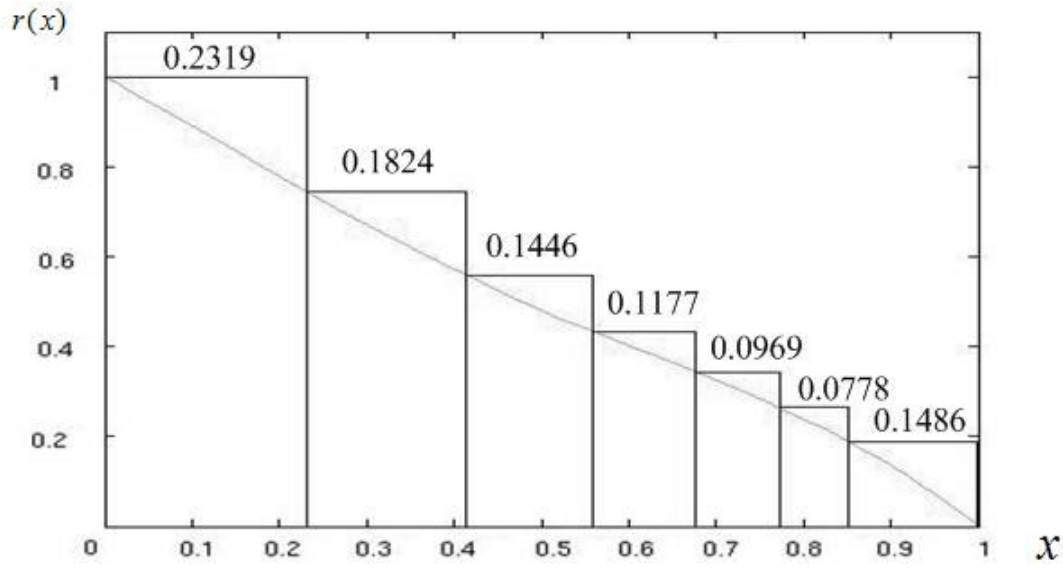


Рис. 18. Оптимальные размеры секций манипулятора: статическая постановка задачи; нагружение моментом инерции балки;

$$\rho = 1;\ \dot{\varpi} = 1;\ \Phi_2^* = 3{,}36 * 10^{-13}$$

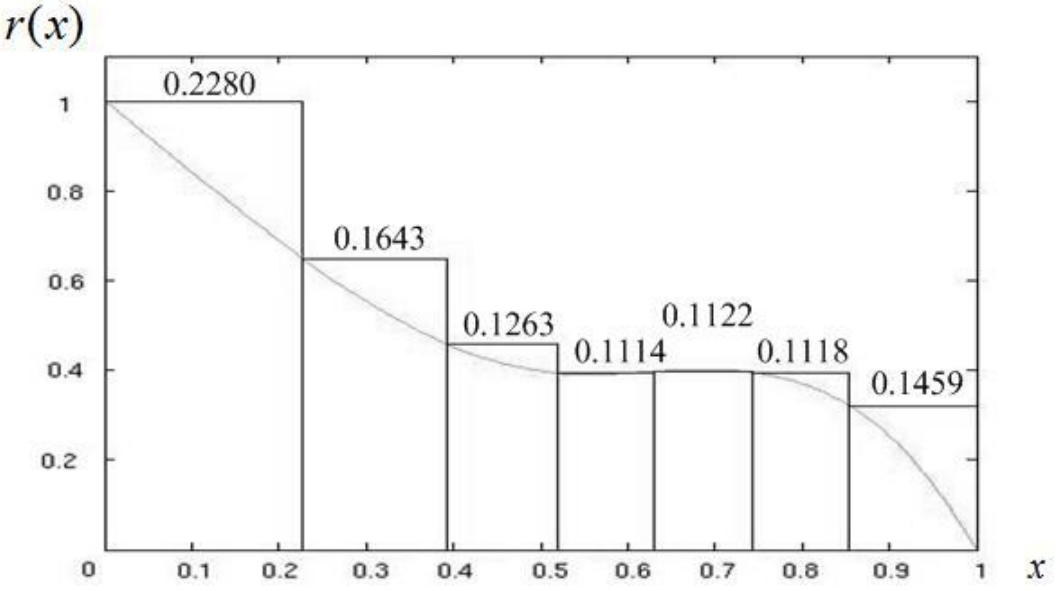


Рис. 19. Оптимальные размеры секций манипулятора: статическая постановка задачи; нагружение силой лобового совротивления;

$$C_A = 1;\ \varpi = 1;\ \Phi_2^* = 3{,}76 * 10^{-13}$$

Заключение

В работе поставлена задача определения оптимальной геометрии манипулятора типа «хобот», исходя из его представления в виде консольной балки сплошного круглого сечения. Под геометрией манипулятора

понимается 1) форма его продольного сечения, задающаяся законом изменения диаметра манипулятора по длине, 2) закон изменения длин секций манипулятора.

Задача определения оптимальной формы продольного сечения манипулятора поставлена с использованием критерия равного сопротивления манипулятора изгибу, критерия равной удельной мощности, а также критерия равной удельной энергии. Для каждого из этих критериев и различных видов нагружения получены уравнения, определяющие оптимальную форму манипулятора. Уравнения представляют собой, преимущественно, функциональные уравнения относительно радиуса манипулятора, как функции его длины.

Рассмотрен один из возможных численных методов приближенного решения указанных уравнений, основанный на сведении каждого из них к задаче многомерной глобальной условной оптимизации.

Задача определения оптимального размера секций манипулятора поставлена на основе критерия равной жесткости этих секций. Предложено два численных метода решения этой задачи, основанных на сведении ее к задаче одномерной и многомерной глобальной условной оптимизации.

Результаты работы позволяют поставить множество задач определения оптимальной формы манипулятора по векторному критерию оптимальности, построенному на основе частных критериев, полученных в пп. 1–3 [10].

Возможны различные подходы к формированию такого критерия оптимальности. Во-первых, векторный критерий можно сформировать на основе критериев, полученных для одного вида нагружения. К примеру, в качестве частных критериев можно использовать критерий равного сопротивления изгибу и критерий равной удельной мощности при нагружении силой веса манипулятора.

Во-вторых, в качестве частных критериев могут быть использованы критерии, полученные в рамках одного критерия оптимальности, но при разных видах нагружения. Например, векторный критерий оптимальности

можно построить с использованием критерия равного сопротивления изгибу при нагружении статической сосредоточенной силой и того же критерия при нагружении динамической силой, обусловленной сопротивлением внешней среды.

В-третьих, может использоваться комбинированный подход, когда используются разные критерии оптимальности при разных видах нагружения.

Авторы благодарят Каганова Ю.Т. за конструктивные обсуждения ее результатов.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)», проект 2.1.2/1509.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры.- М.: Наука, 1991.- 94 с.
2. Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Математическое моделирование кинематики и динамики робота-манипулятора типа «хобот». 1. Математические модели секции манипулятора, как механизма параллельной кинематики типа «трипод» // Наука и образование: электронное научно- техническое издание, 2009, 10, (http://technomag.edu.ru/doc/133262.html).
3. Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Математическое моделирование кинематики и динамики робота-манипулятора типа «хобот». 2. Математические модели секции манипулятора, как механизма параллельной кинематики типа «гексапод» // Наука и образование: электронное научно- техническое издание, 2009, 11, (http://technomag.edu.ru/doc/133731.html).
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов Учебник для вузов.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.- 591 с.

5. Merlet J.P. Parallel Robots. Solid mechanics and its applications. Merlet-Kluwer Academic Publishers, 2000.- 394 p.
6. Волкоморов С.В., Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Моделирование и оптимизация некоторых параллельных механизмов // Информационные технологии, Приложение, 2010, №5, с. 1-32.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1979.– 285 с.
8. Табак Д., Куо Б. ` Оптимальное управление и математическое программирование.- М.: Наука, 1975.- 280 с.
9. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.- 584 с.
10. Афанасьев П.П. Летательные аппараты. Учебное пособие.- Москва: Изд-во МАИ, 2002.- 228 с.
11. Штойер, Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения.– М.: Радио и связь, 1992.- 504 с.