Метод диалогового упорядочения альтернатив

В практике специалистов различного профиля часто встречаются задачи, которые можно представить как проблему построения рационального порядка на исходном множестве альтернатив. Особенно часто с такими постановками приходится сталкиваться инженеру. Приведем лишь несколько важных примеров из области технологической подготовки машиностроительного производства. Первый пример относится к разработке технологического процесса обработки детали. Здесь исходным множеством альтернатив служит неупорядоченное множество технологических операций, которые необходимо реализовать для получения геометрического облика детали и заданной конструктором совокупности точностных и прочностных характеристик. Если рассматривать эту задачу абстрактно, в отрыве от производственных реалий, то исходными данными в ней служат все возможные перестановки технологических операций, каждая из которых представляет собой описание гипотетического маршрута. Из этого множества требуется выбрать лучшую альтернативу, которая удовлетворяет требованием технологической корректности и производственной оптимальности.

Беглый анализ приведенной модели свидетельствует, что не все перестановки операций будут технологически корректными. Между некоторыми операциями существуют бинарные предпочтения, индуцированные отношениями базирования поверхностей, размерными связями детали, упорядоченностью технологических переделов и пр. Допустим, что из перестановок операций исключены все дефектные образцы, и в результате этой редукции исходное множество сокращено до подмножества технологически корректных альтернатив, из которого требуется выбрать одну для реализации ее в выбранной технологической системе.

Сходные ситуации принятия решений существуют и в других областях человеческой практики. Приведем еще один модельный пример, взятый из технологической подготовки сборочного производства. Систему ограничений, которую накладывают на порядок установки деталей свойства конструкции и технологичес кой системы, можно представить в виде частично-упорядоченного множества [2]. В общем случае, этот частичный порядок на совокупности деталей будет недоопределенным, поскольку в этом множестве наличествуют пары несравнимых элементов, для которых недостаточно конструкторско-технологических оснований для генерации предпочтений. Любая последовательность сборки изделия, согласующаяся с заданной системой ограничений, представляет собой линейный порядок на множестве деталей изделия. Одному частичному порядку можно поставить в соответствие несколько его линейных продолжений. Из этого множества линейных порядков ЛПР должен выбрать одну рациональную альтернативу для постановки на производство. В этой задаче комбинаторное разнообразие линейных продолжений настолько велико, что оно заведомо превосходит возможности рационального выбора без использования специальных моделей принятия реше ний и инструментальных средств.

Итак исходная постановка задачи имеет очень простую формулировку. Дано множество перестановок (линейных порядков), описывающих допустимые альтернативы решения некоторой задачи. Требуется выбрать из этого множества перестановку, которая отвечает системе предпочтений ЛПР о рациональной последовательности (рис. 1).

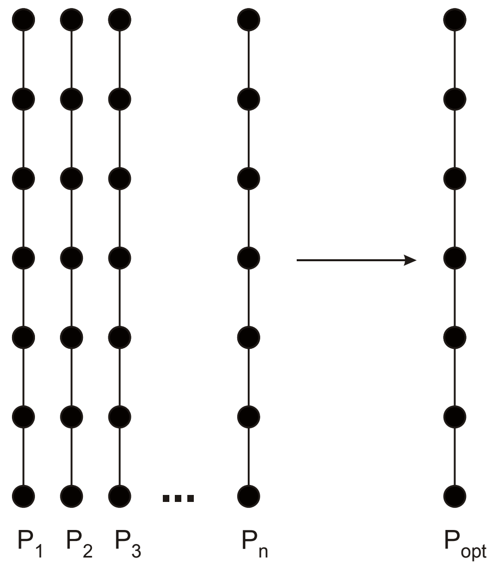

Рис. 1. Постановка задачи

В работе предлагается новый подход к решению задач такого типа. Отбраковка неконкурентноспособных альтернатив происходит в результате регуляризованной многошаговой процедуры в диалоге с ЛПР (рис. 2). Представление множества линейных порядков в виде совокупности частичных порядков позволяет представить все наличные ограничения в наглядном и компактном виде. После анализа проектной ситуации ЛПР накладывает на эти частичные порядки дополнительные ограничения, задавая порядок следования несравнимых элементов.

В результате получается новый «более организованный» частичный порядок, на основе которого строится усеченное множество линейных продолжений. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено один или ограниченное множество линейных порядков, доступных для непосредственного анализа и выбора.

Рис. 2. Блок-схема процедуры диалогового упорядочения

Обозначим через $\Lambda(X)$ – множество всех отношений порядка на множестве X. Множество $\Lambda(X)$ само является упорядоченным, в качестве отношения порядка на нем выступает теоретико-множественное включение. Максимальными элементами в $\Lambda(X)$ служат линейные порядки на X и только они. В $\Lambda(X)$ существует наименьший элемент – дискретный порядок на X. Для экономии изобразительных средств элементы $\Lambda(X)$ будем обозначать через $\lambda\ (\lambda = (X,\leq))$.

В $\Lambda(X)$ можно определить операцию решеточного пересечения: $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1 \cap \lambda_2$, что превращает Λ в нижнюю полурешетку. Пополним Λ наибольшим элементом 1. В показано [4], что частично упорядоченное множество $\Lambda(X) \cup \{1\} = \Lambda'(X)$ представляет собой решетку. В тех случаях, когда индивидуальная природа элементов множества X не имеет значения, для обозначения решетки $\Lambda'(X)$ будем использовать сокращенную запись Λ_n' подразумевая, что каждый элемент исходного множества X задан номером $i=\overline{1,n}$, а n – общее количество элементов.

Пусть S_n – множество всех перестановок степени n, $B(S_n)$ – его булеан. Рассмотрим отображения $\sigma : \Lambda_n' \to B(S_n)$ и $\tau : B(S_n) \to \Lambda_n'$. Отображение σ каждому y-множеству из Λ_n' ставит в соответствие совокупность всех его линейных доупорядочений, представленных в виде перестановок. Известно [4] перестановки и линейные графы являются различными представлениями одной сущности – линейно упорядоченного множества, поэтому образ σ определен корректно. Образом внешней единицы (она не является y-множеством) решетки Λ_n' служит наименьший элемент булеана $B(S_n)$ – пустое множество.

Отображение τ каждому множеству перестановок P сопоставляет некоторый частичный порядок $\tau(P) \in \Lambda_n'$. Это частично упорядоченное множество $\tau(P)$ представляет собой пересечение линейных порядков, представлениями которых являются перестановки из P.

Например, пусть $P = \{1234, 1324, 1234\}$. Элементы из P представляют следующие линейные порядки $a_1 = \{1<2<4<3\}$, $a_2 = \{1<3<2<4\}$, $a_3 =$

$\{1<2<3<4\}$. Найдем $\tau(P) = a_1 \cap a_2 \cap a_3$, $\tau(P) = \{(1<2), (1<4), (2<4), (1<3)\}$.

Пара отображений (σ, τ) обладает следующими свойствами:

1. для любых $A, B \in \Lambda_n'$ таких, что $A \leq B$ выполняется $\sigma(A) \geq \sigma(B)$;
2. для любых $P, R \in B(S_n)$ таких, что $P \leq R$ выполняется $\tau(P) \geq \tau(R)$;
3. $\tau(\sigma(A)) \geq A$ для всех $A \in \Lambda_n'$ и
4. $\tau(\sigma(P)) \geq P$ для всех $P \in B(S_n)$.

Действительно, все пары сравнимых элементов, принадлежащие A, содержатся в B, а следовательно, и в любом линейном доупорядочении y-множества B. Поэтому любое линейное продолжение порядка B является также линейным доупорядочением A, отсюда следует, что $\sigma(A) \geq \sigma(B)$. Это доказывает свойство 1.

Справедливость свойства 2 очевидна и не требует подробных обоснований. Поэтому перейдем к третьему свойству. Любая пара сравнимых элементов, принадлежащая y-множеству A, принадлежит каждому линейному доупорядочению A, следовательно, их пересечению. Поэтому $\tau(\sigma(A)) \geq A$. Справедливость неравенства $\tau(\sigma(P)) \geq P$ (свойство 4) следует из алгоритма построения всех линейных доупорядочений произвольного y-множества (в частности $\tau(P)$) приведенного в [1].

Пара отображений (σ, τ), для которой выполняются свойства 1 – 4, называется соответствием Галуа. Так как область значений и область определения отображений σ и τ являются решетками, то композиции отображений $\tau\sigma$ и $\sigma\tau$ являются операторами замыканий на Λ_n' и $B(S_n)$ соответственно [1].

Частное по замыканию $\Lambda_n' / \tau\sigma$, то есть множество всех $\tau\sigma$-замкнутых элементов Λ_n' представляет собой решетку. Частное по замыканию $\Lambda_n' / \tau\sigma$ также является решеткой. Кроме того, выполняются соотношения: $\Lambda_n' / \tau\sigma = \tau(B(S_n))$, $B(S_n) / \sigma\tau = \sigma(\Lambda_n')$. Множества $\Lambda_n' / \tau\sigma$ и $B(S_n) / \sigma\tau$ антиизоморфные, а отображения σ и τ действующие на них, взаимно обратные.

Любое частично упорядоченное множество есть пересечение некоторой совокупности линейных порядков, например множества всех линейных доупорядочений этого y-множества. Поэтому $\Lambda_n' = \Lambda_n' / \tau\sigma$ каждый элемент Λ_n' является $\tau\sigma$-замкнутым. Частное $B(S_n) \;/\; \sigma\tau$ имеет более сложную структуру. Замкнутыми элементами в нем являются такие множества перестановок, которые представляют все линейные доупорядочения некоторого y-множества. Пересечение любых двух замкнутых элементов принадлежит частному $B(S_n) \;/\; \sigma\tau$. Так как $\sigma(1) = 0$, то наименьший элемент $\varnothing$ решетки $B(S_n)$ является $\sigma\tau$-замкнутым.

Решетка $B(S_n)$ атомарная, атомами в ней служат одноэлементные множества перестановок. Каждый атом в $B(S_n)$ является образом некоторого линейного упорядоченного множества, поэтому он $\sigma\tau$-замкнутый.

Теорема 1. Каждый элемент $B(S_n)$ решетки можно представить в виде объединения $\sigma\tau$-замкнутых элементов.

Действительно, решетка $B(S_n)$ – атомарная, а каждый атом является $\sigma\tau$-замкнутым. Поэтому, для любого $P \in B(S_n)$ хотя бы одно такое представление существует.

На рис. 3 приведена решетка Λ_3' ее элементы изображены в виде диаграмм Хассе соответствующих y-множеств. Все максимальные элементы (линейные порядки) занумерованы числами от 1 до 6. Представлениями этих линейных порядков являются все перестановки степени 3. На рис. 4 изображена решетка $B(S_3)$ эти перестановки помечены теми же числами 1-6. Замкнутые относительно оператора $\sigma\tau$-элементы решетки $B(S_3)$ обозначены зачерненными кружками. Любой элемент в $B(S_3)$ можно представить в виде объединения $\sigma\tau$-замкнутых, например, $\{1,3,4,5\} = \{3,4,5\} \cup \{1,3,4\}$.

Представление произвольного множества перестановок в виде объединения $\sigma\tau$-замкнутых множеств будем называть $\sigma\tau$-разложением. Решетка $B(S_n)$ при $n > 3$ представляет собой очень громоздкий объект и, поэтому, не годится для определения $\sigma\tau$-разложения произвольного множества перестановок. Для разработки эффективного алгоритма разложения множества на замкнутые составляющие нужно найти необходимые и достаточные условия $\boldsymbol{\sigma\tau}$-замкнутости.

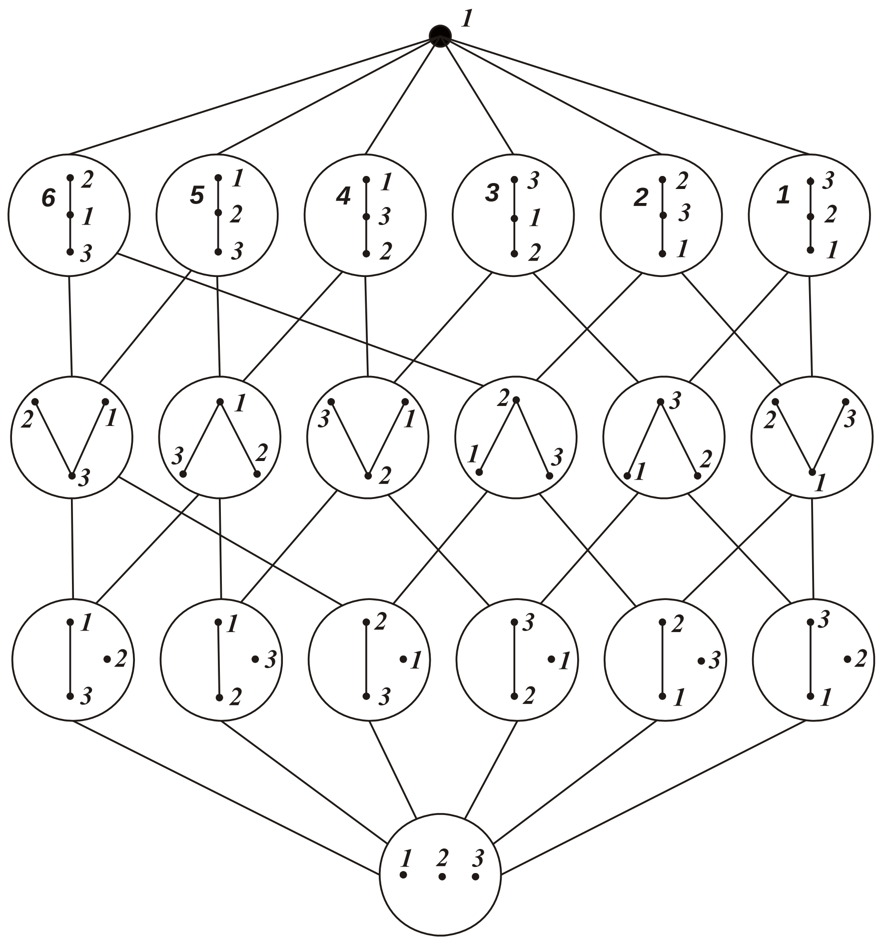

Рис. 3. Решетка $\Lambda_3{}'$

Приведем несколько определений, необходимых для формулировки этих условий. Любую перестановку $\boldsymbol{p = \{i_1,\ i_2,...,i_n\} \in S_n}$ можно рассматривать как сокращенную запись подстановки $\begin{pmatrix} 1, 2,...., n \\ i_1, i_2,...., i_n \end{pmatrix}$, поэтому на $\boldsymbol{S_n}$ можно определить операцию произведения перестановок следующим образом:

$$(i_1, \ldots, i_n) \times (j_1, \ldots, j_n) = \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ i_1, \ldots, i_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, \ \ldots \ , n \\ j_1, \ldots, j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & , n \\ j_{i1}, & j_{i2}, & \ldots, & j_{in} \end{pmatrix}.$$

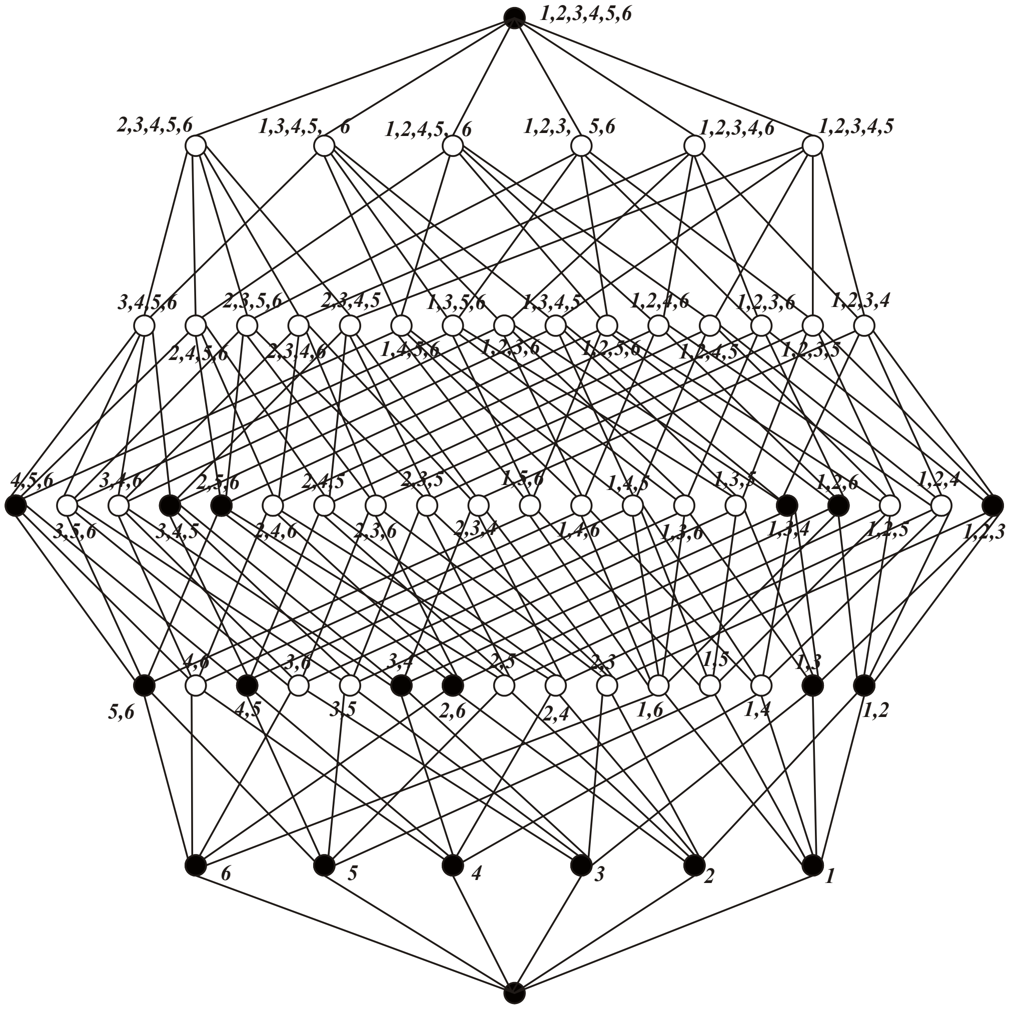

Рис. 4. Решетка $B(S_3)$

Черные вершины решетки на рис. 4 означают замкнутые элементы.

Напомним, что спуском в перестановке $p = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ называется пара (i_k, i_{k+1}), в которой $i_k > i_{k+1}$. Обозначим через $D(P)$ множество позиций, где появляются спуски $D(P) = \{j \mid i_j > i_{j+1}\}$. Подстановка вида $\begin{pmatrix} 1 \ldots k \ldots l \ldots n \\ 1 \ldots l \ldots k \ldots n \end{pmatrix}$ называется транспозицией и обозначается $(k,\ l)$. Если тождественная перестановка $id = (1,\ldots,\ n)$ принадлежит некоторому $P,\ P \in B(S_n)$, то будем называть такое множество перестановок приведенным. Множество $P\ p_\alpha^{-1} = \{p \cdot p_\alpha^{-1} \mid \forall\, p \in P\}$ является приведенным, если $p_\alpha \in P$. Действительно, $P_\alpha \cdot P_\alpha^{-1} = id \in P$. Операция приведения заключается в переобозначении переставляемых символов и не влияет на $\sigma\tau$-замкнутость множества P.

Для любого $p \in S_n$ положим $E(p) = \{(i_k,\ i_l) \mid k < l \text{ и } i_k < i_l\}$. Как показано в [4] отношение $p \le q \Leftrightarrow E(p) \subseteq E(q), p,q \in S_n$ задает на S_n частичный порядок, который обозначается $Per(S_n)$. В $Per(S_n)$ $p < q$ тогда и только тогда, когда $q = p(k,\ k+1)$ для некоторого $k \in D(p)$.

Каждому множеству перестановок $P \in B(S_n)$ сопоставим орграф $G(P,\ T)$, в котором вершинами служат перестановки из P, а дуга $(q,\ p) \in T$ соединяет вершину q с вершиной p тогда и только тогда, когда $q > p$ в $Per(S_n)$.

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях $\sigma\tau$ -замкнутости множества перестановок. Эту теорему приведем без доказательства.

Теорема 2. Приведенное множество перестановок $P \in B(S_n)$ является $\sigma\tau$ -замкнутым тогда и только тогда, когда:

1. Для всех вершин орграфа $G(P,\ T)$ полустепень захода $d^-(p)$ равняется $D(p)$;

2. Свойство 1 инвариантно относительно приведения множества P по любому своему элементу p_α, то есть $\forall\, p_\alpha \in P$ выполняется соотношение $d^-(p \times p_\alpha^{-1}) = D(p \times p_\alpha^{-1})$ в орграфе $G(P \times p_\alpha^{-1}, T)$.

Теоремы 1 и 2 дают основания для разработки эффективных алгоритмов генерации $\sigma\tau$ -разложений. Например, на рис. 5 приведено множество перестановок P. Оно состоит из двух $\sigma\tau$ -замкнутых составляющих P_1 и P_2, которые обведены сплошной и штриховой линией соответственно. Ниже изображены два частично упорядоченных множества A_1 и A_2 таких, что $\sigma(A_1) = P_1$ и $\sigma(A_2) = P_2$.

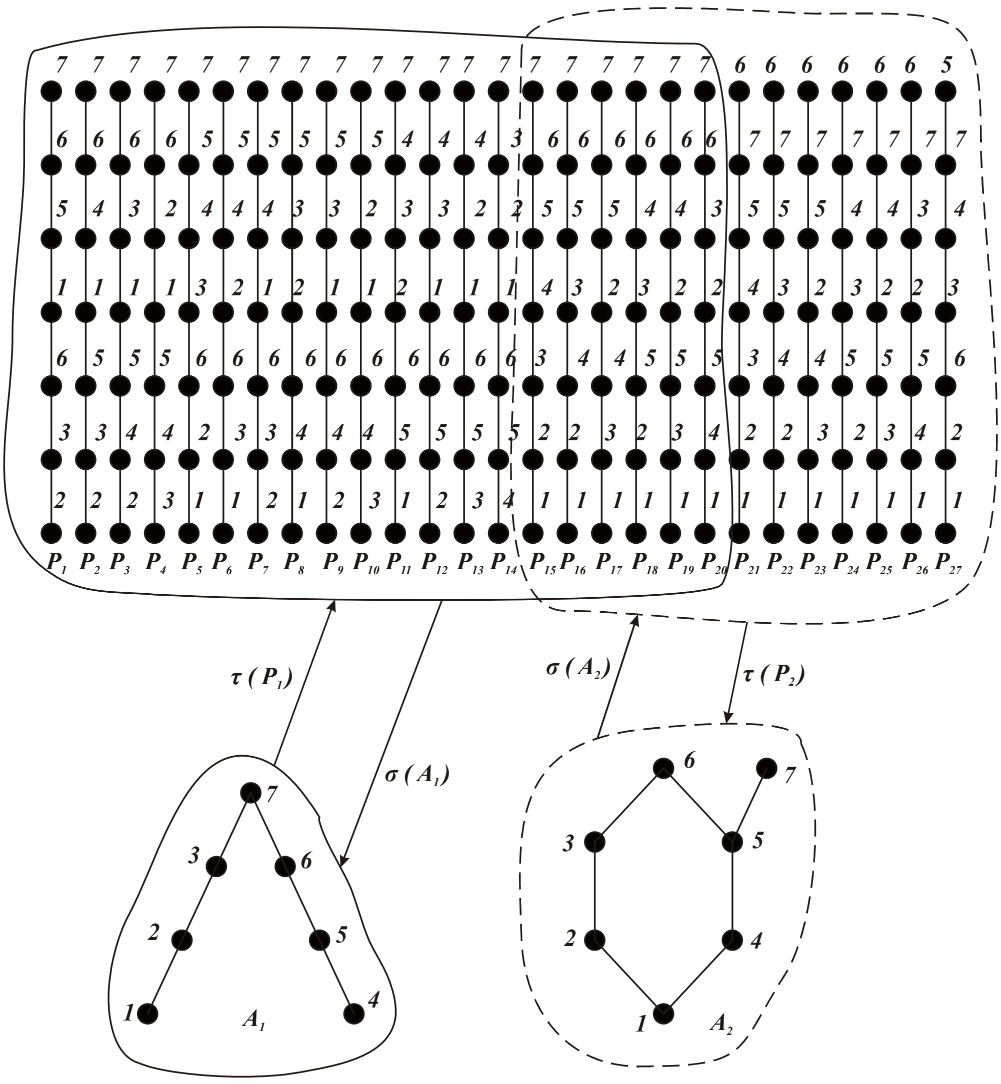

Рис. 5. Множество перестановок и его $\sigma\tau$ -разложение

Рассмотрим как реализуется процесс диалоговой оптимизации, основанный на $\sigma\tau$ -разложении множества перестановок. Пусть P есть множество последовательностей сборки некоторого изделия, представленных в виде перестановок. Из этого множества необходимо исключить такие перестановки, которые описывают последовательности, неприемлемые по соображениям технологичности, экономичности и т.п. Предполагается, что «система предпочтений» ЛПР, то есть представления его о последовательностях сборки изделия, которые являются «хорошими» в данной производственной системе, может быть описана в теоретико-порядковых терминах. Это значит, что для каждой пары $\{i, j\}$ деталей, предъявленных для оценки, ЛПР должен выбрать одну из возможностей:

1. $i > j$, деталь i должна быть установлена после детали j;
2. $i < j$, деталь i устанавливается раньше детали j;
3. $i = j$, детали i и j должны устанавливаться одновременно;
4. Отказ от сравнения.

Всевозможные двухэлементные антицепи $\sigma\tau$ -разложения множества P представляют собой пары деталей, которые могут быть предъявлены для оценки ЛПР. Такими парами для примера, приведенного на рис. 5, являются: $3||6$; $3||5$; $3||4$; $2||6$; $2||5$; $2||4$; $1||6$; $1||5$; $1||4$; $3||7$; $2||7$; $6||7$. Здесь || означает бинарное отношение несравнимости пар элементов.

Пусть, по мнению ЛПР, $\sigma\tau$-разложение $\bigcup_i A_i$ должно быть пополнено некоторым множеством пар деталей, которые упорядочиваются по правилам 1 – 4. Обозначим это множество V. Тогда во множестве $P' = \sigma(\bigcup_i A_i \cup V) = \bigcup_i \sigma(A_i \cup V)$ не содержится перестановок, которые противоречат «системе предпочтений» V. Если для некоторой $p \in P$

$p(i) < p(j)$, а $\{i > j\} \in V$,

$p(i) > p(j)$, а $\{i < j\} \in V$,

$p(i) \neq p(j)$, а $\{i \neq j\} \in V$, то $p \notin \bigcup_i \sigma(A_i \cup V)$.

Так, если $V = \{1 < 4\}$ то множество $\sigma(A_1 \cup V) \cup \sigma(A_2 \cup V)$ не будет включать в себя перестановки $p_4, p_9, p_{10}, p_{15}, p_{16}, p_{20}, p_4$, (см.рис. 5).

Генерацией «исправленного» множества перестановок P', заканчивается одна итерация процесса диалоговой оптимизации. На следующей итерации для P' осуществляется такая же последовательность шагов, что и для P. То есть, построение $\sigma\tau$ -разложения $\bigcup_i A_i$ множества P', формирование новой, уточненной «системы предпочтений» V', формирование множества $P'' = \bigcup_i \sigma(A_i \cup V)$. Процесс диалоговой оптимизации заканчивается если: произошло полное исчерпание «системы предпочтений» ЛПР; после K-ой итерации $|p^K| = 1$.

Существует простой критерий, который позволяет проверить непротиворечивость системы предпочтений ЛПР. Пусть на i-ой итерации процесса сформирована «система предпочтений» V^{i-1}. Она может считаться непротиворечивой, если выполняются следующие условия:

- для любой пары $\{m, j\} \in V^{i-1}$ такой, что либо $\{m > j\}$, либо $\{m < j\}$, существует элемент $\sigma\tau$ -разложения A^{i-1}, для которого бинарное отношение $A^{i-1} \cup \{i, j\}$ не содержит контуров;
- для отношения эквивалентности ε, порожденного такими парами в V^{i-1}, что $\{m = j\}$, найдется y-множество A^{i-1} (элемент $\sigma\tau$ -разложения), на котором ε обладает свойством стабильности [4].

Разложение множества перестановок на $\sigma\tau$ -замкнутые составляющие не только объективирует недостающую информацию о порядке следования деталей при сборке, но и позволяет учесть ценность такой информации.

Сопоставим каждой паре несравнимых элементов $a = \{i \,||\, j\} \in A$, где A – некоторое y-множество из $\sigma\tau$ -разложения, тройку (a_1, a_2, a_3), которую назовем вектором исходов. Координаты вектора исходов подсчитаем по формулам:

$$a_1 = 1/|\bigcup_{\alpha}\sigma\ (A_\alpha \cup \{\ a\ \})|, \text{ если } a = \{i > j\};$$

$$a_2 = 1/|\bigcup_{\beta}\sigma\ (A_\beta \cup \{\ a\ \})|, \text{ если } a = \{i < j\};$$

$$a_3 = 1/|\bigcup_{\gamma}\sigma\ (A_\gamma\ /\ \varepsilon)|, \text{ если } a = \{i = j\}.$$

Коэффициенты вектора исходов равняются величинам обратным мощности «исправленного» множества перестановок P' для трех возможных оценок пары a. Объединение линейных продолжений ведется по таким индексам A_α, для которых y-множества A_α и A_β не образуют контуров с $\{i, j\}$, а эквивалентность ε стабильна на A_γ .

На множестве пар несравнимых элементов можно ввести отношение доминирования. Будем говорить, что пара $a' = \{i, j\}$ доминирует пару $a''= \{m, n\}$, если вектор исходов (a_1', a_2', a_3') доминирует по Парето вектор исходов (a_1'', a_2'', a_3''). Ясно, что альтернативы, вектор исходов которых является оптимальным по Парето, в большей степени «доупорядочивают» y-множество $\bigcup_i A_i \cup \{\ a\ \}$. Если при формировании «системы предпочтений» V выбираются пары, которые имеют Парето-оптимальный вектор исходов, то для выбора оптимальной перестановки потребуется меньше итераций процесса диалоговой оптимизации.

Выводы

1. В разных отраслях человеческой деятельности существует множество практически важных задач, которые формулируются в форме задачи принятия решений специального вида. А именно, задано исходное множество альтернатив, которое представляет собой совокупность перестановок или линейных порядков. Требуется выбрать из этого множества одну альтернативу, которая соответствует системе предпочтений лица принимающего решение.
2. Важными частными случаями такого сорта задач являются выбор рационального маршрута обработки детали и генерация рациональной последовательности сборки изделия.
3. Данные примеры представляют собой типичные образцы слабоструктурированных задач, что делает невозможным применение дискретных экстремальных постановок и хорошо развитого аппарата дискретной оптимизации и исследования операций.
4. В работе предлагается новый подход к решению подобных проблем, основанный на представлении множества перестановок в виде совокупности частичных порядков.
5. С точки зрения лица принимающего решение это представление обладает несколькими несомненными преимуществами. Во-первых, оно в явном виде представляет всю наличную систему запретов и все «степени свободы» ЛПР. Сравнимые пары альтернатив образуют систему ограничений, которая должна быть соблюдена. Несравнимые пары частичных порядков требуют анализа ЛПР.
6. По результатам анализа проектной ситуации лицо принимающее решение вносит в частичный порядок «порцию доупорядочения», вводя некоторое непротиворечивое предпочтение между парами несравнимых элементов.
7. На основе совокупной порядковой информации строится множество всех линейных продолжений, которое представляет собой подмножество исходных перестановок. Для этого множества строится минимальное частично-порядковое представление, которое предъявляется для анализа ЛПР. Процедура продолжается до получения одноэлементного множества, котоое служит решением задачи.

Список литературы

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 560 с.
2. Божко А.Н. Теоретико-решеточные методы синтеза оптимальной последовательности сборки изделия // Системы автоматизированного проектирования: Тезисы докладов Всесоюзной конференции САПР-85. – М.: 1986, с. 26-28.
3. Буловский П.И. Основы сборки приборов. – М.: Машиностроение, 1970. – 200 с.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982. – 456 с.