ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОСТУПА

Во многих проектных ситуациях специалисты в области автоматизации сталкиваются с задачей моделирования доступа. В технологической подготовке сборочного производства доступ понимается как отсутствие препятствий для перемещения детали или сборочной единицы в служебное положение в изделии. Это геометрическая свобода, которая позволяет реализовать выбранную схему технологического членения и сборку изделия в заданной последовательности.

Моделирование доступа – это пример из ряда труднорешаемых научных проблем, имеющих элементарную постановку. Она доступна ученику начальных классов с опытом работы с детским конструктором и домашней хозяйке, которая способна собрать бытовой прибор после мойки или мелкого ремонта. Способы формального решения проблемы обсуждаются с самого начала работ по автоматизации проектирования [9, 10], но эффективного решения не предложено до сих пор.

Большинство подходов к этой проблеме основываются на синтезе правил перемещения трехмерных геометрических моделей объектов (деталей или сборочных единиц) и проверки условий непересечения [2, 5, 11]. Эта идея оказывается работоспособной только для деталей простой конфигурации (тела вращения) и изделий без жестких геометрических связей. Реализация метода требует очень высоких вычислительных ресурсов для корпусных изделий с плотным монтажем и сложной конфигурацией составных частей. В работе предлагается новый подход к моделированию условий доступа, позволяющий свести к минимуму число обращений к трудоемкой процедуре геометрической разрешимости.

Назовем ситуацией пару $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}$ – устанавливаемая деталь, а $\boldsymbol{Y}$ – собираемое множество деталей, причем $\boldsymbol{Y}$ является носителем полного комплекта баз для $\boldsymbol{x}$. Точное определение собираемого множества и техника их генерации рассмотрена в [4]. Скажем лишь, что собираемое множество – это множество деталей изделия, которые можно собрать независимо (прообраз сборочной единицы). Установка $\boldsymbol{x}$ на собираемое множество $\boldsymbol{Y}$ дает новое собираемое множество $\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{x}$.

Очевидно, что для любой детали $\boldsymbol{x}$ существуют ситуации двух типов. Установка $\boldsymbol{x}$ на собираемое множество $\boldsymbol{Y}$ возможна по условиям доступа, такие ситуации будем называть разрешенными. Установка $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{Y}$ запрещена наличными геометрическими препятствиями, ситуации этого типа будет назвать запрещенными.

Для произвольной детали $\boldsymbol{x}$, принадлежащей изделию $\boldsymbol{X}$, обозначим через $\boldsymbol{Q(x)}$ множество всех ситуаций, которые может образовывать $\boldsymbol{x}$ с различными собранными фрагментами изделия. Множество $\boldsymbol{Q(x)}$ рассмотрим вместе с частичным порядком $\leq$, который индуцируется на нем теоретико-множественным включением первых координат ситуаций, то есть $\boldsymbol{(Y_\alpha, x)} \leq \boldsymbol{(Y_\beta, x)}$ в том случае, если $\boldsymbol{Y_\alpha} \subseteq \boldsymbol{Y_\beta}$. Частично упорядоченное множество $\boldsymbol{(Q(x), \leq)}$ будем изображать диаграммой Хассе, в которой каждой вершине соответствует ситуация $\boldsymbol{(Y, x)} \in \boldsymbol{Q(x)}$. Если $\boldsymbol{(Y_\alpha, x)} \leq \boldsymbol{(Y_\beta, x)}$, то вершина, отвечающая ситуации

(Y_β, x), будет изображаться выше вершины, изображающей (Y_α, x). На рис 2. приведена диаграмма Хассе множества $Q(x)$ для детали 1 конструкции, чертеж которой показан на рис. 1.

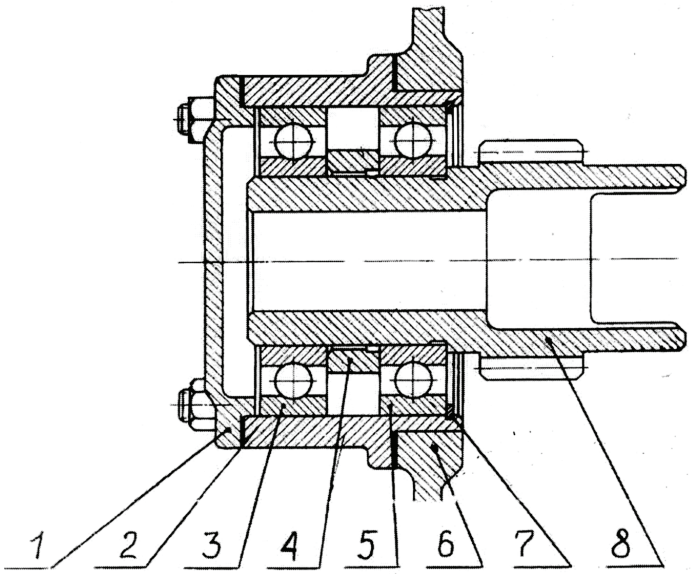

Рис. 1. Пример простой конструкции

Вершины диаграммы Хассе упорядоченного множества $Q(x)$, которые соответствуют разрешенным ситуациям, будет изображать черными кружками и называть черными. Вершины, отвечающие запрещенным ситуациям, будем представлять белыми кружками и называть светлыми. Ситуации, для которых проблема доступа еще не решена, будем называть нераскрытыми и на диаграмме Хассе представлять квадратными вершинами. Используя метафору цвета, нераскрытые ситуации удобно называть неокрашенными.

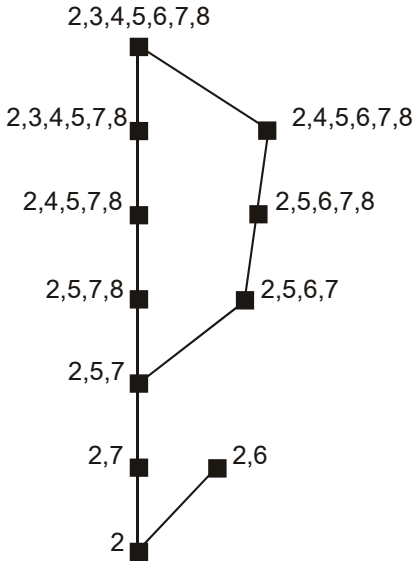

Рис. 2. Диаграмма Хассе множества Q(x)

Утверждение 1. Пусть ситуация $(Y, x) \in \mathbf{Q}(x)$ является разрешенной. Тогда любая ситуация $(Z, x) \in \mathbf{Q}(x)$ такая, что $Z \subseteq Y$, также является разрешенной. Действительно, если

собираемое множество не содержит геометрических препятствий для установки детали x, то не может их быть и в меньшем по составу собираемом множестве Z.

Утверждение 2. Пусть ситуация $(Y, x) \in Q(x)$ является запрещенной. Тогда любая ситуация $(Z, x) \in Q(x)$ такая, что $Y \subseteq Z$, является запрещенной. Если собираемое множество Y имеет геометрические препятствия для установки x в служебное положение, то добавление новых деталей способно только усложнить конфигурацию Y и не может устранить наличные запреты.

Пусть ситуация $(Y, x) \in Q(x)$, предъявленная для раскрытия такова, что установка x на Y возможна. Тогда вершина диаграммы Хассе q_x, отвечающая паре (Y, x), будет окрашена в черный цвет. Согласно утверждению 1, для всех ситуаций (Z, x) таких, что $Z \subseteq Y$ установка x на Z возможна. Из определения порядка в упорядоченного множестве $Q(x)$ следует, что каждой паре (Z, x) соответствует черная вершина диаграммы Хассе q_z, причем $q_z \leq q_x$.

Если установка x на Y невозможна, то, ситуации (Y, x) отвечает светлая вершина q_x диаграммы Хассе а все вершины q_z, $q_z \geq q_x$, соответствующие большим запрещенным ситуациям, являются светлыми по утверждению 2.

Таким образом, если некоторая $q \in Q(x)$ является черной, то все элементы, принадлежащие порядковому идеалу $I(q) = \{q' \in Q(x) \mid q' \leq q\}$, также черные. Если q – светлая, то и все элементы порядкового фильтра $F(q) = \{q'' \in Q(x) \mid q'' \geq q\}$ обладают этим свойством. Требуется найти такое множество нераскрытых вершин, раскрытие которых позволяет окрасить в два цвета упорядоченное множество $Q(x)$.

Эту задачу можно поставить в форме неантагонистической игры двух лиц – ЛПР (лицо принимающее решение) и природы. Дано частично-упорядоченное множество $(Q, \leq)$, все вершины которого являются неокрашенными. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины этого множества. Ответ второго игрока – природы – состоит в определении цвета предложенной для проверки вершины. Если вершина получила черный цвет, то все вершины порядкового идеала окрашиваются в черный цвет. Если проверяемая вершина получила белый цвет, то все вершины порядкового фильтра окрашиваются в белый цвет. Требуется окрасить частичный порядок за наименьшее число обращений к ЛПР.

Функции «природы» могут выполнять эксперт (конструктор, технолог и др.) или система трехмерного геометрического моделирования. Раскрытие ситуации «природой» заключается в реализации эксперимента по установке детали на собранный фрагмент. Это испытание может иметь два возможных исхода и, в зависимости от этого события, вершины частичного порядка получают черный или белый цвет. ЛПР реализует свой выбор в условиях полной неопределенности. поскольку на момент принятия решения не знает результат будущей проверки.

Приведем несколько определений из теории игр [7, 8]. Пусть T – дерево с выделенной

вершиной (корней) A. Будем говорить, что вершина C следует за вершиной B, если последовательность ребер, соединяющая A с C, проходит через B. Будем говорить, что C следует за B непосредственно, если C следует за B и, кроме того, существует ребро, соединяющее B с C. Вершина E называется окончательной, если за E не следует ни одной вершины.

Для определения позиционной игры n лиц требуется задать:

1. корневое дерево T с корнем A, который называется начальной позицией игры;
2. функцию выигрыша, которая ставит в соответствие каждой окончательной позиции дерева T некоторый n-вектор;
3. разбиение множества всех неокончательных позиций (то есть не висячих вершин дерева) на $n+1$ подмножеств $S_0, S_1,\ldots, S_n$ называемых множествами очередности;
4. вероятностное распределение для каждой позиции из S_0 на множестве непосредственно следующих за ней позиций;
5. подразбиение множества S_i для каждого $i = \overline{1,n}$ на подмножества S_i^j, называемые информационными множествами;
6. для каждого информационного множества S_i^j множество индексов I_i^j вместе со взаимно однозначными отображениями множества I_i^j на множества альтернатив каждой позиции из S_i^j.

Здесь перечислены все элементы игры: условие 1 устанавливает, что имеется начальная позиция; 2 задает функцию выигрыша; 3 разделяет множество неокончательных позиций на позиции с ходом случая S_0 и личные позиции, соответствующие каждому из n игроков $(S_1,\ldots,S_n)$; 4 задает схему рандомизации в каждой позиции случая; 5 разбивает позиции каждого игрока на информационные множества; 6 позволяет определить чистую стратегию игрока как функцию, которая ставит в соответствие каждому информационному множеству i этого игрока некоторый индекс из I_i^j .

Говорят, что игра Γ есть игра с полной информацией, если все информационные множества в Γ состоят из одной позиции [6]. Игра $\Gamma(\mathbf{Q})$, состоящая в окрашивании частичного порядка за наименьшее число ходов, есть игра с полной информацией, поскольку каждое информационное множество ЛПР состоит из одной позиции.

На рис. 3 представлено дерево игры $\Gamma(\mathbf{Q})$ для простейшего упорядоченного множества – трехэлементной цепи. Уровни дерева помечены номерами игроков: 1– ЛПР, 2 – природа. Нераскрытые вершины изображены квадратами черного цвета, вершины, которые выбираются первым игроком для проверки представляются в виде белых квадратов. Ответы второго игрока показаны круглыми вершинами, черного или белого цвета. Вершины дерева игры $t_1 - t_{18}$ являются окончательными (терминальными). Проигрыш ЛПР равняется количеством ходов, которые потребовалось сделать для окраски всего множества. В позициях

t_1, t_2 эта величина равняется единице, в позициях $t_3 - t_{10}$ – двойке, в позициях $t_{11} - t_{18}$ – тройке.

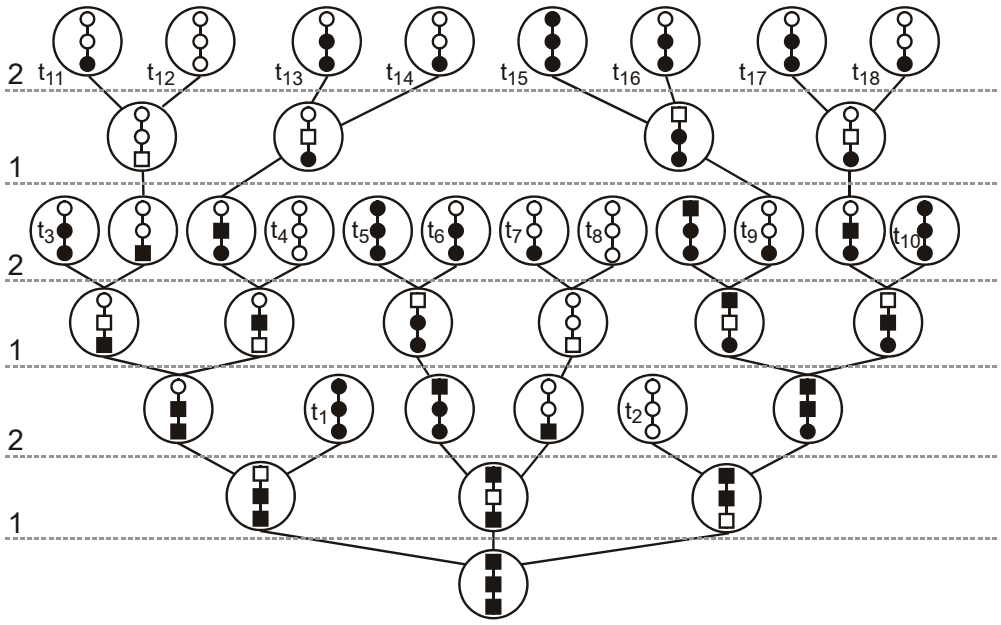

Рис. 3. Дерево игры Г(Q) для трехэлементной цепи

Методы решения игр вида $\Gamma(Q)$ рассмотрим отдельно для случая когда частично упорядоченное множество Q есть цепь и для произвольного упорядоченного множества множества. Это вызвано тремя причинами. Во-первых, для многих изделий и классов техники упорядоченное множество ситуаций, связанное с установкой одной детали, представляет собой цепь. Во-вторых, любое частично-упорядоченное множество можно представить в виде объединения реберно-непересекающихся цепей. Такое представлением частичных порядков называется D-разложением[12]. И в-третьих, оказалось, что для цепи решение игры $\Gamma(Q)$ можно найти в так называемых чистых стратегиях, тогда как для упорядоченного множества общего вида доступна лишь оптимальная стратегия поведения [7]. Обозначим через C упорядоченное множество, которое является цепью, а через $\Gamma(C)$ – игру по раскрашиванию ее вершин за наименьшее число ходов.

Решение игр вида $\Gamma(C)$

Пусть C_n-цепь, имеющая n элементов. Обозначим Z_n множество всех n -элементных цепей, вершины которых являются либо черными, либо светлыми, $|Z_n| = n+1$. Например, на 4 приведено семейство Z_g, состоящее из всевозможных расцвеченных девятиэлементных цепей.

Оптимальной чистой стратегией игрока 1 в игре $\Gamma(C_n)$ является такая стратегия, которая за минимальное число ходов (число обращений к ЛПР) позволяет определить цвет всех вершин семейства Z_n. Так, на рис. 4 представлена стратегия, которую можно назвать односторонним сканированием. Она заключается в следующем: на очередном шаге игры игрок

1 выбирает из всех нераскрытых (неокрашенных) вершин наибольшую (наименьшую). На рис. 4 ходы игрока 1 обозначены числами от 1 до 9, а раскраски цепей числами от 1 до 10. Например, если проверяемая цепь имеет раскраску 1, то игра кончается за один ход. Напротив, для цепи с номером 10 необходимо сделать 9 ходов.

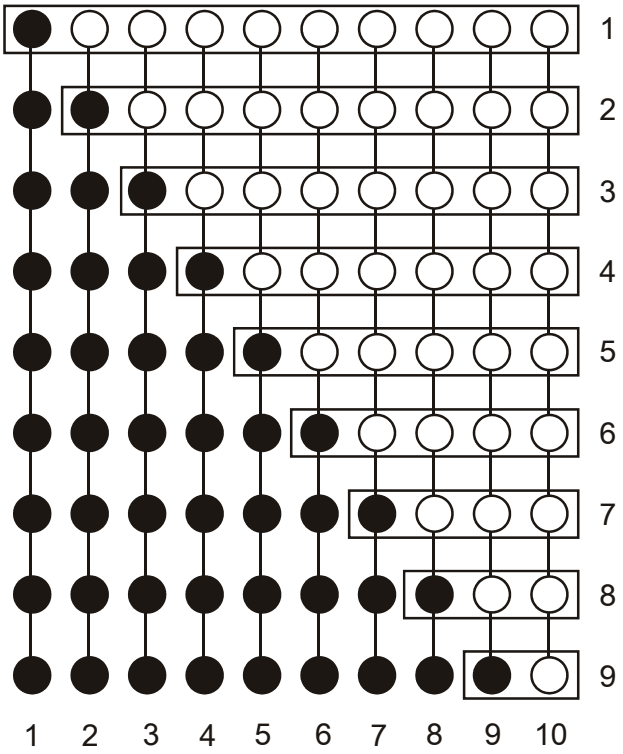

Рис. 4. Ходы ЛПР при стратегии одностороннего сканирования

Нетрудно подсчитать, что, если игрок 1 выберет стратегию одностороннего сканирования, то для расцветки всех цепей семейства Z_n ему необходимо сделать $\frac{N(N+1)}{2} + N$ ходов.

Рассмотрим стратегию игрока 1, которую назовем дихотомической. В этой стратегии каждый ход заключается в выборе вершины из середины интервала, состоящего из непроверенных вершин. На рис. 5 первый ход игрока, придерживающегося дихотомической стратегии обозначен сплошным прямоугольником. Обозначим через $W(d, N)$ – количество проверок, которые необходимо сделать игроку 1 для расцветки всех цепей семейства Z_n при условии, что он применяет дихотомическую стратегию.

Пусть сделаны первые ходы игроками 1 и 2, тогда игра $\Gamma(C_N)$ с функцией выигрыша $W(d, N)$ распадается на две подыгры. Таковыми являются: $\Gamma_1 = \Gamma(C_{\frac{N}{2}})$ и $\Gamma_2 = \Gamma(C_{\frac{N}{2}-1})$, если $N = 0 \ (mod2)$, и $\Gamma_1 = \Gamma(C_{\frac{N-1}{2}})$, $\Gamma_2 = \Gamma(C_{\frac{N-1}{2}})$, если $N = 1 \ (mod2)$.

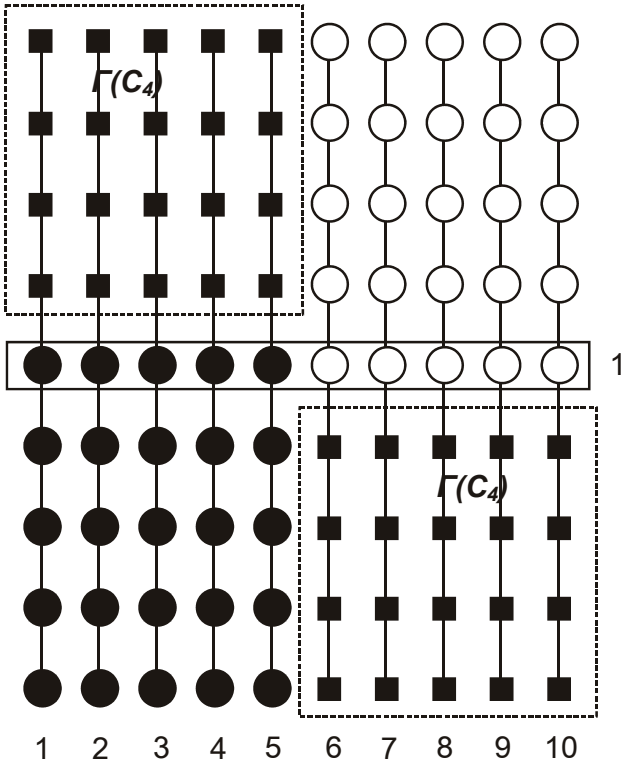

Рис. 5. Разложение игры $\Gamma(C_9)$ при дихотомической стратегии

На рис. 5 представлены «последствия» первых ходов игроков 1 и 2. Игра $\boldsymbol{\Gamma(C_9)}$ распадается на две одинаковые подыгры $\boldsymbol{\Gamma(C_4)}$, которые на рисунке обведены пунктирной линией.

В результате разыгрывания подыгр $\boldsymbol{\Gamma_1}$ и $\boldsymbol{\Gamma_2}$ выигрыш игрока 1 равняется $\boldsymbol{W(d, \frac{N}{2}) + W(d, \frac{N}{2} - 1)}$, если $\boldsymbol{N = 0(mod2)}$ и $\boldsymbol{W(d, \frac{N-1}{2}) + W(d, \frac{N-1}{2})}$, если $\boldsymbol{N = 1(mod2)}$. Общий выигрыш $\boldsymbol{W(d, N)}$ равняется сумме выигрышей в партиях $\boldsymbol{\Gamma_1}$ и $\boldsymbol{\Gamma_2}$ и количеству проверок на первом ходу, которое равняется $\boldsymbol{N + 1}$. Таким образом, имеются два рекуррентных соотношения:

$\boldsymbol{W(d, N) = W(d, \frac{N}{2}) + W(d, \frac{N}{2} - 1) + N + 1}$ для $\boldsymbol{N = 0(mod2)}$ и

$\boldsymbol{W(d, N) = 2W(d, \frac{N-1}{2}) + N + 1}$ для $\boldsymbol{N = 1(mod2)}$,

при начальных условиях: $\boldsymbol{W(d, 1) = 2}$; $\boldsymbol{W(d, 2) = 5, W(d, 3) = 4, W(d, 4) = 12.}$

Разрешая эту рекуррентность, получаем следующее выражение для функции выигрыша игрока 1, придерживающегося стратегии $\boldsymbol{d}$, в игре $\boldsymbol{\Gamma(C_N)}$:

$\boldsymbol{W(d, N) = (1 + N) \times (\pi + 2) - 2^{p+1}}$, где $\boldsymbol{p = [\log_2 N]}$ (целая часть от $\boldsymbol{\log_2 N}$).

Можно показать, что для любой чистой стратегии $\boldsymbol{d'}$ игрока 1 выполняется неравенство $\boldsymbol{W(d', N) \geq W(d, N)}$, то есть дихотомическая стратегия является оптимальной чистой стратегией игрока 1 в игре $\boldsymbol{\Gamma(C_N)}$.

Число «обращений» к ЛПР, которые необходимо сделать в стратегии d для расцветки каждой отдельной цепи из C_N, не превосходит значения $\lceil \frac{W(d,N)}{N} \rceil$. Для расцветки отдельных цепей некоторые стратегии, отличные от d, могут требовать меньшего числа ходов игрока 1. Например, если все вершины цепи черные, то, придерживаясь стратегии одностороннего сканирования, необходимо делать один ход. Однако, если применить эту стратегию для всех цепей, принадлежащих семейству Z_n, то одностороннее сканирование требует существенно большего числа ходов, $W(d, N) < \frac{N(N+1)}{2} + N$ для $N \geq 3$.

Игра $\Gamma(Q)$ для произвольного упорядоченного множества

Пусть Q произвольное частично упорядоченное множество. Рассмотрим игру вида $\Gamma(Q)$. В тех элементах, которые связаны с определениями начальной позиции, конечных позиций, ходов игрока 1 и игрока 2, игры $\Gamma(Q)$ и $\Gamma(C)$ совпадают. Если, в $\Gamma(C)$ удалось «ликвидировать» игру случая, определив функцию выигрыша игрока 1 на всех допустимых расцветках цепи, то в $\Gamma(Q)$ сделать это не удается, так как каждую расцветку произвольного частичного порядка можно считать уникальной. Это утверждение справедливо, поскольку число попарно неизоморфных N-элементных частично-упорядоченных множеств очень велико.

Так, существует 318 различных 6-элементных частичных порядков [3]. Нижней границей числа всевозможных расцвеченных N-элементных частично-упорядоченных множеств является произведение $G(N)(N + 1)$, где $G(N)$-количество N-элементных частично-упорядоченных множеств, а $(N + 1)$ – число различных расцветок цепи C_N ($N + 1$ – оценка снизу числа различных расцветок частично-упорядоченного множества, состоящего из N элементов). Для сравнения скажем, что число различных N-элементных линейно упорядоченных множеств равно единице, поскольку все цепи C_N изоморфны между собой.

Выигрышем игрока 1 в игре $\Gamma(Q)$ будем считать число ходов (обращений к ЛПР), которые необходимо сделать, чтобы все вершины частично-упорядоченного множества Q были раскрыты (получили цвет).

Пусть игрок 1 выбрал некоторую чистую стратегию a, то есть еще до начала игры запланировал свои ходы в каждой позиции. Для окончания игры осталось сделать все случайные ходы (ходы природы). Случайные ходы можно свести к одному ходу природы. Пара $\tau = (a, b)$, состоящая из чистой стратегии a игрока 1 и случайного хода b природы определяет распределение вероятностей на множестве окончательных (терминальных) вершин $T = \{t_1,\ldots,t_l\}$ дерева игры. Обозначим $p(\tau,t)$ вероятность окончания партии в вершине дерева $t \in T$, $p(\tau,t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} p(\tau,t_i) = 1$. Распределение вероятностей $p(\tau,t)$ естественным образом приводит к математическому ожиданию выигрыша игрока 1, которое

определяется следующим образом: $W(\tau) = \sum_{i=1}^{l} W(t_i) \times p(\tau, t_i)$, где $W(t_i)$ – выигрыш игрока 1 в окончательной позиции t_i (число проверок ЛПР).

Таким образом, функцией выигрыша игрока 1 в игре $\Gamma(Q)$ является математическое ожидание $W(\tau)$ случайной величины $W(t)$ (выигрыш в окончательной вершине t), которая определяется чистой стратегией игрока 1 (a) и случайным ходом природы (b).

Теперь, для полного определения игры $\Gamma(Q)$ необходимо задать схему рандомизации в каждой позиции случая, то есть вероятности, с которыми природа «объявляет» каждую выбранную игроком 1 вершину темной или светлой.

Все допустимые расцветки частично-упорядоченного множества Q будем считать равновероятными. Вероятность $P(A)$ события $A = \{$некоторая вершина $q \in Q$ является черной$\}$ равняется частному от деления числа расцветок множества Q, в которых вершина q – черная, на число всех расцветок. Вероятность $P(\overline{A})$ противоположного события $\overline{A} = \{$вершина q является светлой$\}$ равняется дроби, в которой числитель есть количество расцветок Q, в которых q – светлая, а знаменатель – число всех расцветок Q. Для определения схемы рандомизации в игре $\Gamma(Q)$ необходимо подсчитать эти вероятности для произвольных q и Q.

Приведем несколько определений из теории частично-упорядоченных множеств [3]. Отображение $f: P \to Q$ частично-упорядоченных множеств P и R называется монотонным (изотонным), если для всех $a, b \in P$ таких, что $a \le b$ выполняется $f(a) \le f(b)$. Множество всех монотонных отображений из P в R обозначается через $Mon(P, R)$. Порядковым многочленом для P называется функция $\omega(P, x) = |Mon(P, C_x)|$, то есть число различных монотонных отображений множества P в x-элементную цепь C_x.

Покажем, что число допустимых расцветок $r(Q)$ частично-упорядоченного множества Q равняется $\omega(Q, 2)$. Каждая допустимая расцветка является ядром монотонного отображения $f: Q \to \{0, S\}$, $0 \le S$, которое каждой светлой вершине $q \in Q$ сопоставляет вершину S двухэлементной цепи $\{0, S\}$, а образом каждой черной вершины является вершина 0.

Действительно, пусть $q_1 \le q_2$, $q_1, q_2 \in Q$. Если q_1 и q_2 имеют один цвет, то их образом служит одна вершина 0 или S, поэтому $f(q_1) \le f(q_2)$. Если цвет q_1 и q_2 различный, то возможен только вариант расцветки, при которой q_1 – черная, q_2 – светлая. Поэтому $f(q_1) = 0$, $f(q_2) = S$ и $f(q_1) \le f(q_2)$. Отображение f – монотонное, $r(Q) \ge \omega(Q,2)$.

Покажем теперь, что каждое отображение $\varphi \in Mon(Q, C_2)$ индуцирует правильную расцветку вершин множества Q. Пусть $Q_1 = \{q \in Q \mid \varphi(q) = 1\}$, а $Q_2 = \{q \in Q \mid \varphi(q) =$

$2\}$, где $\{1 < 2\} = C_2$. Объявим все $q \in Q_1$ черными, а все $q \in Q_2$ светлыми. Элементарно проверяется, что Q_1 представляет собой объединение идеалов своих максимальных элементов, а Q_2 – объединение фильтров своих минимальных элементов, то есть такая расцветка является допустимой, $r(Q) \le \omega(Q, 2)$. Из $r(Q) \le \omega(Q, 2)$ и $r(Q) \le \omega(Q, 2)$ следует, что $r(Q) = \omega(Q, 2)$.

Число всевозможных расцветок, в которых вершина q – черная, равняется числу расцветок упорядоченного множества $Q \setminus I(q)$, то есть $r((Q) \setminus I(q)) = \omega(Q \setminus I(q), 2)$.

Вероятность $P(A)$ события $A = \{$вершина q -черная$\}$ вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{\omega(Q \setminus I(q), 2)}{\omega(Q, 2)}, \qquad (1)$$

если $Q \setminus I(q) = \varnothing$, в противном случае $P(A) = \dfrac{1}{\omega(Q, 2)}$.

Вероятность события $\overline{A} = \{$вершина q – светлая$\}$ получается из предыдущей формулы заменой порядкового идеала на порядковый фильтр $F(q)$.

Через порядковые многочлены соответствующих частично-упорядоченных множеств можно выразить условные вероятности событий типа B, $B = \{$вершина q – черная при условии, что все вершины Q_1 являются окрашенными в черный цвет, а все вершины Q_2 – светлые$\}$, $Q_1, Q_2 \subseteq Q$. Число упорядоченных множеств, в которых вершина q и подмножества Q_1, Q_2 имеют фиксированный цвет равняется числу различных расцветок нерасцвеченной части $Q \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup I(q))$ частично-упорядоченного множества Q.

Условные вероятности таких событий выражаются формулой:

$$P(B) = \frac{\omega(Q \setminus Q_1 \cup Q_2 \cup J), 2)}{\omega(Q \setminus (Q_1 \cup Q_2), 2)}, \qquad (2)$$

где J в зависимости от цвета вершины q обозначает либо $I(q)$, либо $F(q)$; Q_1, Q_2 – упорядоченные множества различной расцветки, а $Q \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup J) \neq \varnothing$. Если $Q \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup J) = \varnothing$, а $Q \setminus (Q_1 \cup Q_2) \neq \varnothing$, то $P(B) = \dfrac{1}{\omega(Q \setminus (Q_1 \cup Q_2), 2)}$.

Рассмотрим теперь метод вычисления порядкового многочлена произвольного частично упорядоченного множества. Этот метод излагается по [1].

Обозначим через l_k число монотонных сюръективных отображений из P в C_k.

Теорема 1. Для любого непустого множества P, $|P| = n$

$$\omega(P, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{k!} [x]_k .$$

Здесь, через $[x]_k$ обозначен убывающий факториал степени k,

$[x]_k = x \times (x - 1) \times \ldots \times (x - k + 1).$

Обозначим элементы упорядоченного множества P таким образом, чтобы цепь $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ давала некоторое продолжение порядка на P, то есть $a_i < a_j \Rightarrow i < j$. Каждому полному продолжению $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_n}$ порядка в P сопоставим перестановку $(i_1 i_2 \ldots i_n)$. Пусть $E(P)$ – множество всех таких перестановок $|E(P)| = l(P)$. По построению в $E(P)$ всегда есть тождественная перестановка $(1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 2. Пусть P – конечное упорядоченное множество и $|P| = n$. Для каждого отображения $f \in Mon(P, C_x)$ существует единственная перестановка $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in E(P)$ такая, что

(a) $f(a_{i_1}) \le f(a_{i_2}) \le \ldots \le f(a_{i_n}))$,

(b) $i_s > i_{s+1} \Rightarrow f(a_{i_s}) < f(a_{i_{s+1}})$.

И наоборот, любое отображение $f : P \to C_N$ удовлетворяющее условиям (a) и (b) для некоторой перестановки $\pi \in E(P)$, монотонно.

Эта теорема – ключевой результат, позволяющий вычислить коэффициенты l_k порядкового многочлена $\omega(P, x)$. Спуском в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ называется пара i_s, i_{s+1} для которой выполняется неравенство $i_s > i_{s+1}$.

Для $k = 0, \ldots, n-1$ положим $v_k = |\{$перестановки в $E(P)$, у которых ровно k спусков$\}|$. Так как только у тождественной перестановки нет спусков, то $v_0 = 1$.

Теорема 3. Пусть P – конечное y -множество, а l_k и v_k определены также, как и прежде. Тогда $l_k = \sum_{j=0}^{n-1} v_j \binom{n-1-j}{n-k}$.

Подставляя значения l_k в выражение порядкового многочлена из теоремы 1, получим следующую формулу $\omega(P, x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{x+n-1-j}{n} v_j$.

Для любого P и двухэлементной цепи $\omega(P, 2) = n + 1 + v_1$, (3)

где $n = |P|$, а v_1 - количество перестановок, принадлежащих $E(P)$ и имеющих ровно один спуск.

Например, для частично упорядоченного множества P, изображенного на рис. 6, $E(P) = \{12345, 12354, 13245, 13524, 13254\}$. Следовательно, $v_0 = 1, v_1 = 3$ (в $E(P)$ содержится три перестановки, имеющие ровно один спуск). По формуле (3)

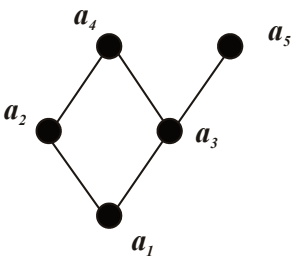

Рис. 6. Частично-упорядоченное множество P

$\omega(P, 2) = 6 + 3 = 9$, то есть существует девять различных монотонных отображения упорядоченного множества P на двухэлементную цепь $\{1 < 2\}$.

На рис.7 представлены все допустимые расцветки упорядоченного множества P. Под каждой расцветкой приведена запись монотонного отображения на цепь $\{1 < 2\}$, ядром которого является данная расцветка.

По формулам (1) – (3) можно подсчитать вероятности различных ходов природы в игре $\Gamma(Q)$. Каждая конечная вершина t_i дерева игры соединяется с начальной единственной цепью, ребра которой соответствуют ходам игрока 1 и игрока 2**.** Так как все ходы природы являются независимыми событиями, то вероятность того, что игра окончится в данной вершине $P(\tau, t_i)$ равняется произведению вероятностей всех ходов игрока 2, входящих в эту цепь.

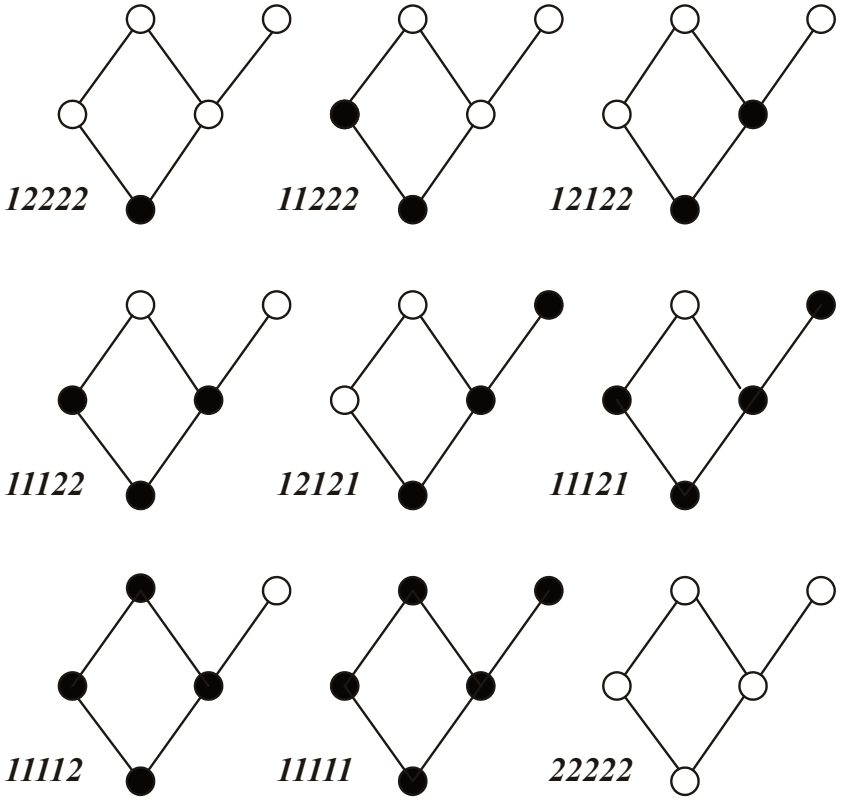

Рис. 7. Допустимые расцветки упорядоченного множества P

На рис.8 изображен фрагмент игры $\Gamma(Q)$, для Q представленного на рис. 6 и стратегии игрока 1 – $a = \| a_1 \| a_4 \| a_5 \| a_2 \| a_3 \|$. Первый ход игрока 1 состоит в выборе вершины a_1, второй – a_4 и т.д. Конечные вершины обозначены через $t_1 - t_9$. Каждое ребро взвешено значением вероятности, соответствующего хода природы, подсчитанной по формулам (1) – (3). Математическое ожидание выигрыша игрока 1, который выбрал стратегию a, можно рассчитать по формуле: $W(a) = \sum_{i=1}^{g} P(a, t_i) \cdot W(t_i) = \frac{35}{9}$.

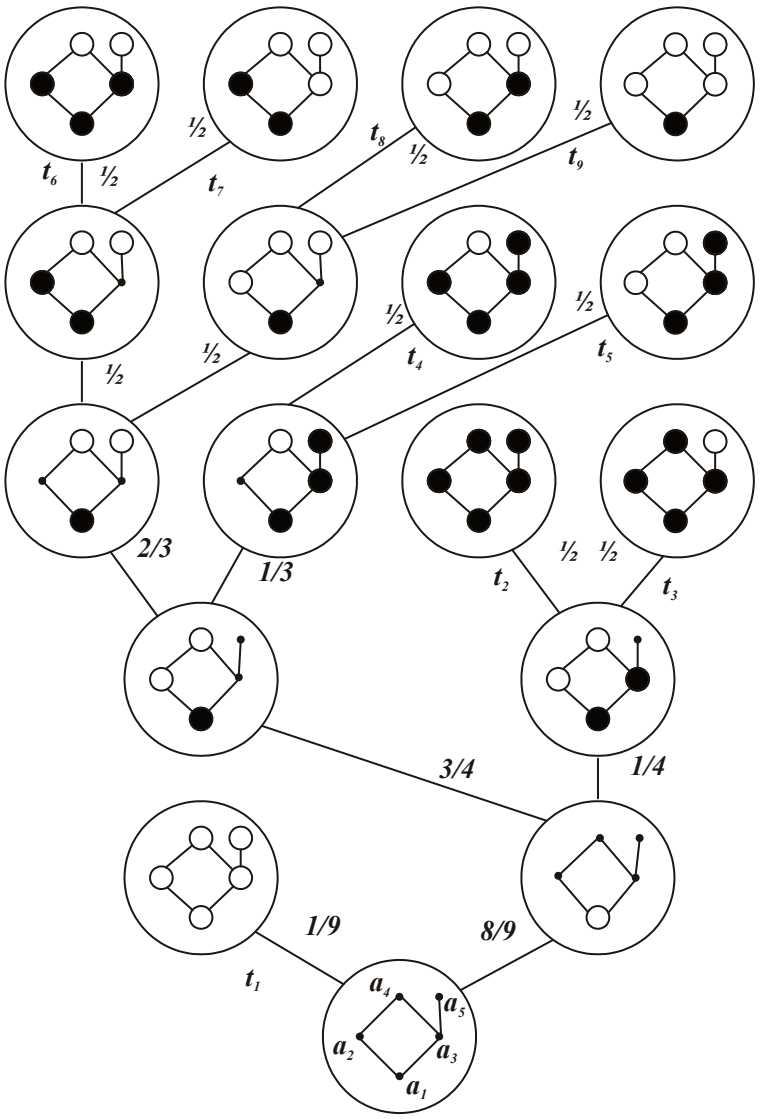

Рис. 8. Фрагмент игры для фиксированной стратегии игрока 1

Выводы

Моделирование геометрических связей – это сложная задача, с которой сталкиваются инженеры в различных отраслях техники и технологии (логистика, конструкторский уровень проектирования радиоэлектронной аппаратуры, технологическая подготовка механосборочного производства и др.). В наиболее концентрированном виде она возникает при сборке некоторых классов машин и механических приборов, где эта задача называется задачей доступа.

В работе предлагается новый подход к моделированию геометрических связей, позволяющий минимизировать число проверок геометрической разрешимости. Проблема доступа формулируется как неантагонистическая позиционная игра двух лиц (ЛПР и природы) с нулевой суммой. Эта игра заключается в раскраске частично-упорядоченного множества за минимальное число ходов.

Предложена оптимальная стратегия игры $\Gamma(C)$ для линейно-упорядоченных множеств C. Для частичных порядков общего вида Q сформулированы все элементы игры $\Gamma(Q)$:

правила выбора ходов первого и второго игроков, стартовая позиция, терминальные позиции, функция выигрыша, схема рандомизации.

Список литературы

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 560 с.
2. Бабушкин А.И., Башта А.А., Белов А.И., Душин Б.И. Оптимизация последовательности сборки // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №9. – с. 77-82.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
4. Божко А.Н. Теоретико-решеточные методы синтеза оптимальной последовательности сборки изделия // Системы автоматизированного проектирования (САПР-85): Тез. докладов Московской городской конференции. – М., 1986. – с. 26-30
5. Диалоговое проектирование технологических процессов / Н.М. Капустин, В.В. Павлов, Л.А. Козлов и др. – М.: Машиностроение, 1983. – 255 с.
6. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
7. Куммер Б. Игры на графах. – М.: Мир, 1982. – 112 с.
8. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.– 232 с.
9. Павлов В.В. Основы автоматизации проектирования технологических процессов сборки летательных аппаратов: Учебное пособие. – М.: Издательство МАТИ, 1975. – 98 с.
10. Плотко В.П. Определение последовательности сборки сборочных единиц // Автоматизированное проектирование технических систем и процессов. – Минск: ИТК АН БССР, 1979. – с. 11-14.
11. Своятыцкий Д.А. Моделирование процессов сборки в робототехнических комплексах. – Минск: Наука и техника, 1983. – 93 с.
12. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М: Наука, 1975. – 256 с.