УДК 004.3 +519.6

В.А. Овчинников

Операции над ультра- и гиперграфами для реализации процедур анализа и синтеза структур сложных систем

(продолжение, начало смотри «Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009 – № 10»).

Во второй части статьи рассмотрены операции стягивания ребер и подразбиения ребра ультра- и гиперграфа, удаления вершины из образов и прообразов заданного множества ребер, удаления ребра из образов и прообразов заданного множества вершин и формирования части графа.

Операции стягивания и подразбиения ребра необходимы, например, для снижения размера входа задачи при анализе планарности графа и изменения структуры объекта с целью улучшения характеристик его функционирования (увеличения пропускной способности, согласования параметров компонентов и соединений и т. п.).

Операции удаления вершин и ребер из образов и прообразов обеспечивают изменение логики функционирования объекта. Операция формирования части графа осуществляет выделение фрагмента структуры объекта для снижения размерности задач анализа при блочно-иерархическом проектировании.

Стягивание рёбер u_f и u_k ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 7**.** Соответствует проектной операции соединения двух цепей.

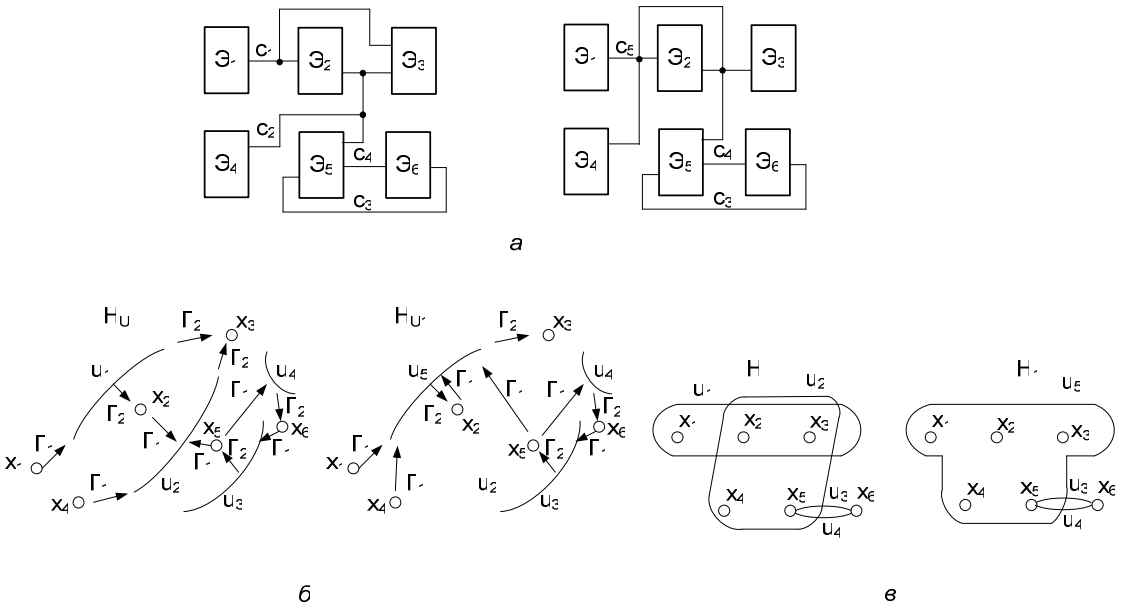


Рисунок 7 – Фрагмент схемы до и после соединения цепей c_1 и c_2 (*а*), ее модель в виде ультраграфа H_U и результат H_{U1} стягивания рёбер u_1 и u_2 (*б*), гиперграф схемы H и результат операции H_1 (*в*)

Задаются имена стягиваемых рёбер u_f, u_k и заменяющего их ребра u_t.

Обозначение операции: $\Game(H_U(X, U), u_f, u_k, u_t)$ для ультраграфа и $\Game(H(X, U), u_f, u_k, u_t)$ для гиперграфа.

Условие корректности операции: $u_f, u_k \in U$.

В результате выполнения операции получаем ультра- или гиперграф

$H_{U1}(X_1, U_1) = \Game(H_U(X, U), u_f, u_k, u_t)$ или

$H_1(X_1, U_1) = \Game(H(X, U), u_f, u_k, u_t)$.

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом $H_U(X, U)$.

Для получения ультраграфа $H_{U1}(X_1, U_1)$:

1. Копируем множество X под именем X_1: $X_1 = X$.

2. Формируем множество рёбер U_1, исключая из множества U рёбра u_f и u_k и добавляя в него ребро u_t: $U_1 = \{U \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t\}$.

3. Получаем множество образов вершин $\Gamma_1 X_1$, занося в него $\Gamma_1 x_i$ из множества $\Gamma_1 X$, если рёбра u_f и u_k не инцидентны вершине x_i, в противном случае:

– удаляя из $\Gamma_1 x_i$ ребро u_f и добавляя ребро u_t, если вершине x_i инцидентно ребро u_f,

– удаляя из $\Gamma_1 x_i$ ребро u_k и добавляя ребро u_t, если вершине x_i инцидентно ребро u_k,

– удаляя из $\Gamma_1 x_i$ рёбра u_f и u_k и добавляя ребро u_t, если оба ребра инцидентны этой вершине:

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i / x_i \in X_1\}$, здесь

$$\Gamma_1 x_i = \begin{cases} \Gamma_1 x_i, \text{ если } x_i \notin \Gamma_1 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_1 u_k, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_f \bullet u_t, \text{ если } x_i \in \Gamma_1 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_1 u_k, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_k \bullet u_t, \text{ если } x_i \in \Gamma_1 u_k \,\&\, x_i \notin \Gamma_1 u_f, \\ \Gamma_1 x_i \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t, \text{ если } x_i \in \Gamma_1 u_k \,\&\, x_i \in \Gamma_1 u_f, \end{cases}$$

где $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_1 u_f, \Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U$.

Приведенные для $\Gamma_1 x_i$ выражения очевидны и просты для понимания. Однако их целесообразно записать в более компактном виде, а именно:

$$\Gamma_1 x_i = \begin{cases} \Gamma_1 x_i : x_i \notin \Gamma_1 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_1 u_k, \\ \Gamma_1 x_i \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : x_i \in \{\Gamma_1 u_f \cup \Gamma_1 u_k\}. \end{cases}$$

В дальнейшем аналогичные по смыслу выражения будем записывать таким же образом.

4. Формируем множество прообразов вершин $\Gamma_2 X_1$, занося в него $\Gamma_2 x_i$ из множества $\Gamma_2 X$, если рёбра u_f и u_k не являются рёбрами, которым инцидентна вершина x_i, в противном случае:

– удаляя из $\Gamma_2 x_i$ ребро u_f и добавляя ребро u_t, если ребру u_f инцидентна вершина x_i,

– удаляя из $\Gamma_2 x_i$ ребро u_k и добавляя ребро u_t, если ребру u_k инцидентна эта вершина,

– удаляя из $\Gamma_2 x_i$ рёбра u_f и u_k и добавляя ребро u_t, если вершина инцидентна этим рёбрам:

$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i / x_i \in X_1\}$, здесь

$$\Gamma_2 x_i = \begin{cases} \Gamma_2 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_2 u_k, \\ \Gamma_2 x_i \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : x_i \in \{\Gamma_2 u_f \cup \Gamma_2 u_k\}, \end{cases}$$

где $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X, \Gamma_2 u_f, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$.

5. Формируем множество образов и прообразов рёбер $\Gamma_2 U_1$ и $\Gamma_1 U_1$, копируя их из $\Gamma_2 U$ и $\Gamma_1 U$, исключая при этом $\Gamma_2 u_f$, $\Gamma_2 u_k$ и $\Gamma_1 u_f$, $\Gamma_1 u_k$ и добавляя образ $\Gamma_2 u_t$ и прообраз $\Gamma_1 u_t$ нового ребра u_t соответственно:

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 U \setminus \{\Gamma_2 u_f, \Gamma_2 u_k\} \bullet \Gamma_2 u_t\}$,

где $\Gamma_2 u_t = \Gamma_2 u_f \cup \Gamma_2 u_k$, $\Gamma_2 u_f$ и $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$;

$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 U \setminus \{\Gamma_1 u_f, \Gamma_1 u_k\} \bullet \Gamma_1 u_t\}$,

где $\Gamma_1 u_t = \Gamma_1 u_f \cup \Gamma_1 u_k$, $\Gamma_1 u_f$ и $\Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U$.

6. Создаем множество образов $F_1 X_1$ вершин X_1 относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$,

– копируя образ $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершине x_i не инцидентны рёбра u_f и u_k или инцидентны оба,

– определяя образ вершины как объединение её образа $F_1 x_i \in F_1 X$ и множества $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$ вершин, которые инцидентны ребру u_k, если вершине x_i инцидентно ребро u_f,

– объединяя её образ и множество $\Gamma_2 u_f \in \Gamma_2 U$ вершин, которые инцидентны ребру u_f, если вершине x_i инцидентно ребро u_k:

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, где

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_i \notin \Gamma_1 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_1 u_k \vee x_i \in \Gamma_1 u_f \,\&\, x_i \in \Gamma_1 u_k, \\ F_1 x_i \cup \Gamma_2 u_k : x_i \in \Gamma_1 u_f, \\ F_1 x_i \cup \Gamma_2 u_f : x_i \in \Gamma_1 u_k, \end{cases}$$

где $F_1 x_i \in F_1 X$, $\Gamma_1 u_f$ и $\Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U$, $\Gamma_2 u_f$ и $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$.

7. Получаем множество прообразов $F_1^{-1} X_1$ вершин X_1 относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$,

– копируя прообраз $F_1^{-1} x_i$ из $F_1^{-1} X$, если вершина x_i не инцидентна рёбрам u_f и u_k или инцидентна тому и другому,

– определяя прообраз вершины как объединение её прообраза $F_1^{-1} x_i \in F_1^{-1} X$ и множества $\Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U$ вершин, которым инцидентно ребро u_k, если вершина x_i инцидентна ребру u_f,

– объединяя её прообраз и множество $\Gamma_1 u_f \in \Gamma_1 U$ вершин, которым инцидентно ребро u_f, если вершина x_i инцидентна ребру u_k:

$F_1^{-1} X_1 = \{F_1^{-1} x_i / x_i \in X_1\}$, где

$$F_1^{-1} x_i = \begin{cases} F_1^{-1} x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_f \,\&\, x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee x_i \in \Gamma_2 u_f \,\&\, x_i \in \Gamma_2 u_k, \\ F_1^{-1} x_i \cup \Gamma_1 u_k : x_i \in \Gamma_2 u_f, \\ F_1^{-1} x_i \cup \Gamma_1 u_f : x_i \in \Gamma_2 u_k, \end{cases}$$

где $F_1^{-1} x_i \in F_1^{-1} X$, $\Gamma_2 u_f$ и $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$, $\Gamma_1 u_f$ и $\Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U$.

8. Формируем множество образов $F_2 U_1$ рёбер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$. При $j \neq t$:

– копируя $F_2 u_j$ из множества $F_2 U$, если ребру u_j не смежны рёбра u_f и u_k,

– удаляя из $F_2 u_j \in F_2 U$ ребро u_f или ребро u_k, если ребру u_j смежно ребро u_f или u_k соответственно, и добавляя ребро u_t,

– удаляя из $F_2 u_j \in F_2 U$ рёбра u_f и u_k и добавляя ребро u_t, если ребру u_j смежны рёбра u_f и u_k,:

$F_2 U_1 = \{F_2 u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j : u_f \notin F_2 u_j \,\&\, u_k \notin F_2 u_j, \\ F_2 u_j \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : u_f \in F_2 u_j \vee u_k \in F_2 u_j, \end{cases}$$

где $F_2 u_j \in F_2 U$.

Образ ребра u_t будет:

$F_2 u_t = \{F_2 u_f \cup F_2 u_k\}$, если u_f и u_k не смежны, и $F_2 u_t = \{F_2 u_f \cup F_2 u_k\} \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t$, если они смежны, т. е. $u_f \in F_2 u_k \vee u_k \in F_2 u_f \vee u_f \in F_2 u_k \,\&\, u_k \in F_2 u_f$.

9. Создаем множество $F_2^{-1} U_1$ прообразов ребер U_1. При $j \neq t$:

– копируя $F_2^{-1} u_j$ из множества $F_2^{-1} U$, если ребро u_j не смежно ни ребру u_f, ни ребру u_k,

– удаляя из $F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U$ ребро u_f или ребро u_k, если ребро u_j смежно ребру u_f или u_k соответственно, и добавляя ребро u_t,

– удаляя из $F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U$ рёбра u_f и u_k и добавляя ребро u_t, если ребро u_j смежно рёбрам u_f и u_k:

$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j : u_f \notin F_2^{-1}u_j \;\&\; u_k \notin F_2^{-1}u_j, \\ F_2^{-1}u_j \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : u_f \notin F_2^{-1}u_j \vee u_k \notin F_2^{-1}u_j, \end{cases}$$

где $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$.

Прообраз ребра u_t будет:

$F_2^{-1}u_t = \{F_2^{-1}u_f \cup F_2^{-1}u_k\}$, если рёбра u_f и u_k не смежны, и

$F_2^{-1}u_t = \{F_2^{-1}u_f \cup F_2^{-1}u_k\} \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t$, если они смежны.

Формальное описание операции над гиперграфом H (X, U).

Множества гиперграфа H_1 (X_1, U_1) определяются как:

$X_1 = X$; $U_1 = \{U \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t\}$;

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_f \;\&\; x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee \Gamma_1 x_i \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : x_i \in \{\Gamma_2 u_f \cup \Gamma_2 u_k\} / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 u_f, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U\}$;

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 U \setminus \{\Gamma_2 u_f, \Gamma_2 u_k\} \bullet \Gamma_2 u_t\}$, где $\Gamma_2 u_t = \Gamma_2 u_f \cup \Gamma_2 u_k$, $\Gamma_2 u_f$ и $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$;

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, здесь

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_f \;\&\; x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee x_i \in \Gamma_2 u_f \;\&\; x_i \in \Gamma_2 u_k, \\ F_1 x_i \cup \Gamma_2 u_k : x_i \in \Gamma_2 u_f, \\ F_1 x_i \cup \Gamma_2 u_f : x_i \in \Gamma_2 u_k, \end{cases}$$

где $F_1 x_i \in F_1 X$, $\Gamma_2 u_f$ и $\Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$.

$F_2 U_1 = \{F_2 u_j / u_j \in U_1\}$, здесь для $j \neq t$

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j : u_f \notin F_2 u_j \;\&\; u_k \notin F_2 u_j, \\ F_2 u_j \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t : u_f \in F_2 u_j \vee u_k \in F_2 u_j, \end{cases}$$

где $F_2 u_j \in F_2 U$.

Образ ребра u_t будет:

$$F_2 u_t = \begin{cases} \{F_2 u_f \cup F_2 u_k\} : u_f \notin F_2 u_k \;\&\; u_k \notin F_2 u_f, \\ \{F_2 u_f \cup F_2 u_k\} \setminus \{u_f, u_k\} : u_f \in F_2 u_k \; (u_k \in F_2 u_f). \end{cases}$$

С процедурной точки зрения образ ребра u_t целесообразно определять по формуле:

$F_2u_t = \{F_2u_f \cup F_2u_k\} \setminus \{u_f, u_k\}$ (смотри примечание 1 в операции «удаление вершины»).

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции над ультра- и гиперграфом такая же, как и операции добавления ребра.

Операция может выполняться над куском ультра- или гиперграфа. Если оба стягиваемые ребра внутренние, то в п. 2 определяется

$$U_1{}^{к}{}_{int} = \{U^{к}{}_{int} \setminus \{u_f, u_k\} \bullet u_t\} \text{ и } U_1{}^{к}{}_{ext} = U^{к}{}_{ext}.$$

Если хотя бы одно из этих рёбер является внешним, должна быть задана информация о виде заменяющего ребра и соответствующим образом сформированы $U_1{}^{к}{}_{int}$ и $U_1{}^{к}{}_{ext}$.

Пример. Выполним соединение цепей c_1 и c_2 в цепь c_4 в схеме, показанной на рис. 7, *а*. В результате операции $H_{U1}(X_1, U_1) = \fdownarrow(H_U(X, U), u_f, u_k, u_t)$ стягивания ребер u_1 и u_2 ультраграфа схемы, изображенной на рис. 7, *б*, получим

$X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$;

$U_1 = U \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5\} = \{u_3, u_4, u_5\}$;

Γ_1X_1: $\Gamma_1x_1 = \{u_1\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_2 = \{u_2\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_3 = \varnothing$; $\Gamma_1x_4 = \{u_2\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_5 = \{u_2, u_4\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_4, u_5\}$, $\Gamma_1x_6 = \{u_3\}$;

Γ_2X_1: $\Gamma_2x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2x_2 = \{u_1\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_2x_3 = \{\{u_1, u_2\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5\} = \{u_5\}$, $\Gamma_2x_4 = \varnothing$, $\Gamma_2x_5 = \{u_3\}$ $\Gamma_1x_6 = \{u_4\}$;

$\Gamma_1U_1 = \{\Gamma_1u_3, \Gamma_1u_4, \Gamma_1u_5\}$, где $\Gamma_1u_5 = \{x_1\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$;

$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_3, \Gamma_2u_4, \Gamma_2u_5\}$, где $\Gamma_2u_5 = \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$;

F_1X_1: $F_1x_1 = \{x_2, x_3\} \cup \{x_3\} = \{x_2, x_3\}$, $F_1x_2 = \{x_3\} \cup \{x_2, x_3\} = \{x_3, x_2\}$, $F_1x_3 = \varnothing$, $F_1x_4 = \{x_3\} \cup \{x_2, x_3\} = \{x_3, x_2\}$, $F_1x_5 = \{x_3, x_6\} \cup \{x_2, x_3\} = \{x_3, x_6, x_2\}$, $F_1x_6 = \{x_5\}$;

$F_1{}^{-1}X_1$: $F_1{}^{-1}x_1 = \varnothing$, $F_1{}^{-1}x_2 = \{x_1\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, $F_1{}^{-1}x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, $F_1{}^{-1}x_4 = \varnothing$, $F_1{}^{-1}x_5 = \{x_6\}$, $F_1{}^{-1}x_6 = \{x_5\}$;

F_2U_1: $F_2u_3 = \{u_2, u_4\} \setminus \{u_1, u_2\}\} \bullet u_5 = \{u_4, u_5\}$, $F_2u_4 = \{u_3\}$, $F_2u_5 = \{u_5\}$;

$F_2^{-1}U_1$: $F_2^{-1}u_3 = \{u_4\}$, $F_2^{-1}u_4 = \{u_3\}$, $F_2^{-1}u_5 = \{u_5\}$.

Для гиперграфа той же схемы, представленного на рис. 7, *в*, после операции $H_1(X_1, U_1) = \fbox{|}(H(X, U), u_f, u_k, u_t)$ получим:

$X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$;

$U_1 = U \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5\} = \{u_3, u_4, u_5\}$;

Γ_1X_1: $\Gamma_1x_1 = \{u_1\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_2 = \Gamma_1x_3 = \{u_1,u_2\} \setminus \{u_1,u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_4 = \{u_2\} \setminus \{u_1,u_2\} \bullet u_5 = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_5 = \{u_2, u_3, u_4\} \setminus \{u_1,u_2\} \bullet u_5 = \{u_3, u_4, u_5\}$, $\Gamma_1x_6 = \{u_3, u_4\}$;

$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_3, \Gamma_2u_4, \Gamma_2u_5\}$, где $\Gamma_2u_5 = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

F_1X_1: $F_1x_1 = \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $F_1x_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$, $F_1x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, $F_1x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, $F_1x_5 = \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_6\} = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$, $F_1x_6 = \{x_5\}$.

F_2U_1: $F_2u_3 = \{u_2, u_4\} \setminus \{u_1, u_2\}\} \bullet u_5 = \{u_4, u_5\}$, $F_2u_4 = \{u_2, u_3\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet u_5 = \{u_3, u_5\}$, $F_2u_5 = \{\{u_2\} \cup \{u_1, u_3, u_4\}\} \setminus \{u_1, u_2\} = \{u_3, u_4\}$.

Подразбиение ребра u_k ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 8. Соответствует проектной операции разрыва цепи и подключения двух новых к вводимому элементу.

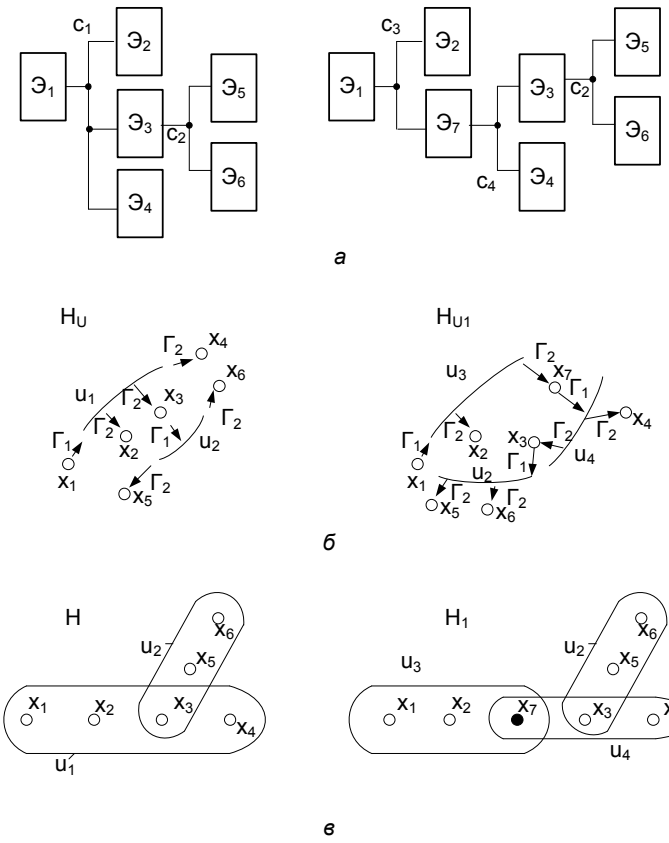


Рисунок 8 – Исходная схема до и после введения элемента $э_7$ в цепь c_1 (*а*), ее модель в виде ультраграфа H_U и результат H_{U1} выполнения операции подразбиения ребра u_1 (*б*), гиперграф схемы H и результат той же операции H_1 (*в*)

Осуществляется введением вершины, образуются два новых ребра u_r и u_t. Задаются разбиваемое ребро u_k, вводимая вершина x_f, имена новых ребер u_r и u_t, а также:

- для ультраграфа указываются: ребро, инцидентное вершине x_f, и ребро, которому она инцидентна, например, $\Gamma_1 x_f = u_r$ и $\Gamma_2 x_f = u_t$; $X_r^+ = \Gamma_2 u_r$ и $X_t^+ = \Gamma_2 u_t$ – вершины, инцидентные ребрам u_r и u_t соответственно; $X_r^- = \Gamma_1 u_r$ и $X_t^- = \Gamma_1 u_t$ – вершины, которым инцидентны указанные ребра;
- для гиперграфа указываются подмножества $X_r = \Gamma_2 u_r$ и $X_t = \Gamma_2 u_t$ вершин, инцидентных ребрам u_r и u_t.

Обозначение операции:

$\Vdash (H_U (X, U), u_k, x_f, u_r, X_r^+, X_r^-, u_t, X_t^+, X_t^-)$для ультраграфа и

$\Vdash (H (X, U), u_k, x_f, u_r, X_r, u_t, X_t)$ для гиперграфа.

Условие корректности операции:

- для ультраграфа – $u_k \in U$; $X_r^+ \cap X_t^+ = \varnothing$; $X_r^+ \cup X_t^+ = \Gamma_2 u_k \bullet x_f$; $X_r^- \cap X_t^- = \varnothing$; $X_r^- \cup X_t^- = \Gamma_1 u_k \bullet x_f$; $X_r^+ \cap X_t^- \vee X_r^- \cap X_t^+ = x_f$;
- для гиперграфа – $u_k \in U$, $X_r \cup X_t = \Gamma_2 u_k \bullet x_f$; $X_r \cap X_t = x_f$.

В результате выполнения операции получаем:

– ультраграф $H_{U1}(X_1, U_1) = \Vdash (H_U(X, U), u_k, x_f, u_r, X_r^+, X_r^-, u_t, X_t^+, X_t^-)$ или

– гиперграф $H_1(X_1, U_1) = \Vdash (H(X, U), u_k, x_f, u_r, X_r, u_t, X_t)$.

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом $H_U(X, U)$.

Для получения ультраграфа $H_{U1}(X_1, U_1)$:

1. Определяем множество X_1, добавляя в X вершину x_f: $X_1 = X \bullet x_f$.

2. Формируем множество рёбер U_1, исключая из множества U ребро u_k и добавляя в него рёбра u_r и u_t: $U_1 = U \setminus u_k \bullet \{u_r, u_t\}$.

3. Получаем множество образов $\Gamma_1 X_1$, копируя $\Gamma_1 x_i$ из множества $\Gamma_1 X$, если ребро u_k не инцидентно вершине x_i. Если вершине x_i инцидентно одно из новых рёбер, то из ее образа в $\Gamma_1 X$ исключаем ребро u_k и добавляем то, которое ей инцидентно в соответствии с исходными данными операции, т. е. u_r или u_t. Образ вводимой вершины x_f – $\Gamma_1 x_f$:

$$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i / x_i \in X_1\}, \text{ где}$$

$$\Gamma_1 x_i = \begin{cases} \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X : x_i \notin \Gamma_1 u_k, \text{ где } \Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_k \bullet u_r : x_i \in \Gamma_1 u_r, \text{ где } \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_k \bullet u_t : x_i \in \Gamma_1 u_t, \text{ где } \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \\ \Gamma_1 x_f : x_i = x_f. \end{cases}$$

4. Формируем множество прообразов $\Gamma_2 X_1$, копируя $\Gamma_2 x_i$ из множества $\Gamma_2 X$, если вершина не инцидентна ребру u_k. Если вершина инцидентна одному из новых рёбер, то из ее прообраза в $\Gamma_2 X$ исключаем ребро u_k и добавляем то, которому она инцидентна. Прообраз вводимой вершины x_f – $\Gamma_2 x_f$:

$$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i / x_i \in X_1\}, \text{ где}$$

$$\Gamma_2 x_i = \begin{cases} \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X : x_i \notin \Gamma_2 u_k, \text{ где } \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U, \\ \Gamma_2 x_i \setminus u_k \bullet u_r : x_i \in \Gamma_2 u_r, \text{ где } \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X, \end{cases}$$

$$\Gamma_2 x_i = \begin{cases} \Gamma_2 x_i \setminus u_k \bullet u_t : x_i \in \Gamma_2 u_t, \text{ где } \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X, \\ \Gamma_2 x_f : x_i = x_f. \end{cases}$$

5. Создаем множества образов $\Gamma_2 U_1$ и прообразов $\Gamma_1 U_1$ рёбер, копируя их из $\Gamma_2 U$ и $\Gamma_1 U_1$, исключая при этом $\Gamma_2 u_k$ и $\Gamma_1 u_k$ и добавляя в соответствующие множества образы и прообразы новых рёбер u_r и u_t:

$\Gamma_2 U_1 = \Gamma_2 U \setminus \Gamma_2 u_k \bullet \{\Gamma_2 u_r, \Gamma_2 u_t\}$, где $\Gamma_2 u_r = X_r^+$, $\Gamma_2 u_t = X_t^+$;

$\Gamma_1 U_1 = \Gamma_1 U \setminus \Gamma_1 u_k \bullet \{\Gamma_1 u_r, \Gamma_1 u_t\}$, где $\Gamma_1 u_r = X_r^-$, $\Gamma_1 u_t = X_t^-$.

6. Определяем множество образов $F_1 X_1$ вершин X_1 для чего для $x_i \neq x_f$:

– копируем $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершине x_i не инцидентно ребро u_k,

– удаляем из $F_1 x_i$ множество вершин, инцидентных ребру u_k, и добавляем множество вершин, инцидентных ребру u_r, если вершине x_i инцидентно ребро u_r,

– удаляем из $F_1 x_i$ множество вершин, инцидентных ребру u_k, и добавляем множество вершин, инцидентных ребру u_t, если вершине x_i инцидентно это ребро.

При $x_i = x_f$ записываем в $F_1 x_f$ множество вершин, инцидентных ребру u_r, если оно инцидентно вводимой вершине, или ребру u_t, если данное ребро инцидентно этой вершине:

$$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}, \text{ здесь для } i \neq f$$

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i \in F_1 X : x_i \notin \Gamma_1 u_k, \text{ где } \Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U, \\ \{F_1 x_i \setminus \Gamma_2 u_k\} \bullet \Gamma_2 u_r : x_i \in \Gamma_1 u_r, \text{ где } F_1 x_i \in F_1 X, \\ \{F_1 x_i \setminus \Gamma_2 u_k\} \bullet \Gamma_2 u_t : x_i \in \Gamma_1 u_t, \text{ где } F_1 x_i \in F_1 X, \end{cases}$$

$$F_1 x_f = \Gamma_2 u_r : \Gamma_1 x_f = u_r \vee \Gamma_2 u_t : \Gamma_1 x_f = u_t.$$

7. Создаем множество прообразов $F_1^{-1} X_1$ вершин X_1 для чего:

– копируем $F_1^{-1} x_i$ из $F_1^{-1} X$, если вершине x_i не смежно ребро u_k,

– удаляем из $F_1^{-1} x_i$ множество вершин, которым инцидентно ребро u_k, и добавляем множество вершин, которым инцидентно ребро u_r, если вершина x_i инцидентна ребру u_r,

– удаляем из $F_1^{-1}x_i$ множество вершин, которым инцидентно ребро u_k, и добавляем множество вершин, которым инцидентно ребро u_t, если вершина x_i инцидентна этому ребру,

При $x_i = x_f$ заносим в $F_1^{-1}x_f$ множество вершин, которым инцидентно ребро u_r, если ему инцидентна вводимая вершина, или множество вершин, которым инцидентно ребро u_t, если ему инцидентна вводимая вершина:

$$F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i / x_i \in X_1\}, \text{ здесь для } i \neq f$$

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X : x_i \notin \Gamma_2 u_k, \text{ где } \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U, \\ \{F_1^{-1}x_i \setminus \Gamma_1 u_k\} \bullet \Gamma_1 u_r : x_i \in \Gamma_2 u_r, \text{ где } F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X, \\ \{F_1^{-1}x_i \setminus \Gamma_1 u_k\} \bullet \Gamma_1 u_t : x_i \in \Gamma_2 u_t, \text{ где } F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X, \end{cases}$$

$$F_1^{-1}x_f = \Gamma_1 u_r : \Gamma_2 x_f = u_r \vee \Gamma_1 u_t : \Gamma_2 x_f = u_t.$$

8. Формируем множество образов F_2U_1 ребер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$, для $j \neq r \neq t$:

– копируя F_2u_j из множества F_2U, если ребро u_k не смежно ребру u_j,

– удаляя из $F_2u_j \in F_2U$ ребро u_k и добавляя ребро u_r, если эти рёбра смежны ребру u_j,

– удаляя из $F_2u_j \in F_2U$ ребро u_k и добавляя ребро u_t, если эти рёбра смежны ребру u_j,

– удаляя из $F_2u_j \in F_2U$ ребро u_k и добавляя рёбра u_r, u_t , если все эти рёбра смежны ребру u_j:

$$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\}, \text{ здесь}$$

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_k \notin F_2u_j, \\ \{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet u_r : u_k \in F_2u_j \;\&\; \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_r \neq \varnothing, \\ \{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet u_t : u_k \in F_2u_j \;\&\; \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_t \neq \varnothing, \\ \{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet \{u_r, u_t\} : u_k \in F_2u_j \;\&\; \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_r \neq \varnothing \;\&\; \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_t \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $F_2u_j \in F_2U$.

Рёбра, смежные рёбрам u_r и u_t, определяются по формулам:

$$F_2u_r = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2 u} \Gamma_1 x_i \text{ и } F_2u_t = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2 u_t} \Gamma_1 x_i, \; \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X.$$

9. Определяем множество прообразов $F_2^{-1}U_1$ рёбер множества U_1 относительно предиката смежности F_2 (U_1, U_1), для $j \neq r \neq t$:

– копируя $F_2^{-1}u_j$ из множества $F_2^{-1}U$, если ребру u_k не смежно ребро u_j,

– удаляя из $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$ ребро u_k и добавляя ребро u_r, если этим ребрам смежно ребро u_j,

– удаляя из $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$ ребро u_k и добавляя ребро u_t, если этим ребрам смежно ребро u_j,

– удаляя из $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$ ребро u_k и добавляя ребра u_r, u_t , если всем этим ребрам смежно ребро u_j:

$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j : u_k \notin F_2^{-1}u_j, \\ \{F_2^{-1}u_j \setminus u_k\} \bullet u_r : u_k \in F_2^{-1}u_j \;\&\; \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_r \neq \varnothing, \\ \{F_2^{-1}u_j \setminus u_k\} \bullet u_t : u_k \in F_2^{-1}u_j \;\&\; \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_t \neq \varnothing, \\ \{F_2^{-1}u_j \setminus u_k\} \bullet \{u_r, u_t\} : u_k \in F_2^{-1}u_j \;\&\; \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_r \neq \varnothing \;\&\; \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_t \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$.

Прообразы рёбер u_r и u_t определяются по формулам:

$$F_2^{-1}u_r = \bigcup_{x_i \in \Gamma_1 u_r} \Gamma_2 x_i \text{ и } F_2^{-1}u_t = \bigcup_{x_i \in \Gamma_1 u_t} \Gamma_2 x_i,\ \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X.$$

Формальное описание выполнения операции над гиперграфом.

Множества гиперграфа H_1 (X_1, U_1) получаем по выражениям:

$X_1 = X \bullet x_f$; $U_1 = U \setminus u_k \bullet \{u_r, u_t\}$;

$\Gamma_1 X_1 = (\Gamma_1 x_i / x_i \in X_1\}$, где $\Gamma_1 x_f = \{u_r, u_t\}$ и для $i \neq f$

$$\Gamma_1 x_i = \begin{cases} \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \text{ если } u_k \notin \Gamma_1 x_i, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_k \bullet u_r, \text{ если } u_r \in \Gamma_1 x_i, \text{ где } \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \\ \Gamma_1 x_i \setminus u_k \bullet u_t, \text{ если } u_t \in \Gamma_1 x_i, \text{ где } \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X; \end{cases}$$

$\Gamma_2 U_1 = \Gamma_2 U \setminus \Gamma_2 u_k \bullet \{\Gamma_2 u_r, \Gamma_2 u_t\}$, где $\Gamma_2 u_r = X_r$, $\Gamma_2 u_t = X_t$;

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, здесь $F_1 x_f = X_r \bullet X_t \setminus x_f$ и для $i \neq f$

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i \in F_1 X : x_i \notin \Gamma_2 u_k, \text{ где } \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U, \\ \{F_1 x_i \bullet \Gamma_2 u_r\} \setminus \Gamma_2 u_k : x_i \in \Gamma_2 u_r, \text{ где } F_1 x_i \in F_1 X, \end{cases}$$

$$\lfloor \{F_1x_i \bullet \Gamma_2u_t\} \setminus \Gamma_2u_k : x_i \in \Gamma_2u_t, \text{ где } F_1x_i \in F_1X;$$

$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\}$, здесь для $j \neq r \neq t$

$$F_2u_j = \begin{cases} \lceil F_2u_j : u_k \notin F_2u_j, \\ \lfloor \{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet u_r : u_k \in F_2u_j \ \& \ \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_t = \varnothing, \\ \{\{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet u_t : u_k \in F_2u_j \ \& \ \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_r = \varnothing, \\ \lfloor \{F_2u_j \setminus u_k\} \bullet \{u_r, u_t\} : u_k \in F_2u_j \ \& \ \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_r \neq \varnothing \ \& \ \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_t \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $F_2u_j \in F_2U$.

Рёбра, смежные ребрам u_r и u_t, определяются по формулам:

$$F_2u_r = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_r} \{\Gamma_1x_i \setminus u_r : |\Gamma_2u_r| > 1 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_r| = 1\},$$

$$F_2u_t = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_t} \{\Gamma_1x_i \setminus u_t : |\Gamma_2u_t| > 1 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_t| = 1\}.$$

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции над ультра- и гиперграфом такая же, как и операции добавления ребра.

Операция может быть распространена на кусок ультра- или гиперграфа. Если разбиваемое ребро является внешним, должна быть задана информация о виде новых рёбер и соответствующим образом сформированы ${U_1}^{к}{}_{int}$ и ${U_1}^{к}{}_{ext}$.

Пример. Выполним подразбиение ребра для варианта модификации схемы, показанного на рис. 8, *а*. Тогда для операции подразбиения ребра ультраграфа (смотри рис. 8, *б*) $u_k = u_1$, $x_f = x_7$, $u_r = u_3$, $u_t = u_4$ и $\Gamma_1x_7 = \{u_4\}$, $\Gamma_2x_7 = \{u_3\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_2, x_7\}$, $\Gamma_2u_4 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_1u_3 = \{x_1\}$, $\Gamma_1u_4 = \{x_7\}$.

В результате выполнения $H_{U1}(X_1, U_1) = \Big\Vdash (H_U(X, U), u_k, x_f, u_r, u_t)$ операции получим ультраграф H_{U1}, у которого:

$X_1 = X \bullet x_7 = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$; $U_1 = U \setminus u_1 \bullet \{u_3, u_4\} = \{u_2, u_3, u_4\}$;

Γ_1X_1: $\Gamma_1x_1 = \{u_1\} \setminus \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_3\}$, $\Gamma_1x_2 = \Gamma_1x_4 = \Gamma_1x_5 = \Gamma_1x_6 = \varnothing$, $\Gamma_1x_3 = \{u_2\}$, $\Gamma_1x_7 = \{u_4\}$;

Γ_2X_1: $\Gamma_2x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2x_2 = \{u_1\} \setminus \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_3\}$, $\Gamma_2x_3 = \{u_1\} \setminus \{u_1\} \bullet u_4 = \{u_4\}$, $\Gamma_2x_4 = \{u_1\} \setminus \{u_1\} \bullet u_4 = \{u_4\}$, $\Gamma_2x_5 = \{u_2\}$, $\Gamma_2x_6 = \{u_2\}$, $\Gamma_1x_7 = \{u_3\}$;

$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_2, \Gamma_2u_3, \Gamma_2u_4\}$, где: $\Gamma_2u_2 = \{x_5, x_6\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_2, x_7\}$, $\Gamma_2u_4 = \{x_3, x_4\}$;

$\Gamma_1U_1 = \{\Gamma_1u_2, \Gamma_1u_3, \Gamma_1u_4\}$, где: $\Gamma_1u_2 = \{x_3\}$, $\Gamma_1u_3 = \{x_1\}$, $\Gamma_1u_4 = \{x_7\}$;

F_1X_1: $F_1x_1 = \{x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_2, x_3, x_4\} \bullet \{x_2, x_7\} = \{x_2, x_7\}$, $F_1x_2 = F_1x_4 = F_1x_5 = F_1x_6 = \varnothing$, $F_1x_3 = \{x_5, x_6\}$, $F_1x_7 = \Gamma_2u_4 = \{x_3, x_4\}$;

$F_1^{-1}X_1$: $F_1^{-1}x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1}x_2 = \{x_1\}$, $F_1^{-1}x_3 = F_1^{-1}x_4 = \{x_7\}$, $F_1^{-1}x_5 = F_1^{-1}x_6 = \{x_3\}$, $F_1^{-1}x_7 = \Gamma_1u_3 = \{x_1\}$;

F_2U_1: $F_2u_2 = \varnothing$, $F_2u_3 = \bigcup\limits_{x_i \in \Gamma_2u_3} \Gamma_1x_i = \Gamma_1x_2 \cup \Gamma_1x_7 = \{u_4\}$, $F_2u_4 = \bigcup\limits_{x_i \in \Gamma_2u_4} \Gamma_1x_i =$

$\Gamma_1x_3 \cup \Gamma_1x_4 = \{u_2\}$;

$F_2^{-1}U_1$: $F_2^{-1}u_2 = \{u_1\} \setminus \{u_1\} \bullet \{u_4\} = \{u_4\}$, $F_2^{-1}u_3 = \Gamma_2x_1 = \varnothing$, $F_2^{-1}u_4 = \Gamma_2x_7 = \{u_3\}$.

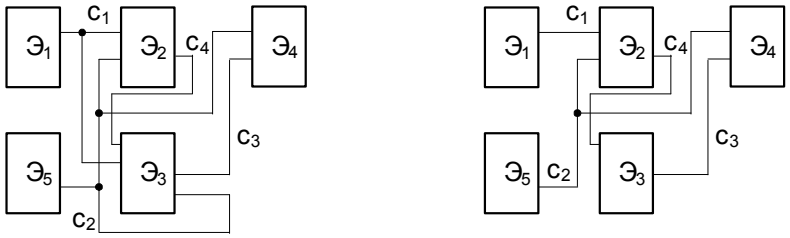
Для гиперграфа показанного на рис. 8, *в*, операция H_1 (X_1, U_1, Γ_1X_1, Γ_2U_1) = ⫦ (H (X, U, Γ_1X, Γ_2U), u_k, x_f, u_r, u_t) подразбиения ребра u_1 на рёбра u_3 и u_4 введением вершины $x_f = x_7$ так, что $X_3 = \Gamma_2u_3 = \{x_1, x_2, x_7\}$ и $X_4 = \Gamma_2u_4 = \{x_3, x_4, x_7\}$, дает гиперграф H_1, у которого:

$X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$; $U_1 = \{u_2, u_3, u_4\}$;

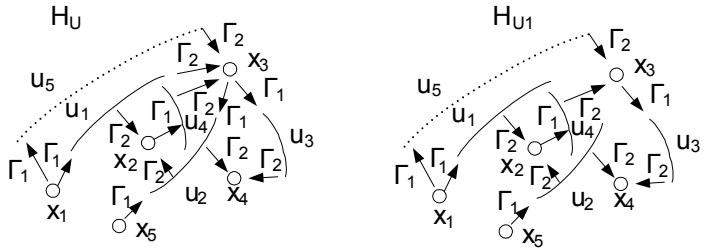
Γ_1X_1: $\Gamma_1x_1 = \Gamma_1x_2 = \{\{u_1 \setminus u_1\} \bullet u_3\} = \{u_3\}$, $\Gamma_1x_3 = \{\{\{u_1, u_2\} \setminus u_1\} \bullet u_4\} = \{u_2, u_4\}$, $\Gamma_1x_4 = \{\{\{u_1\} \setminus u_1\} \bullet u_4\} = \{u_4\}$, $\Gamma_1x_5 = \Gamma_1x_6 = \{u_2\}$, $\Gamma_1x_7 = \{u_3, u_4\}$;

$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_2, \Gamma_2u_3, \Gamma_2u_4\}$, где: $\Gamma_2u_2 = \{x_3, x_5, x_6\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_1, x_2, x_7\}$, $\Gamma_2u_4 = \{x_3, x_4, x_7\}$.

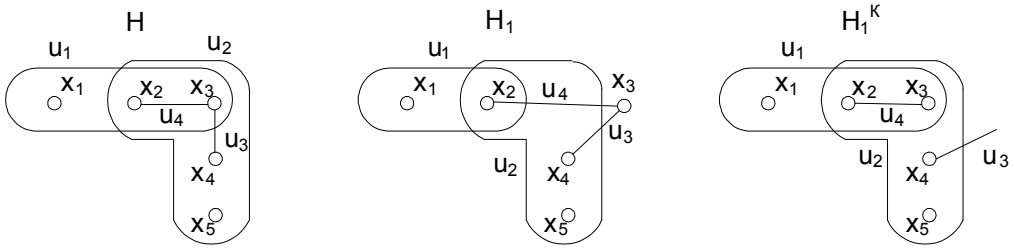
Удаление вершины x_k из образов и прообразов ребер ультраграфа H_U или образов ребер гиперграфа H – рис. 9. Реализует проектную операцию отключения элемента схемы э$_k$ от множества цепей С$_t$.



а



б



в

Рисунок 9 – Фрагмент схемы до и после отключения элемента $Э_3$ от цепей c_1 и c_2 (*а*), модель схемы в виде ультраграфа H_U и результат операции H_{U1} (*б*), модель схемы в виде гиперграфа H и результат операции в виде гиперграфа H_1и куска $H_1^{к}$ (*в*)

Задается имя удаляемой вершины x_k и:

• для ультраграфа – подмножество U_k' инцидентных ей ребер, из прообразов которых следует удалить вершину x_k, и подмножество U_k'' ребер, которым инцидентна эта вершина и из чьих образов её надо удалить;

• для гиперграфа – подмножество U_k' инцидентных вершине x_k ребер, из образов которых её следует удалить.

Обозначение операции: $H_U(X, U) : \{\Gamma_1 U_k', \Gamma_2 U_k''\} \setminus x_k$ для ультраграфа и

$H(X, U) : \Gamma_2 U_k' \setminus x_k$ для гиперграфа.

Условия корректности операции:

– для ультраграфа $x_k \in X$, $U_k' \subseteq U_k^+$ & $U_k'' \subset U_k^- \vee U_k'' \subseteq U_k^-$ & $U_k' \subset U_k^+ \vee U_k' \subset U_k^+$ & $U_k'' \subset U_k^-$, где $U_k^+ = \Gamma_1 x_k$, $U_k^- = \Gamma_2 x_k$;

– для гиперграфа $x_k \in X$, $U_k' \subset \Gamma_1 x_k$.

При применении операции образуется одна компонента связности, если x_k не является вершиной, расщепляющей граф в отношении ребер множества $\{U_k' \cup U_k''\}$ для ультраграфа и U_k' для гиперграфа. В противном случае граф распадается на компоненты связности и при преобразовании графа необходимо определять компоненты связности и множества их вершин.

Если x_k не является расщепляющей вершиной, в результате выполнения операции получаем:

– ультраграф $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) : \{\Gamma_1 U_k', \Gamma_2 U_k''\} \setminus x_k$, если

$$\forall\, u_j \in \{U_k' \cup U_k''\}\ (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| > 2), \qquad (8)$$

– кусок ультраграфа $H_{U1}^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) = H_U(X, U) : \{\Gamma_1 U_k', \Gamma_2 U_k''\} \setminus x_k$, если

$$\exists\, u_j \in \{U_k' \cup U_k''\}\ (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| = 2), \qquad (9)$$

– гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) : \{\Gamma_2 U_k'\} \setminus x_k$, если

$$\forall\, u_l \in U_k'\ (|\Gamma_2 u_l| > 2), \qquad (10)$$

– кусок гиперграфа $H_1^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) = H(X, U) : \{\Gamma_2 U_k'\} \setminus x_k$, если

$$\exists\, u_l \in U_k'\ (|\Gamma_2 u_l| = 2). \qquad (11)$$

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом при справедливости условия (8).

Для получения множеств ультраграфа $H_{U1}(X_1, U_1)$:

1. Копируем множества X и U под именами X_1 и U_1 соответственно:

$X_1 = X$; $U_1 = U$.

2. Формируем множество образов вершин $\Gamma_1 X_1$, копируя их из множества $\Gamma_1 X$, если $i \neq k$. Из образа $\Gamma_1 x_k$ удаляем ребра множества U_k':

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : i \neq k \vee \Gamma_1 x_i \setminus U_k' : i = k / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}$.

3. Создаем множество прообразов вершин $\Gamma_2 X_1$, копируя их из множества $\Gamma_2 X_1$, если $i \neq k$. Из прообраза $\Gamma_2 x_k$ удаляем ребра множества U_k'':

$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i : i \neq k \vee \Gamma_2 x_i \setminus U_k'' : i = k / x_i \in X_1, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\}$.

4. Формируем множество образов ребер $\Gamma_2 U_1$, копируя их из $\Gamma_2 U$ и удаляя при этом вершину x_k из образов ребер множества U_t^-:

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_k'' \vee \Gamma_2 u_j \setminus x_k : u_j \in U_k'' / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$.

5. Определяем множество прообразов ребер $\Gamma_1 U_1$, копируя их из $\Gamma_1 U$ и удаляя при этом вершину x_k из прообразов ребер множества U_k':

$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j : u_j \in U_k' \vee \Gamma_1 u_j \setminus x_k : u_j \in U_k' / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_2 U\}$.

6. Создаем множество $F_1 X_1$ образов вершин X_1 относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$ для чего при $i \neq k$:

– копируем $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершина x_k не была смежна вершине x_i или была и остается смежной после её удаления из образов ребер U_k'',

– удаляем из образа $F_1 x_i$ вершину x_k, если она становится не смежной x_i после её удаления из образов ребер U_k''.

Образ $F_1 x_k$ вершины x_k получаем как объединение образов $\Gamma_2 u_j$ ребер, инцидентных этой вершине после удаления из её образа $\Gamma_1 x_k$ множества ребер U_k':

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, где при $i \neq k$:

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_k \notin F_1 x_i \vee x_k \in F_1 x_i \;\&\; \Gamma_1 x_i \cap \{\Gamma_2 x_k \setminus U_k''\} \neq \varnothing, \\ F_1 x_i \setminus x_k : x_k \in F_1 x_i \;\&\; \Gamma_1 x_i \cap \{\Gamma_2 x_k \setminus U_k''\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_1 x_i \in F_1 X$, $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$, $\Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X$.

$F_1 x_k = \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_1 x_k \setminus U_k'} \Gamma_2 u_j$, где $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$, $\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U$.

Например (смотри рис. 9, *б*), вершина x_3 осталась бы смежной вершине x_1 после удаления x_3 из образа $\Gamma_2 u_1$ ребра u_1, т. е. $F_1 x_1 = \{x_2, x_3\}$, если бы существовало ребро u_5, показанное на рисунке точками. Так как в схеме нет цепи $c_5 \leftrightarrow u_5$, то после удаления вершины x_3 из образа $\Gamma_2 u_1$ условие

$\Gamma_1 x_1 \cap \{\Gamma_2 x_3 \setminus u_1\} = \varnothing$ выполняется и $F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_2\}$.

7. Создаем множество $F_1^{-1} X_1$ прообразов вершин X_1, для чего при $i \neq k$:

– копируем $F_1^{-1} x_i$ из $F_1^{-1} X$, если вершине x_k не была смежна вершина x_i или была и остается смежной после её удаления из образов ребер U_k',

– удаляем из прообраза $F_1^{-1}x_i$ вершину x_k, если этой вершине была и остается смежной вершина x_i после удаления x_k из прообразов ребер U_k'.

Прообраз $F_1^{-1}x_k$ вершины x_k получаем как объединение образов $\Gamma_1 u_j$ ребер, которые инцидентны этой вершине после удаления из её образа $\Gamma_1 x_k$ множества ребер U_k'':

$F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i / x_i \in X_1\}$, где при $i \neq k$:

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i : x_k \notin F_1^{-1}x_i \vee x_k \in F_1^{-1}x_i \;\&\; \Gamma_2 x_i \cap \{\Gamma_1 x_k \setminus U_k'\} \neq \varnothing, \\ F_1^{-1}x_i \setminus x_k : x_k \in F_1^{-1}x_i \;\&\; \Gamma_2 x_i \cap \{\Gamma_1 x_k \setminus U_k'\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X$, $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X$, $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$.

$$F_1^{-1}x_k = \bigcup_{u_j \in \Gamma_2 x_k \setminus U_k''} \Gamma_1 u_j, \text{ где } \Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U.$$

8. Формируем множество образов F_2U_1 ребер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$:

– копируя F_2u_j из множества F_2U, если ребру u_j не инцидентна вершина x_k, либо была и остается инцидентной, но не удаляется из прообразов смежных ей ребер,

– получая F_2u_j как объединение ребер, инцидентных вершинам множества $\Gamma_2 u_j \setminus x_k$, если ребро u_j удаляется из прообраза $\Gamma_2 x_k$ вершины x_k, т. е. вершина становится не смежной ему,

– определяя F_2u_j как объединение множества ребер, полученного по предыдущему правилу, и ребер, инцидентных вершине x_k без множества U_k', если ребро u_j не принадлежит множеству ребер, из образов которых удаляется вершина x_k, т. е. эта вершина в результате выполнения операции остается инцидентной ребру u_j и множество ребер, из прообразов которых удаляется вершина x_k, не пусто:

$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \notin \Gamma_2 x_k \vee u_j \in \Gamma_2 x_k \setminus U_k'' \;\&\; U_k' = \varnothing, \\ \bigcup_{x_i \in \Gamma_2 u_j \setminus x_k} \Gamma_1 x_i : u_j \in U_k'', \\ \{\bigcup \Gamma_1 x_i\} \cup \{\Gamma_1 x_k \setminus U_k'\} : u_j \notin U_k'' \;\&\; U_k' \neq \varnothing, \end{cases}$$

$x_i \in \Gamma_2 u_j \setminus x_k$

где $F_2 u_j \in F_2 U$, $\Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X$, $\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U$, $\Gamma_1 x_i$, $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$.

9. Формируем множество прообразов $F_2^{-1} U_1$ ребер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$:

– копируя $F_2^{-1} u_j$ из множества $F_2^{-1} U$, если ребро u_j не инцидентно вершине x_k,

– удаляя из $F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U$ множество ребер U_k'', если ребро u_j было и остается инцидентным вершине x_k,

– удаляя из $F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U$ множество ребер, которым инцидентна вершина x_k, если ребро u_j принадлежит множеству ребер, из прообразов которых удаляется вершина x_k, т. е. этой вершине в результате выполнения операции становится не инцидентно ребро u_j:

$F_2^{-1} U_1 = \{F_2^{-1} u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2^{-1} u_j = \begin{cases} F_2^{-1} u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee u_j \in \Gamma_1 x_k \setminus U_k' \;\&\; U_k'' = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{x_i \in \Gamma_1 u_j \setminus x_k} \Gamma_2 x_i : u_j \in U_k', \\ \{\bigcup \Gamma_2 x_i\} \cup \{\Gamma_2 x_k \setminus U_k''\} : u_j \notin U_k' \;\&\; U_k'' \neq \varnothing, \\ \bigcup\limits_{x_i \in \Gamma_1 u_j \setminus x_k} \end{cases}$$

где $F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U$, $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$, $\Gamma_2 x_i$, $\Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X$, $\Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U$.

Для куска ультраграфа H_{U1}^{κ} дополнительно формируем множество внешних ребер $U_1^{\kappa}{}_{ext}$, в него включаем те из ребер множества U_t, для которых после выполнения операции сумма количества вершин, инцидентных ему, и количества вершин, которому оно инцидентно, равна единице. Определяем также множество внутренних ребер куска $U_1^{\kappa}{}_{int}$, исключая из U_1^{κ} внешние.

При выполнении условия (9), получаем кусок ультраграфа H_{U1}^{κ}. Множества X_1^{κ}, U_1^{κ}, $\Gamma_1 X_1^{\kappa}$, $\Gamma_2 X_1^{\kappa}$, $\Gamma_2 U_1^{\kappa}$, $\Gamma_1 U_1^{\kappa}$, $F_1 X_1^{\kappa}$, $F_1^{-1} X_1^{\kappa}$, $F_2 U_1^{\kappa}$, $F_2^{-1} U_1^{\kappa}$ определяются по тем же формулам, что и множества ультраграфа H_{U1} (X_1, U_1). Множество ребер U_1^{κ} разбивается на подмножества $U_1^{\kappa}{}_{int}$ и $U_1^{\kappa}{}_{ext}$, такие, что

$$U_1^{\kappa}{}_{ext} = \{u_j \in \{ U_k'' \cup U_k' \} : (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j|) = 1 / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1\};$$

$$U_1^{\kappa}{}_{int} = U_1^{\kappa} \setminus U_1^{\kappa}{}_{\text{ext}}.$$

Формальное описание операции над гиперграфом H (X, U).

При выполнении условия (10) получаем гиперграф H_1 (X_1, U_1):

$X_1 = X$; $U_1 = U$;

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : i \neq k \vee \Gamma_1 x_i \setminus U_k' : i = k \,/\, x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}$;

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_k' \vee \Gamma_2 u_j \setminus x_k : u_j \in U_k' / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$;

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, где при $i \neq k$:

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_k \notin F_1 x_i \vee x_k \in F_1 x_i \;\&\; \Gamma_1 x_i \cap \{\Gamma_1 x_k \setminus U_k'\} \neq \varnothing, \\ F_1 x_i \setminus x_k : x_k \in F_1 x_i \;\&\; \Gamma_1 x_i \cap \{\Gamma_1 x_k \setminus U_k'\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_1 x_i \in F_1 X$, $\Gamma_1 x_i$, $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$,

$F_1 x_k = \cup\{\Gamma_2 u_j \setminus x_i : |\Gamma_2 u_j| > 1 \vee \Gamma_2 u_j : |\Gamma_2 u_j| = 1\}$, где $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X$, $\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U$; $u_j \in \Gamma_1 x_k \setminus U_k'$

$F_2 U_1 = \{F_2 u_j / u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k, \\ F_2 u_j \setminus u_i \in U_k' : u_j \in \Gamma_1 x_k \setminus U_k' \;\&\; \Gamma_2 u_j \cap \Gamma_2 u_i \setminus x_k = \varnothing, \\ F_2 u_j \setminus u_i \in \Gamma_1 x_k \setminus U_k' : u_j \in U_k' \;\&\; \Gamma_2 u_j \setminus x_k \cap \Gamma_2 u_i = \varnothing, \end{cases}$$

где $F_2 u_j \in F_2 U$, $\Gamma_1 x_k \in \Gamma_2 X$, $\Gamma_2 u_j$, $\Gamma_2 u_i \in \Gamma_2 U$.

Если справедливо условие (11), получаем кусок гиперграфа H_1^{κ} (X_1^{κ}, U_1^{κ}). Множества X_1^{κ}, U_1^{κ}, $\Gamma_1 X_1^{\kappa}$, $\Gamma_2 U_1^{\kappa}$, $F_1 X_1^{\kappa}$, $F_2 U_1^{\kappa}$ формируются по тем же правилам, что и для гиперграфа H_1 (X_1, U_1), а $U_1{}^{\kappa}_{ext} = \{u_j \in U_k' : |\Gamma_2 u_j| = 1 \,/\, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1^{\kappa}\}$, $U_1{}^{\kappa}_{int} = U_1^{\kappa} \setminus U_1{}^{\kappa}_{ext}$.

Если вершина x_k *является расщепляющей* в отношении множества рёбер $\{U_k' \cup U_k''\}$ для ультраграфа (U_k' для гиперграфа) и определено множество вершин X_l некоторой компоненты связности, то множество её рёбер

$$U_l = \{u_j \in \cup_{x_i \in X_l}\{\Gamma_1 x_i \cup \Gamma_2 x_i\} / \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\},$$

а остальные множества находим по формулам для компоненты соответствующего вида с учетом того, что x_i и u_j определены на множествах X_l и U_l соответственно ($x_i \in X_l$ и $u_j \in U_l$).

Поскольку анализ вычислительной сложности данной операции несколько сложнее, чем предыдущих, приведем исходные и промежуточные данные для него по схеме: «наименование формируемого множества» : «количество операций сравнения/копирования в функции от мощности обрабатываемых множеств». Вычислительную сложность будем оценивать для операции над ультраграфом без учета получения образов и прообразов вершин и ребер ультраграфа относительно предикатов смежности $F_1(X_1, X_1)$ и $F_2(U_1, U_1)$.

X_1: $|X| = n$; U_1: $|U| = m$;

$\Gamma_1 X_1$: $(|X| - 1) \cdot |\Gamma_1 x_i| + |\Gamma_1 x_i| \cdot |U_k'| + |\Gamma_1 x_i|$;

$\Gamma_2 X_1$: $(|X| -1) \cdot |\Gamma_2 x_i| + |\Gamma_2 x_i| \cdot |U_k''| + |\Gamma_2 x_i|$;

$\Gamma_2 U_1$: $(|U_k''| + |\Gamma_2 u_j|) \cdot (|U| - |U_k''|) + (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_2 u_j|) \cdot |U_k''| = (|U| - |U_k''|) \cdot |U_k''| + |\Gamma_2 u_j| \cdot (|U| + |U_k''|)$;

$\Gamma_1 U_1$: $(|U_k'| + |\Gamma_1 u_j|) \cdot (|U| - |U_k'|) + (|\Gamma_1 u_j| + |\Gamma_1 u_j|) \cdot |U_k'| = (|U| - |U_k'|) \cdot |U_k'| + |\Gamma_1 u_j| \cdot (|U| + |U_k'|)$.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции равна:

- *в худшем – $O(m^2)$ при $m > n$, если $|\Gamma_1 x_i|$ или $|U_k'|$ ($|\Gamma_2 x_i|$ или $|U_k''|$) ограничены величиной m, или – $O(n \cdot m)$, если $|\Gamma_2 u_j|$ или $|\Gamma_1 u_j|$ ограничены величиной n либо $|\Gamma_1 x_i|$ или $|\Gamma_2 x_i|$ ограничены величиной m и $n > m$;*
- *в лучшем – $O(n)$ при $n > m$ и – $O(m)$ при $m > n$, если мощности образов и прообразов вершин и ребер, а также $|U_k'|$ и $|U_k''|$ ограничены константой.*

Вычислительная сложность операции над гиперграфом имеет тот же порядок.

Операция может выполняться над куском $H_U^{к}$ ($X^{к}$, $U^{к}$) ультра- или $H^{к}$ ($X^{к}$, $U^{к}$) гиперграфа. При этом среди компонент связности может появиться граф (графы) вида $G^{\rightarrow}(\varnothing, u)$, если для внешних ребер куска $H_U^{к}$ ($X^{к}$, $U^{к}$) выполняется условие

$$\exists\, u_j \in \{U_k' \cup U_k''\}(|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| = 1),$$

или вида $G^{\sim}(\varnothing, u)$, если для внешних ребер куска $H^{к}$ ($X^{к}$, $U^{к}$) выполняется условие

$$\exists\, u_j \in U_k' \,(|\Gamma_2 u_j| = 1).$$

Пример. Отключим в схеме, показанной на рис. 9, *а*, элемент э$_3$ от цепей c_1 и c_2. Над моделью схемы в виде ультраграфа (смотри рис. 9, *б*) выполняется операция удаления вершины x_3 из образов ребер u_1 и u_2, т. е. $U_k' = \{u_2\}$и $U_k'' = \{u_1\}$. Вершина x_3 не является расщепляющей и выполняется условие (8), так как $|\Gamma_2 u_1| + |\Gamma_1 u_1| = 3$ и $|\Gamma_2 u_2| + |\Gamma_1 u_2| = 4$.

В результате выполнения операции $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) : \{\Gamma_1 U_k', \Gamma_2 U_k''\} \setminus x_k$ получим ультраграф H_{U1}, у которого:

$X_1 = X = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$; $U_1 = U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$;

$\Gamma_1 X_1$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{u_4\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{u_2, u_3\} \setminus \{u_2\} = \{u_3\}$, $\Gamma_1 x_4 = \varnothing$, $\Gamma_1 x_5 = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 X_1$: $\Gamma_2 x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2 x_2 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_2 x_3 = \{u_1, u_4\} \setminus \{u_1\} = \{u_4\}$, $\Gamma_2 x_4 = \{u_2, u_3\}$, $\Gamma_2 x_5 = \varnothing$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_4\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_4\}$, $\Gamma_2 u_4 = \{x_3\}$;

$\Gamma_1 U_1$: $\Gamma_1 u_1 = \{x_1\}$, $\Gamma_1 u_2 = \{x_3, x_5\} \setminus x_3 = \{x_5\}$, $\Gamma_1 u_3 = \{x_3\}$, $\Gamma_1 u_4 = \{x_2\}$;

$F_1 X_1$: $F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_2\}$, $F_1 x_2 = \{x_3\}$, $F_1 x_3 = \Gamma_2 u_3 = \{x_4\}$, $F_1 x_4 = \varnothing$, $F_1 x_5 = \{x_2, x_4\}$;

$F_1^{-1} X_1$: $F_1^{-1} x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1} x_2 = \{x_1, x_3, x_5\} \setminus x_3 = \{x_1, x_5\}$, $F_1^{-1} x_3 = \Gamma_1 u_4 = \{x_2\}$,

$F_1^{-1} x_4 = \{x_3, x_5\}$, $F_1^{-1} x_5 = \varnothing$;

$F_2 U_1$: $F_2 u_1 = \Gamma_1 x_2 = \{u_4\}$, $F_2 u_2 = \{u_4\}$, $F_2 u_3 = \varnothing$, $F_2 u_4 = \{u_2, u_3\} \setminus \{u_2\} = \{u_3\}$;

$F_2^{-1} U_1$: $F_2^{-1} u_1 = \varnothing$, $F_2^{-1} u_2 = \Gamma_2\{\varnothing\} = \varnothing$, $F_2^{-1} u_3 = \{u_1, u_4\} \setminus \{u_1\} = \{u_4\}$,

$F_2^{-1} u_4 = \{u_1, u_2\}$.

В гиперграфе, показанном на рис. 9, *в*, удалим вершину x_3 из образов ребер u_1 и u_2, т. е. $U_k' = \{u_1, u_2\}$. Так как $|\Gamma_2 u_1| = 3$ и $|\Gamma_2 u_2| = 4$, в результате выполнения операции

$$H_1(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) : \{\Gamma_2 U_k'\} \setminus x_k$$

получаем гиперграф H_1, в котором:

$X_1 = X = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$; $U_1 = U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$;

$\Gamma_1 X_1$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2, u_4\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_2, u_3\} \setminus \{u_1, u_2\} = \{u_3\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{u_2, u_3, u_4\}$, $\Gamma_1 x_5 = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\} \setminus x_3 = \{x_2, x_4, x_5\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma_2 u_4 = \{x_2, x_4\}$.

При удалении вершины x_3 из образа ребра u_3 получим кусок гиперграфа $H_1^{к}$, в котором:

$X_1^{к} = X$; $U_1^{к} = U$; $U_1^{к}{}_{ext} = \{u_3\}$, $U_1^{к}{}_{int} = \{u_1, u_2\}$;

$\Gamma_1 X_1^{к}$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2, u_4\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_2, u_3\} \setminus \{u_3\} = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{u_2, u_3, u_4\}$, $\Gamma_1 x_5 = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_4\} \setminus x_3 = \{x_4\}$, $\Gamma_2 u_4 = \{x_2, x_4\}$.

Удаление ребра u_k из образов и прообразов вершин ультраграфа H_U и образов вершин гиперграфа H – рис. 10. Соответствует проектной операции отключения цепи c_k от заданного множества элементов схемы.

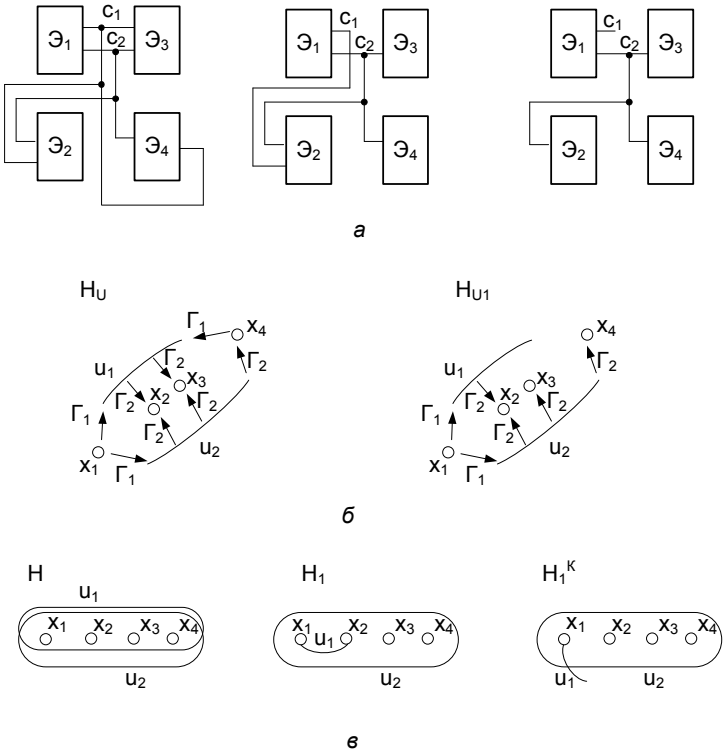


Рисунок 10 – Фрагмент схемы до и после отключения цепи c_1 от элементов $э_3$ и $э_4$ (*а*), модель схемы в виде ультраграфа H_U и результат операции H_{U1} (*б*), модель в виде гипергра-

фа H и результаты операции H_1 и $H_1^{к}$ для вариантов отключения цепи c_1 от элементов $э_3$, $э_4$ и $э_2$, $э_3$, $э_4$ (*в*)

Задается имя удаляемого ребра u_k и:

• для ультраграфа – подмножество X_k' инцидентных ему вершин, из прообразов которых надо удалить это ребро, и подмножество X_k'' вершин, которым инцидентно это ребро и из чьих образов следует его удалить;

• для гиперграфа – подмножество X_k' инцидентных ребру вершин, из образов которых оно удаляется.

Обозначение операции: $H_U(X, U) : \{\Gamma_1 X_k'', \Gamma_2 X_k'\} \setminus u_k$ для ультраграфа и

$H(X, U) : \Gamma_1 X_k' \setminus u_k$ для гиперграфа.

Условия корректности операции:

– для ультраграфа: $u_k \in U$, $X_k' \subseteq \Gamma_2 u_k$ и $X_k'' \subset \Gamma_1 u_k$ или $X_k' \subset \Gamma_2 u_k$ и $X_k'' \subseteq \Gamma_1 u_k$ или $X_k' \subset \Gamma_2 u_k$ и $X_k'' \subset \Gamma_1 u_k$;

– для гиперграфа $u_k \in U$, $X_k' \subset \Gamma_2 u_k$.

При применении операции образуется одна компонента связности, если ни одна из вершин множества $\{X_k' \cup X_k''\}$ в ультраграфе (X_k' в гиперграфе) не является расщепляющей и для каждой из них $|\Gamma_1 x_i| + |\Gamma_2 x_i| > 1$ для ультраграфа и $|\Gamma_1 x_i| > 1$ для гиперграфа. В противном случае граф распадается на компоненты связности и при преобразовании графа необходимо определять компоненты связности и множества их вершин.

Если вершины множества $\{X_k' \cup X_k''\}$ *или* X_k' *не являются расщепляющими, в результате выполнения операции* получаем:

– ультраграф $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) : \{\Gamma_1 X_k'', \Gamma_2 X_k'\} \setminus u_k$, если

$$|\Gamma_2 u_k \setminus X_k'| + |\Gamma_1 u_k \setminus X_k''| \geq 2, \qquad (12)$$

– кусок ультраграфа $H_{U1}^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) = H_U(X, U) : \{\Gamma_1 X_k'', \Gamma_2 X_k'\} \setminus u_k$, если

$$|\Gamma_2 u_k \setminus X_k'| + |\Gamma_1 u_k \setminus X_k''| = 1, \qquad (13)$$

– гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) : \Gamma_1 X_k' \setminus u_k$, если

$$|\Gamma_2 u_k \setminus X_k'| \geq 2\,, \qquad (14)$$

– кусок гиперграфа $H_1^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) = H(X, U) : \Gamma_1 X_k' \setminus x_k$, если

$$|\Gamma_2 u_k \setminus X_k'| = 1 \ . \qquad (15)$$

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом H_U (X, U) при справедливости условия (12).

Для получения результата – ультраграфа H_{U1} (X_1, U_1):

1. Копируем множества X и U под именами X_1 и U_1 соответственно:

$X_1 = X$; $U_1 = U$.

2. Формируем множество образов вершин $\Gamma_1 X_1$, копируя их из множества $\Gamma_1 X$ и удаляя u_k из образов вершин множества X_k'':

$$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : x_i \notin X_k'' \vee \Gamma_1 x_i \setminus u_k : x_i \in X_k'' / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}.$$

3. Получаем множество прообразов вершин $\Gamma_2 X_1$, копируя их из множества $\Gamma_2 X$ и удаляя u_k из прообразов вершин множества X_k':

$$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i : x_i \notin X_k' \vee \Gamma_2 x_i \setminus u_k : x_i \in X_k' / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}.$$

4. Формируем множество образов ребер $\Gamma_2 U_1$, копируя их из $\Gamma_2 U$, если $j \neq k$, и удаляя из образа $\Gamma_2 u_k$ вершины, принадлежащие множеству X_k':

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : j \neq k \vee \Gamma_2 u_j \setminus X_k' : j = k / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}.$$

3. Создаем множество прообразов ребер $\Gamma_1 U_1$, копируя их из $\Gamma_1 U$, если $j \neq k$, и удаляя из прообраза $\Gamma_1 u_k$ вершины, принадлежащие множеству X_k'':

$$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j : j \neq k \vee \Gamma_1 u_j \setminus X_k'' : j = k / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$$

4. Определяем множество образов $F_1 X_1$ для чего:

– копируем $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершине x_i не инцидентно ребро u_k или было и остается инцидентным после своего удаления из образов вершин множества X_k'' и при этом оно не удаляется из прообразов инцидентных ей вершин, т. е. $X_k' = \varnothing$,

– получаем $F_1 x_i$ как объединение множества вершин, инцидентных рёбрам образа $\Gamma_1 x_i$ без ребра u_k, если оно удаляется из образа вершины x_i, т.е. $x_i \in X_k''$,

– находим $F_1 x_i$ как объединение множества вершин, сфомированного по предыдущему правилу, и множества вершин, инцидентных ребру u_k, без

множества X_k', если ребро u_k не удаляется из образа вершины x_i, т. е. $x_i \notin X_k''$, и $X_k' \neq \varnothing$:

$$F_1X_1 = \{ F_1x_i / x_i \in X_1\}, \text{ где}$$

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : x_i \notin \Gamma_1u_k \vee x_i \in \Gamma_1u_k \setminus X_k'' \;\&\; X_k' = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_1x_i \setminus u_k} \Gamma_2u_j : x_i \in X_k'', \\ \{\bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_1x_i \setminus u_k} \Gamma_2u_j\} \cup \{\Gamma_2u_k \setminus X_k'\} : x_i \notin X_k'' \;\&\; X_k' \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $F_1x_i \in F_1X$, $\Gamma_1u_k \in \Gamma_1U$, Γ_2u_j, $\Gamma_2u_k \in \Gamma_2U$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X$.

5. Формируем множество прообразов $F_1^{-1}X_1$ для чего:

– копируем $F_1^{-1}x_i$ из $F_1^{-1}X$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_k или была и остается инцидентной после удаления ребра из прообразов вершин множества X_k' и при этом ребро не удаляется из образов вершин, которым она инцидентна, т. е. $X_k'' = \varnothing$,

– получаем $F_1^{-1}x_i$ как объединение множества вершин, которым инцидентны ребра прообраза Γ_2x_i без ребра u_k, если это ребро удаляется из прообраза вершины x_i, т. е. $x_i \in X_k'$,

– находим $F_1^{-1}x_i$ как объединение множества вершин, определенного по предыдущему правилу, и множества вершин, которым инцидентно ребро u_k, без множества X_k'', если ребро u_k не удаляется из прообраза вершины x_i, т. е. $x_i \notin X_k'$, и $X_k'' \neq \varnothing$:

$$F_1^{-1}X_1 = \{ F_1^{-1}x_i / x_i \in X_1\}, \text{ где}$$

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i : x_i \notin \Gamma_2u_k \vee x_i \in \Gamma_2u_k \setminus X_k' \;\&\; X_k'' = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_2x_i \setminus u_k} \Gamma_1u_j : x_i \in X_k', \\ \{\bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_2x_i \setminus u_k} \Gamma_1u_j\} \cup \{\Gamma_1u_k \setminus X_k''\} : x_i \notin X_k' \;\&\; X_k'' \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X$, $\Gamma_2u_k \in \Gamma_2U$, Γ_1u_k, $\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U$, $\Gamma_2x_i \in \Gamma_2X$.

6. Получаем множество образов F_2U_1 ребер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$ для чего при $i \neq k$:

– копируем F_2u_j из F_2U_1, если ребро u_k не было смежно ребру u_j или было и остается смежным после его удаления из образов вершин X_k'',

– удаляем из образа F_2u_j ребро u_k, если оно становится не смежным ребру u_j после его удаления из образов вершин X_k''.

Образ F_2u_k ребра u_k получаем как объединение образов Γ_1x_i вершин, инцидентных этому ребру после удаления из его образа Γ_2u_k множества вершин X_k':

$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\}$, где при $i \neq k$:

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : \Gamma_2u_j \cap X_k'' = \varnothing, \\ F_2u_j \setminus u_k : u_k \in F_2u_j \;\&\; \Gamma_2u_j \cap \{\Gamma_1u_k \setminus X_k''\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_2u_j \in F_2U$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U$, $\Gamma_1u_k \in \Gamma_1U$.

$$F_2u_k = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_k \setminus X_k'} \Gamma_1x_i, \text{ где } \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X, \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U.$$

7. Получаем множество прообразов $F_2^{-1}U_1$ ребер U_1 относительно предиката смежности $F_2(U_1, U_1)$ для чего при $i \neq k$:

– копируем $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U_1$, если ребру u_k не было смежно ребро u_j или было и остается смежным после удаления u_k из прообразов вершин X_k',

– удаляем из прообраза $F_2^{-1}u_j$ ребро u_k, если ребро u_j становится не смежным ребру u_k после его удаления из прообразов вершин множества X_k'.

Прообраз $F_2^{-1}u_k$ ребра u_k получаем как объединение прообразов Γ_2x_i рёбер, которым инцидентна вершина x_i после удаления множества вершин X_k''из прообраза Γ_1u_k ребра u_k:

$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U_1\}$, где при $i \neq k$:

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j : \Gamma_1u_j \cap X_k' = \varnothing, \\ F_2^{-1}u_j \setminus u_k : u_k \in F_2^{-1}u_j \;\&\; \Gamma_1u_j \cap \{\Gamma_2u_k \setminus X_k'\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$, $\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U$, $\Gamma_2u_k \in \Gamma_2U$.

$$F_2^{-1}u_k = \bigcup_{x_i \in \Gamma_1u_k \setminus X_k''} \Gamma_2x_i, \text{ где } \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X, \Gamma_1u_k \in \Gamma_1U.$$

Множества аналитического представления куска ультраграфа H_{U1}^{κ} получаем по таким же формулам; дополнительно формируем множество внешних

рёбер $U_1^{к}{}_{ext}$, в которое включаем ребро u_k, и определяем множество внутренних рёбер куска $U_1^{к}{}_{int}$, исключая из $U_1^{к}$ ребро u_k:

$U_1^{к}{}_{ext} = \{u_k\}$, $U_1^{к}{}_{int} = U_1^{к} \setminus u_k$.

Формальное описание операции над гиперграфом H (X, U).

При выполнении условия (14) получаем множества гиперграфа H_1:

$X_1 = X$; $U_1 = U$;

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : x_i \notin X_k' \vee \Gamma_1 x_i \setminus u_k : x_i \in X_k' / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}$;

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : j \neq k \vee \Gamma_2 u_j \setminus X_k' : j = k / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$;

$F_1 X_1 = \{ F_1 x_i / x_i \in X_1\}$, здесь:

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_k, \\ \cup \{\Gamma_2 u_j \setminus x_i : |\Gamma_2 u_j| > 1 \vee \Gamma_2 u_j : |\Gamma_2 u_j| = 1\} : x_i \in X_k', \\ u_j \in \Gamma_1 x_i \setminus u_k \end{cases}$$

$F_1 x_i \in F_1 X, \Gamma_2 u_j, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$;

$F_2 U_1 = \{ F_1 u_j / u_j \in U_1\}$, здесь для $u_j \neq u_k$

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j : \Gamma_2 u_j \cap X_k' = \varnothing, \\ F_2 u_j \setminus u_k : u_j \in F_2 u_k \;\&\; \Gamma_2 u_j \cap \{\Gamma_2 u_k \setminus X_k'\} = \varnothing, \end{cases}$$

здесь: $F_2 u_j \in F_2 U, \Gamma_2 u_j, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U$ и

$$F_2 u_k = \cup \{\Gamma_1 x_i \setminus u_k : |\Gamma_2 u_k| > 1 \vee \Gamma_1 x_i : |\Gamma_2 u_k| = 1\},$$
$$x_i \in \Gamma_2 u_k \setminus X_k'$$

здесь: $F_2 u_j \in F_2 U, \Gamma_2 u_j, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$.

В случае выполнения условия (15) получаем кусок гиперграфа $H_{U1}^{к}$ ($X_1^{к}$, $U_1^{к}$), в котором множества $X_1^{к}$, $U_1^{к}$, $\Gamma_1 X_1^{к}$, $\Gamma_2 U_1^{к}$, $F_1 X_1^{к}$, $F_2 U_1^{к}$ формируются по тем же правилам, что и множества гиперграфа H_1 (X_1, U_1), а $U_1^{к}{}_{ext} = \{u_k\}$, $U_1^{к}{}_{int} = U_1^{к} \setminus u_k$.

Если результатом операции является несколько компонент связности и определены множества их вершин $\{X_l\}$, множество ребер каждой компоненты будет:

$$U_l = \{u_j \in \cup \{\Gamma_1' x_i \cup \Gamma_2' x_i\} / \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\},$$
$$x_i \in X_l$$

где $\Gamma_1' x_i = \Gamma_1 x_i$, если $x_i \notin X_k''$ и $\Gamma_1' x_i = \Gamma_1 x_i \setminus u_k$, если $x_i \in X_k''$, $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$,

$\Gamma_2' x_i = \Gamma_2 x_i$, если $x_i \notin X_k'$ и $\Gamma_2' x_i = \Gamma_2 x_i \setminus u_k$, если $x_i \in X_k'$, $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X$.

Остальные множества аналитического задания компоненты определяются по соответствующим формулам для компоненты данного вида.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции над ультраграфом без учета операций формирования образов и прообразов относительно предикатов смежности равна:

- *в худшем – $O(n \cdot m)$ при $m > n$, если $|\Gamma_1 x_i|$ или $|\Gamma_2 x_i|$ ограничены m либо $|\Gamma_2 u_j|$ или $|\Gamma_1 u_j|$ ограничены n; $O(n^2)$ при $n > m$, если $|\Gamma_2 u_j|$ и $|X_k'|$ либо $|\Gamma_1 u_j|$ и $|X_k''|$ ограничены величинами m и n соответственно;*
- *в лучшем $O(n)$ при $n > m$ и $O(m)$ при $m > n$, если $|\Gamma_1 x_i|, |\Gamma_2 x_i|, |\Gamma_2 u_j|$, $|\Gamma_1 u_j|$, $|X_k'|$ и $|X_k''|$ ограничены константой.*

Асимптотическая оценка вычислительной сложности операции над гиперграфом имеет тот же порядок.

Операция может быть применена к куску ультра- или гиперграфа. Результатом будет кусок $H_{U1}^{\text{к}}$ или $H_1^{\text{к}}$ соответственно. Если ребро u_k было внутренним и выполнялось условие (13) для ультраграфа или (15) для гиперграфа, то это ребро исключается из множесва внутренних и добавляется в множество внешних.

Пример. В схеме, показанной на рис. 10, *а*, отсоединим цепь c_1 от элементов $э_3$ и $э_4$. Для модели схемы в виде ультраграфа (смотри рис. 10, *б*) множества $X_k'' = \{x_4\}$, $X_k' = \{x_3\}$, т.е. будет выполняться операция удаления ребра u_1 из образа вершины x_4 и прообраза вершины x_3.

Результатом операции $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) : \{ \Gamma_1 X_k'', \Gamma_2 X_k' \} \setminus u_k$ будет ультраграф H_{U1}, так как вершины x_3 и x_4 не являются расщепляющими и выполняется условие (12). Образы и прообразы вершин и ребер ультраграфа H_{U1} относительно предикатов инцидентности и смежности будут:

$\Gamma_1 X_1$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1 x_2 = \Gamma_1 x_3 = \varnothing$, $\Gamma_1 x_4 = \{u_1\} \setminus u_1 = \varnothing$;

$\Gamma_2 X_1$: $\Gamma_2 x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2 x_2 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_2 x_3 = \{u_1, u_2\} \setminus u_1 = \{u_2\}$, $\Gamma_2 x_4 = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \setminus \{x_3\} = \{x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$;

$\Gamma_1 U_1$: $\Gamma_1 u_1 = \{x_1, x_4\} \setminus \{x_4\} = \{x_1\}$, $\Gamma_1 u_2 = \{x_1\}$;

$F_1 X_1$: $F_1 x_1 = \Gamma_2 u_2 \cup \Gamma_2 u_1 \setminus \{x_3\} = \{x_2, x_3, x_4\}$; $F_1 x_2 = F_1 x_3 = \varnothing$, $F_1 x_4 = \varnothing$;

$F_1^{-1} X_1$: $F_1^{-1} x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1} x_2 = \Gamma_1 u_2 \cup \Gamma_1 u_1 \setminus \{x_4\} = \{x_1\}$, $F_1^{-1} x_3 = \Gamma_1 u_2 = \{x_1\}$,

$F_1^{-1} x_4 = \{x_1\}$;

$F_2 U_1$: $F_2 u_1 = \Gamma_1 x_2 = \varnothing$, $F_2 u_2 = F_2 u_2 \setminus u_1 = \varnothing$;

$F_2^{-1} U_1$: $F_2^{-1} u_1 = \Gamma_2 x_1 = \varnothing$, $F_2^{-1} u_1 = \varnothing$.

В гиперграфе, показанном на рис. 10, *в*, удалим ребро u_1 из образов вершин x_3 и x_4. Так как $|\Gamma_2 u_1 \setminus \{x_3, x_4\}| = 2$, в результате выполнения операции $H_1 (X_1, U_1) = H (X, U) : \{\Gamma_1 X_k'', \Gamma_2 X_k'\} \setminus u_k$ получаем гиперграф H_1, изображенный на том же рисунке, в котором:

$\Gamma_1 X_1$: $\Gamma_1 x_1 = \Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1 x_3 = \Gamma_1 x_4 = \{u_1, u_2\} \setminus u_1 = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_3, x_4\} = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$;

$F_1 X_1$: $F_1 x_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $F_1 x_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $F_1 x_3 = \{x_1, x_1, x_4\}$,

$F_1 x_4 = \{x_1, x_2, x_3\}$;

$F_2 U_1$: $F_2 u_1 = \{u_2\}$, $F_2 u_2 = \{u_1\}$.

При удалении ребра u_1 из образов вершин x_2, x_3, x_4 получим кусок ультра- $H_{U1}^{к}$ или гиперграфа $H_1^{к}$, аналитическое представление которых читателю нетрудно получить самостоятельно.

Формирование части ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 11. Реализует проектную операцию определения (локализации) части схемы по заданному множеству элементов $Э_1 \supset Э$, где Э – множество элементов схемы.

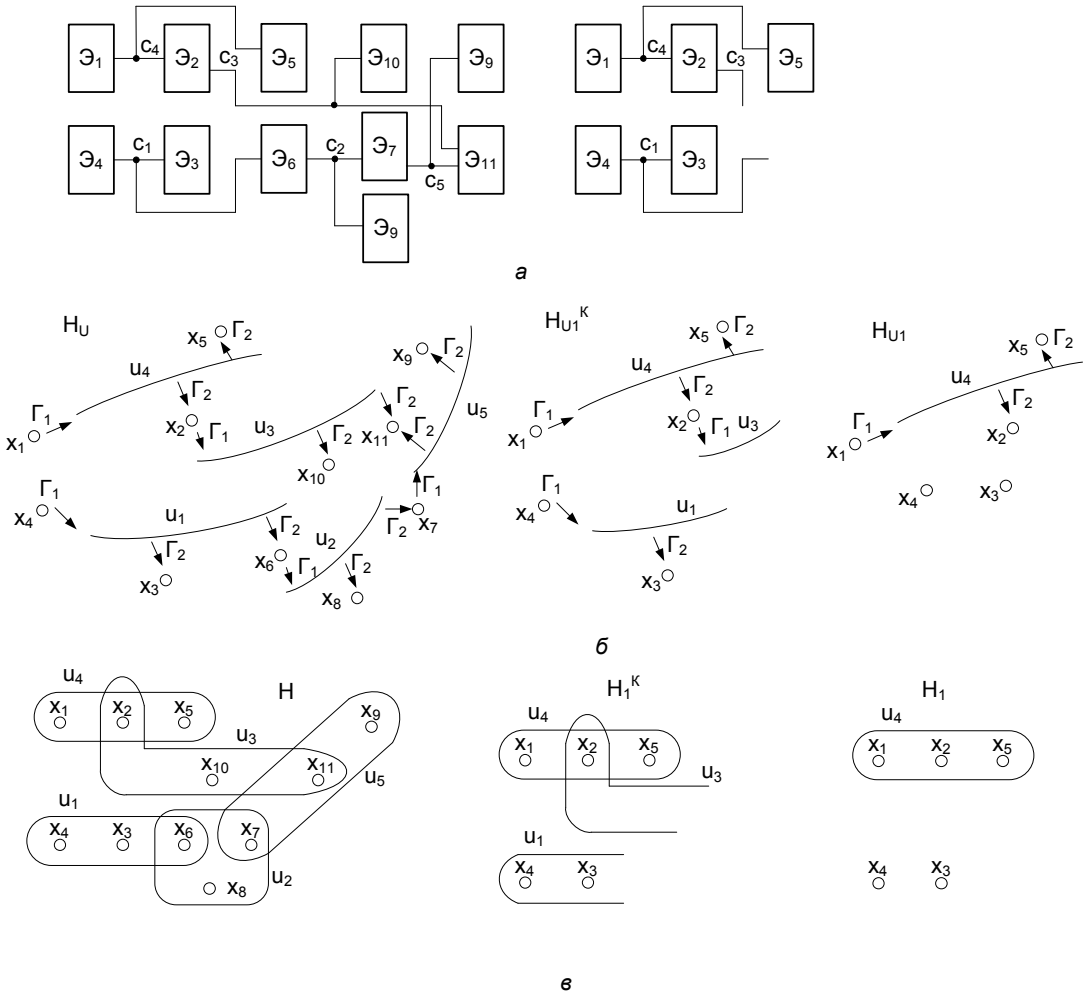


Рисунок 11 – Схема и выделенный фрагмент (*а*); модель в виде ультраграфа H_U, сформированные кусок $H_{U1}{}^{к}$ – две компоненты связности и подграф H_{U1} – три компоненты связности (*б*); модель в виде гиперграфа, кусок и подграф гиперграфа $H_1{}^{к}$ и H_1 – две и три компоненты связности соответственно (*в*)

Операция имеет две модификации: формирование куска $H_{U1}{}^{к}$ ультраграфа H_U или $H_1{}^{к}$ гиперграфа H и формирование подграфа H_{U1} ультраграфа или подграфа H_1 гиперграфа.

Задается множество X_1 вершин формируемой части графа.

Обозначение операции: $H_U\,(X,\,U)$ ¤ X_1 или $H\,(X,\,U)$ ¤ X_1 для формирования куска ультра- или гиперграфа и $H_U\,(X,U)$ ○ X_1 или $H\,(X,\,U)$ ○ X_1 для формирования подграфов тех же графов.

Условие корректности операции: $X_1 \subset X$.

Результатом выполнения операции является:

– кусок ультраграфа $H_{U1}{}^{к}\,(X_1{}^{к},\,U_1{}^{к}) = H_U\,(X,\,U)$ ¤ X_1или

– гиперграфа $H_1^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) = H(X, U) ¤ X_1$ либо

– подграф ультраграфа $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) \circ X_1$ или

– подграф гиперграфа $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) \circ X_1$.

Полученная часть ультра- или гиперграфа может содержать несколько компонент связности. Операция не формирует аналитическое представление каждой компоненты связности. Множества вершин, ребер, образов и прообразов (для ультраграфа) формируемой части графа представляют собой конкатенацию соответствующих множеств компонент связности, входящих в эту компоненту.

Содержательно-формальное описание выполнения операции при получении куска $H_{U1}^{к}(X_1^{к}, U_1^{к})$ ультраграфа $H_U(X, U)$.

1. Копируем множество X_1 под наименованием $X_1^{к}$: $X_1^{к} = X_1$.
2. Формируем множество $U_1^{к}$, включая в него при копировании те рёбра множества U, которые инцидентны вершинам множества X_1 и которым инцидентны эти вершины:

$$U_1^{к} = \Gamma_1(X_1^{к}) \cup \Gamma_2(X_1^{к}), \text{ где } \Gamma_1(X_1^{к}) = \bigcup_{x_i \in X_1^{к}} \Gamma_1 x_i,\ \Gamma_2(X_1^{к}) = \bigcup_{x_i \in X_1^{к}} \Gamma_2 x_i,$$

где $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$, $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X$, $\Gamma_1(X_1^{к})$ – множество ребер, которые инцидентны вершинам множества X_1, $\Gamma_2(X_1^{к})$ – множество ребер, которым инцидентны эти вершины.

Примечание: множество $U_1^{к}$ можно определить другим способом, а именно:

$$U_1^{к} = \{u_j \in U : \{\Gamma_2 u_j \cup \Gamma_1 u_j\} \cap X_1^{к} \neq \varnothing \,/\, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$$

Однако использование этой формулы в данном случае нецелесообразно, так как это приведет к тому, что вычислительная сложность операции «в лучшем» будет O(m) даже при $|\Gamma_2 u_j| = |\Gamma_1 u_j| = |X_1^{к}| = const.$ Аналогичная формула будет использована для определения U_1 подграфа ультраграфа. Читателю предлагается самому продумать основания для её применения.

3. Определяем множество $U_1{}^{к}{}_{int}$ внутренних ребер, включая в него те ребра из $U_1{}^{к}$, у которых все вершины их образов и прообразов принадлежат множеству вершин $X_1{}^{к}$:

$U_1{}^{к}{}_{int} = \{u_j \in U_1{}^{к} : \{\Gamma_2 u_j \cup \Gamma_1 u_j\} \subseteq X_1{}^{к} / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}$.

4. Создаем множество $U_1{}^{к}{}_{ext}$ внешних ребер, исключая из множества $U_1{}^{к}$ внутренние ребра куска ультраграфа:

$U_1{}^{к}{}_{ext} = U_1{}^{к} \setminus U_1{}^{к}{}_{int}$.

5. Получаем множество $\Gamma_1 X_1{}^{к}$ образов вершин куска $H_{U1}{}^{к}$, записывая в него из $\Gamma_1 X$ образы $x_i \in X_1{}^{к}$:

$\Gamma_1 X_1{}^{к} = \{\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X / x_i \in X_1{}^{к}\}$.

6. Формируем множество $\Gamma_2 X_1{}^{к}$ прообразов вершин куска $H_{U1}{}^{к}$, записывая в него из $\Gamma_2 X$ прообразы $x_i \in X_1{}^{к}$:

$\Gamma_2 X_1{}^{к} = \{\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X / x_i \in X_1{}^{к}\}$.

7. Создаем множество $\Gamma_2 U_1{}^{к}$ образов ребер куска $H_{U1}{}^{к}$ так, что образом внутреннего ребра является образ $\Gamma_2 u_j$ одноименного ребра в $\Gamma_2 U$ ультраграфа H_U, а образ внешнего ребра определяется как $\Gamma_2 u_j \cap X_1{}^{к}$, т. е. удалением вершин, не принадлежащих $X_1{}^{к}$:

$\Gamma_2 U_1{}^{к} = \{\Gamma_2 u_j \cap X_1{}^{к} / u_j \in U_1{}^{к}, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$.

8. Создаем множество $\Gamma_1 U_1{}^{к}$ прообразов ребер куска $H_{U1}{}^{к}$ так, что прообразом внутреннего ребра является прообраз $\Gamma_1 u_j$ одноименного ребра в $\Gamma_1 U$ ультраграфа H_U, а прообраз внешнего ребра определяется как $\Gamma_1 u_j \cap X_1{}^{к}$, т. е. удалением вершин, не принадлежащих $X_1{}^{к}$:

$\Gamma_1 U_1{}^{к} = \{\Gamma_1 u_j \cap X_1{}^{к} / u_j \in U_1{}^{к}, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}$.

9. Определяем множество $F_1 X_1{}^{к}$ образов и прообразов $F_1{}^{-1} X_1{}^{к}$ вершин относительно предиката смежности $F_1(X_1{}^{к}, X_1{}^{к})$, оставляя в $F_1 x_i \in F_1 X$ и $F_1{}^{-1} x_i \in F_1{}^{-1} X$ только те вершины, которые принадлежат множеству $X_1{}^{к}$:

$F_1 X_1{}^{к} = \{F_1 x_i \cap X_1{}^{к} / x_i \in X_1{}^{к}, F_1 x_i \in F_1 X\}$,

$F_1{}^{-1} X_1{}^{к} = \{F_1{}^{-1} x_i \cap X_1{}^{к} / x_i \in X_1{}^{к}, F_1{}^{-1} x_i \in F_1{}^{-1} X\}$.

10. Формируем множество $F_2U_1^{к}$ образов и прообразов $F_2^{-1}U_1^{к}$ рёбер относительно предиката смежности $F_2(U_1^{к}, U_1^{к})$, оставляя в $F_2u_j \in F_2U$ и $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U$ только те ребра, которые принадлежат множеству $U_1^{к}$:

$F_2U_1^{к} = \{ F_2u_j \cap U_1^{к} / u_j \in U_1^{к}, F_1u_j \in F_2U \}$,

$F_2^{-1}U_1^{к} = \{ F_2^{-1}u_j \cap U_1^{к} / u_j \in U_1^{к}, F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1}U \}$.

Для данной операции целесообразно подробно рассмотреть определение количества операций формирования множества ребер куска ультраграфа $U_1^{к}$.

Формирование множества $U_1^{к}$ подразумевает:

– определение множества ребер $\Gamma_1(X_1^{к})$, которые инцидентны вершинам множества X_1, и множества ребер $\Gamma_2(X_1^{к})$, которым инцидентны эти вершины. В предположении, что все ребра в $U_i = \Gamma_1 x_i$ для всех $x_i \in X_1^{к}$ различны, реализация выражений

$$\bigcup_{x_i \in X_1^{к}} \Gamma_1 x_i \text{ и } \bigcup_{x_i \in X_1^{к}} \Gamma_2 x_i$$

потребует $(|\Gamma_1 x_i|^2 + |\Gamma_2 x_i|^2) \times \Sigma t$ операций , где $t = 1, |X_1^{к}|$;

– определение множества ребер $U_1^{к} = \Gamma_1(X_1^{к}) \cup \Gamma_2(X_1^{к})$, что потребует $|\Gamma_1(X_1^{к})| \times |\Gamma_2(X_1^{к})|$ операций сравнения.

Мощности получаемых множеств будут:

– $|\Gamma_1(X_1^{к})|$ и $|\Gamma_2(X_1^{к})|$ ограничены m или константой, если $|\Gamma_1 x_i|$ и $|\Gamma_2 x_i|$ ограничены теми же величинами;

– $|U_1^{к}|$ – ограничена m или константой, если $|\Gamma_1(X_1^{к})|$ и $|\Gamma_2(X_1^{к})|$ ограничены теми же величинами.

Таким образом асимптотическая оценка сложности формирования множества $U_1^{к}$ в худшем будет $O(m^2 \cdot n^2)$, если $|\Gamma_1 x_i|$, $|\Gamma_2 x_i|$ ограничены m и $|X_1^{к}|$ ограничена n, и в лучшем $O(1)$, если они ограничены константой.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции при формировании куска ультраграфа равна:

- *в худшем* $O(n^2 \cdot m^2)$, *если* $|\Gamma_1 x_i|$, $|\Gamma_2 x_i|$ *ограничены* m и $|X_1^{к}|$ *ограничена* n;
- *в лучшем* $O(m \cdot n)$, *если* $|\Gamma_2 u_j| = const$, *а* $|U_1^{к}|$ *и* $|X_1^{к}|$ *ограничены* m *и* n *соответственно или* $O(1)$, *если* $|X_1^{к}|$, $|U_{1\,ext}^{к}|$ *и* $|\Gamma_2 u_j|$ *ограничены константой.*

Формальное описание выполнения операции получения подграфа $H_{U1}(X_1, U_1)$ ультраграфа $H_U(X, U)$:

$U_1 = \{u_j \in U : \{\Gamma_2 u_j \cup \Gamma_1 u_j\} \subseteq X_1 / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}$(в отличие от куска ультраграфа у подграфа в множество U_1 входят только внутренние ребра);

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i \cap U_1 / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\};$

$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i \cap U_1 / x_i \in X_1, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\};$

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U / u_j \in U_1\};$

$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U / u_j \in U_1\};$

$F_1 X_1 = \{F_1 x_i : F_1 x_i \subseteq X_1 \vee \cup_{u_j \in \Gamma_1 x_i \cap U_1} \Gamma_2 u_j : F_1 x_i \not\subset X_1 / x_i \in X_1, F_1 x_i \in F_1 X,$
$\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\};$

$F_1^{-1} X_1 = \{F_1^{-1} x_i : F_1^{-1} x_i \subseteq X_1 \vee \cup_{u_j \in \Gamma_2 x_i \cap U_1} \Gamma_1 u_j : F_1^{-1} x_i \not\subset X_1 / x_i \in X_1, F_1^{-1} x_i \in F_1^{-1} X,$
$\Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\};$

$F_2 U_1 = \{F_2 u_j \cap U_1 / u_j \in U_1, F_1 u_j \in F_2 U\};$

$F_2^{-1} U_1 = \{F_2^{-1} u_j \cap U_1 / u_j \in U_1, F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U\}.$

***Формальное описание выполнения операции получения* куска $H_1^{к}(X_1^{к}, U_1^{к})$ *гиперграфа* $H(X, U)$.**

$X_1^{к} = X_1$; $U_1^{к} = \Gamma_1(X_1^{к})$, где $\Gamma_1(X_1^{к}) = \cup_{x_i \in X_1^{к}} \Gamma_1 x_i$, $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$;

$U_1^{к}{}_{int} = \{u_j \in U_1^{к} : \Gamma_2 u_j \subseteq X_1^{к} / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$, $U_1^{к}{}_{ext} = U_1^{к} \setminus U_1^{к}{}_{int}$;

$\Gamma_1 X_1^{к} = \{\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X / x_i \in X_1^{к}\};$

$\Gamma_2 U_1^{к} = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_1^{к}{}_{int} \vee \Gamma_2 u_j \cap X_1^{к} : u_j \in U_1^{к}{}_{ext} / u_j \in U_1^{к}, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\};$

$F_1 X_1^{к} = \{F_1 x_i \cap X_1^{к} / x_i \in X_1^{к}, F_1 x_i \in F_1 X\};$

$F_2 U_1^{к} = \{F_2 u_j \cap U_1^{к} / u_j \in U_1^{к}, F_1 u_j \in F_2 U\}.$

Формальное описание выполнения операции получения подграфа H_1 (X_1, U_1) гиперграфа $H(X, U)$:

$U_1 = \{u_j \in U : \Gamma_2 u_j \subseteq X_1 / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\};$

$\Gamma_1 X_1 = \{U_{1i} \cap U_1 / x_i \in X_1, U_{1i} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\};$

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U / u_j \in U_1\};$

$F_1X_1 = \{F_1x_i / x_i \in X_1\}$, где

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : F_1x_i \subseteq X_1, \text{ здесь и далее } F_1x_i \in F_1X, \\ \cup X_i : F_1x_i \not\subset X_1, \text{ где } X_i = \Gamma_2u_j \setminus x_i : |\Gamma_2u_j| > 1 \vee \Gamma_2u_j : |\Gamma_2u_j| = 1, \\ u_j \in \Gamma_1x_i \cap U_1 \end{cases}$$

$\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U$;

$F_2U_1 = \{ F_2u_j \cap U_1 / u_j \in U_1, F_1u_j \in F_2U\}$.

Вычислительная сложность операции над гиперграфом имеет тот же порядок, что и для ультраграфа.

Операция может быть применена для выделения части из куска ультра- или гиперграфа. В этом случае при определении множества внутренних ребер ${U_1}^{к}_{int}$ необходимо дополнительно проверять не было ли ребро внешним в куске ${H_U}^{к}$. Тогда при выполнении операции, например над куском ультраграфа, выражение в п.п. 3 должно иметь вид:

$${U_1}^{к}_{int} = \{u_j \in {U_1}^{к} \,\&\, u_j \notin {U}^{к}_{ext} : \{\Gamma_2u_j \cup \Gamma_1u_j\} \subseteq {X_1}^{к} / \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U,$$

$\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U\}$.

Пример. В схеме, показанной на рис. 11, *а*, выделим фрагмент, включающий элементы э$_1$, э$_2$, э$_3$, э$_4$, э$_5$. Тогда множество вершин формируемого куска ультраграфа ${H_{U1}}^{к} - {X_1}^{к} = X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Остальные множества аналитического представления этого куска в результате выполнения операции ${H_{U1}}^{к}\,({X_1}^{к},{U_1}^{к}) = H_U\,(X,U)$ ¤ X_1 будут:

${U_1}^{к} = \Gamma_1(X_1) \cup \Gamma_2(X_1) = \{u_4, u_3, u_1\} \cup \{u_4, u_1\} = \{ u_4, u_3, u_1\}$, ${U_1}^{к}_{int} = \{u_4\}$, так как только для ребра u_4 справедливо условие $\Gamma_2u_4 \cup \Gamma_1u_4 = \{ x_2, x_5, x_1\} \subseteq X_1$, и ${U_1}^{к}_{ext} = \{u_3, u_1\}$;

${\Gamma_1X_1}^{к} = \{\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X / x_i \in X_1\} = \{\{u_4\}, \{u_3\}, \varnothing, \{u_1\}, \varnothing\}$;

${\Gamma_2X_1}^{к} = \{\Gamma_2x_i \in \Gamma_2X / x_i \in X_1\} = \{\varnothing, \{u_4\}, \{u_1\}, \varnothing, \{u_4\}\}$;

${\Gamma_2U_1}^{к} : \Gamma_2u_4 = \{x_2, x_5\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_{10}, x_{11}\} \cap {X_1}^{к} = \varnothing$,

$\Gamma_2u_1 = \{x_3, x_6\} \cap {X_1}^{к} = \{x_3\}$;

${\Gamma_1U_1}^{к} : \Gamma_1u_4 = \{x_1\}$, $\Gamma_1u_3 = \{x_2\} \cap {X_1}^{к} = \{x_2\}$, $\Gamma_1u_1 = \{x_4\} \cap {X_1}^{к} = \{x_4\}$;

${F_1X_1}^{к} : F_1x_1 = \{x_2, x_5\} \cap {X_1}^{к} = \{x_2, x_5\}$, $F_1x_2 = \{x_{10}, x_{11}\} \cap {X_1}^{к} = \varnothing$, $F_1x_3 = \varnothing$, $F_1x_4 = \{x_3, x_6\} \cap {X_1}^{к} = \{x_3\}$, $F_1x_5 = \varnothing$;

$F_1^{-1}X_1^{к}: F_1^{-1}x_1 = \varnothing, F_1^{-1}x_2 = \{x_1\} \cap X_1^{к} = \{x_1\}, F_1^{-1}x_3 = \{x_4\} \cap X_1^{к} = \{x_4\},$
$F_1^{-1}x_4 = \varnothing, F_1^{-1}x_5 = \{x_1\} \cap X_1^{к} = \{x_1\};$

$F_2U_1^{к}: F_2u_4 = \{u_3\} \cap U_1^{к} = \{u_3\}, F_2u_3 = \varnothing, F_2u_1 = \{u_2\} \cap U_1^{к} = \varnothing;$

$F_2^{-1}U_1^{к}: F_2^{-1}u_4 = \varnothing, F_2^{-1}u_3 = \{u_4\} \cap U_1^{к} = \{u_4\}, F_2^{-1}u_1 = \varnothing.$

Для подграфа ультраграфа при том же X_1 получим:

$U_1 = \{u_4\};$

$\Gamma_1X_1 = \{\{u_4\}, \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing\}; \Gamma_2X_1 = \{\varnothing, \{u_4\}, \varnothing, \varnothing, \{u_4\}\};$

$\Gamma_2U_1: \Gamma_2u_4 = \{x_2, x_5\}; \Gamma_1U_1: \Gamma_1u_4 = \{x_1\};$

$F_1X_1: F_1x_1 = \{x_2, x_5\}, F_1x_2 = F_1x_3 = F_1x_4 = F_1x_5 = \varnothing;$

$F_1^{-1}X_1: F_1^{-1}x_1 = \varnothing, F_1^{-1}x_2 = \{x_1\}, F_1^{-1}x_3 = \varnothing, F_1^{-1}x_4 = \varnothing, F_1^{-1}x_5 = \{x_1\};$

$F_2U_1: F_2u_4 = \{u_3\} \cap U_1 = \varnothing; F_2^{-1}U_1^{к}: F_2^{-1}u_4 = \varnothing.$

При использовании в качестве модели схемы гиперграфа множества аналитического представления куска $H_1^{к}$ ($X_1^{к}$, $U_1^{к}$, $\Gamma_1X_1^{к}$, $\Gamma_2U_1^{к}$) будут:

$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$

$U_1^{к} = \Gamma_1(X_1) = \{u_4, u_3, u_1\}, U_{1int}^{к} = \{u_4\}, U_{1ext}^{к} = \{u_3, u_1\};$

$\Gamma_1X_1^{к} = \{\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X / x_i \in X_1\} = \{\{u_4\}, \{u_3,u_4\}, \{u_1\}, \{u_1\}, u_4\}\};$

$\Gamma_2U_1^{к}: \Gamma_2u_4 = \{x_1, x_2, x_5\}, \Gamma_2u_3 = \{x_2, x_{10}, x_{11}\} \cap X_1^{к} = \{x_2\},$
$\Gamma_2u_1 = \{x_3, x_4, x_6\} \cap X_1 = \{x_3, x_4\};$

Окончание статьи будет опубликовано в последующих выпусках.

Литература

1. Овчинников В.А. Математические модели объектов задач структурного синтеза: Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009. – № 4.